演習課題

(2010 年度数理計画法の期末試験問題より)

愛媛大学工学部情報工学科

数理計画法(2010 年度)

期末試験、問題・答案用紙

氏名等記入欄

氏名________________________
学籍番号______________________

愛媛大学　　　　学部　　　　学科　　　　回生

注意事項:

- ノート・資料の持ち込みはできません。
- 筆記具(鉛筆、ボールペン、消しゴム等を含む)、時計以外の道具は机の上に出してはいけません。
- 試験時間は板書で指示します。
- 草稿紙、問題・答案用紙は書き込みの有無に関係無く、全て回収します。
- 草稿紙、問題・答案用紙には必ず氏名と学籍番号、所属を記入してください。
- その他、学科・学部・大学の定める規定にしたがってください。

第 1 問：次の最適化問題について述べよ。

- a と b の 2 成分を a:b=1:1 で混合して薬品 A を、1:3 で混合して薬品 B を製造する。製造・販売により薬品 A、B ともに 1kg あたりで 5 万円の利益がある。a の在庫が 2kg、b が 3kg のときに利益を最大にする 2 つの薬品の製造量を求めよ。

1. A を x_1[kg]、B を x_2[kg]製造する場合の a・b の使用量を求め、在庫の制限を不等式で示せ。
2. 1 で全ての薬品を販売して得られる利益を最大化する線形計画問題を等式標準形で示せ。
3. 2 の線形計画問題の最適解を求め、最適解・最適値をその解法の説明とともに示せ。
4. 薬品 A の 1kg あたり利益が変化した場合、利益を最大化する最適解にどのような影響があるかを検討し説明せよ。ただし薬品 B の利益には変化が無いものとする。

※ 2 種の薬品はどちらも a・b を混合しただけのものであり、また混合による反応で重量の変化などは起こらないものとする。

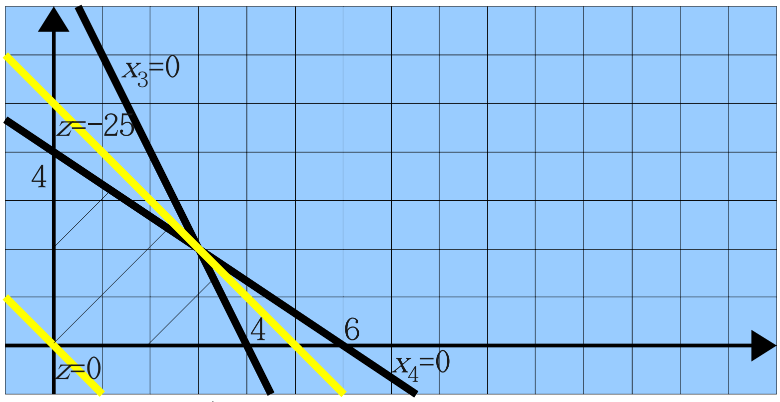
解答欄：

1、　薬品 A x1[kg]中の成分 a の重量：0.5×x1[kg]、成分 b の重量：0.5×x1[kg]、
　　薬品 B x2[kg]中の成分 a の重量：0.25×x2[kg]、成分 b の重量：0.75×x2[kg]、
薬品 A x1[kg],B x2[kg]を製造したときの
　　成分 a の使用量 0.5×x1+0.25×x2[kg]、成分 b の使用量 0.5×x1+0.75×x2[kg]、
利用できる 2 成分の在庫制限より
　　0.5×x1+0.25×x2[kg]≦2[kg]　　0.5×x1+0.75×x2[kg]≦3[kg]

2、　薬品 A x1[kg]、薬品 B x2[kg]の販売で得られる利益：5×x1+5×x2[万円]
利益を最大化する線形計画問題の等式標準形

minimize　z=-5x1-5x2
subject to　0.5x1+0.25x2+x3=2
　　0.5x1+0.75x2+x4=3
　　x1,x2,x3,x4≧0

3、　下の x1-x2 平面のグラフより実行可能領域の端点(x1,x2)=(3,2)で最適値 z=-25 となることが分かる



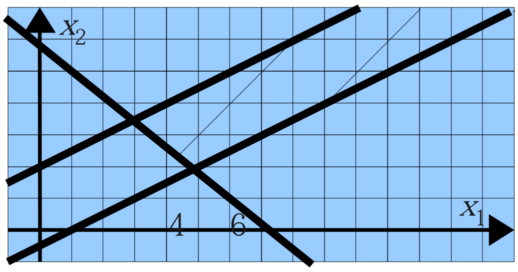
4、A の 1[kg]あたり利益は、目的関数のグラフ傾きに現れる
上の図より、A の 1[kg]あたり利益をαとすると、αの値により最適解・最適値が次のように変化する
0＜α≦10/3[万円]　　最適解：(x1,x2)=(0,4)、最適値 z=-20
10/3[万円]≦α≦10[万円]　　最適解：(x1,x2)=(3,2)、最適値 z=-3α-10
10[万円]≦α　　最適解：(x1,x2)=(4,0)、最適値 z=-4α
αの範囲のうち、重複する部分では最適解を 1 点に定めることができない

