

# 復習

数理計画法 = 数理計画問題 - 問題 + 法

## 数理計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{subject to} & g(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (x_1, \dots, x_n)^T \in X \end{array}$$

与えられた制約式のもとである関数を最大化する問題

## 線形計画問題

$f(x_1, \dots, x_n)$  や  $g(x_1, \dots, x_n)$  が線形な場合

線形計画法 = 線形計画問題 - 問題 + 法

グラフを利用した解法  
グラフの交点を総当たりする解法

# 復習

## 線形計画問題の素朴な解法

### グラフを用いた解法

1. 制約式に対応するグラフを描き
2. グラフを境界とする実行可能領域を求める
3. 目的関数に対応するグラフを描き
4. 目的関数値を増やす(減らす)方向を調べる
5. 実行可能領域の端点から最適解を選ぶ

### 交点を総当たりする解法

1. 制約式に対応するグラフの方程式を全て求める
2. 方程式の組合せで定まる交点を全て求める
3. 全ての交点の実行可能性を調べる
4. 実行可能な交点の目的関数値を求め最適解を選ぶ

# 復習：練習問題1

A4用紙を横に使う、左上に名前・学年・学籍番号を記入

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

上記の最適化問題について、  
課題1：maximize ... subject to ... の形式で  
線形計画問題を表現しなさい。

課題2：グラフを用いる解法・交点を総当たりする解法  
で最適解を求めなさい。

課題3：授業の感想・意見があれば書いてください。

# 課題1 解答例

珈琲飲料の1日当り生産量を  $x_1 \times 100$ [g] とする

珈琲牛乳の1日当り生産量を  $x_2 \times 100$ [g] とする

$$\text{maximize } 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{subject to } \begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\leq 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 &\leq 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 &\leq 1800 \times 10^3 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

変数の定義は  
残しておく

# 課題2 グラフを利用した解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