第 2 問:次の線形計画問題を単体法を用いて解くことを考える。

minimize $x_1 + x_2$

subject to $2x_1 + x_2 \geq 7,\ -x_1 + 2x_2 \geq -1,\ x_1 - 2x_2 \geq -4$

1. 実行可能領域を図示し、原点 (x_1=x_2=0) が実行可能領域に無いことを示せ。
2. 等式標準形を求め、単体法を用いて、その最適解、目的関数の最適値を求めよ。



解答欄:

1、右図斜線部の実行可能領域より原点 (x_1=x_2=0) が実行可能領域に無いことは明か。

2、等式標準形を次に示す

minimize $z = x_1 + x_2$

subject to
$$\begin{array}{rl} 2x_1 + x_2 - x_3 & = 7, \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 & = -1, \\ x_1 - 2x_2 - x_5 & = -4, \\ z - x_1 - x_2 & = 0, \end{array}$$

人工問題

minimize $w = x_6$,

subject to
$$\begin{array}{rl} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_6 & = 7, \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 & = -1, \\ x_1 - 2x_2 - x_5 & = -4, \\ w + 2x_1 + x_2 - x_3 & = 7, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0, & \\ (z - x_1 - x_2 & = 0), \end{array}$$

シンプレックス表を作り単体法を用いて解く

第 3 問：次の線形計画問題について答えよ。

minimize $\quad z=3x_1+x_2+x_3-x_4$

subject to $\quad x_1+x_2-x_3-x_4 \geq a,\ x_1-x_2+x_3-x_4 \geq 1$

1. $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$とし、与えられた問題を行列を用いて示せ。
2. 与えられた問題の双対問題を等式標準形で示し、a=2 の場合の最適解・最適値を求めよ。
3. 相補性定理を説明し、主・双対変数の関係を用い、2 の場合の元の問題の最適解を求めよ。
4. a>0 の範囲で最適解・最適値の変化について述べよ。

解答欄：

1、

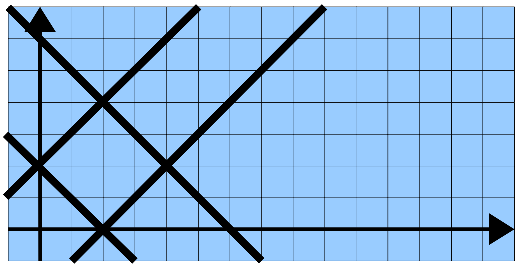
minimize $\quad z=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

subject to $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$

2、1 の結果を使い、双対問題を最大化問題の不等式標準形で示せば、

maximize $\quad w=\begin{pmatrix} a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

subject to $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



等式標準形に直して

minimize $\quad -w=-ay_1-y_2$

subject to
$$y_1+y_2+t_1=3$$
$$y_1-y_2+t_2=1$$
$$-y_1+y_2+t_3=1$$
$$-y_1-y_2+t_4=-1$$

$y_1,\ y_2,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4 \geqq 0$

2 変数の問題になるので、実行可能領域をグラフに描き、最適解を求める。

a=2 のとき、$y_1=2,\ y_2=1$ で w=5、また等式制約より t_1=0, t_2=0, t_3=2, t_4=2

3、主問題の等式標準形を次のように表す。

minimize $\quad z=3x_1+x_2+x_3-x_4$

subject to
$$x_1+x_2-x_3-x_4-s_1=a(=2)$$
$$x_1-x_2+x_3-x_4-s_2=1$$

$s_1,\ s_2,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqq 0$

相補性定理より、最適解の変数が正のとき双対変数は 0 なので主問題の最適解において

$y_1,\ y_2,\ t_3,\ t_4$>0 より $s_1=s_2=x_3=x_4=0$、これを等式制約に代入して

$$\begin{matrix} x_1+x_2-x_3-x_4-s_1=2 \\ x_1-x_2+x_3-x_4-s_2=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1+x_2=2 \\ x_1-x_2=1 \end{matrix}$$

この連立方程式を解いて $\quad x_1=\dfrac{3}{2}, x_2=\dfrac{1}{2}$

4、3 で描いたグラフに目的関数を与える平面の法線ベクトルが変化する範囲を考えればよい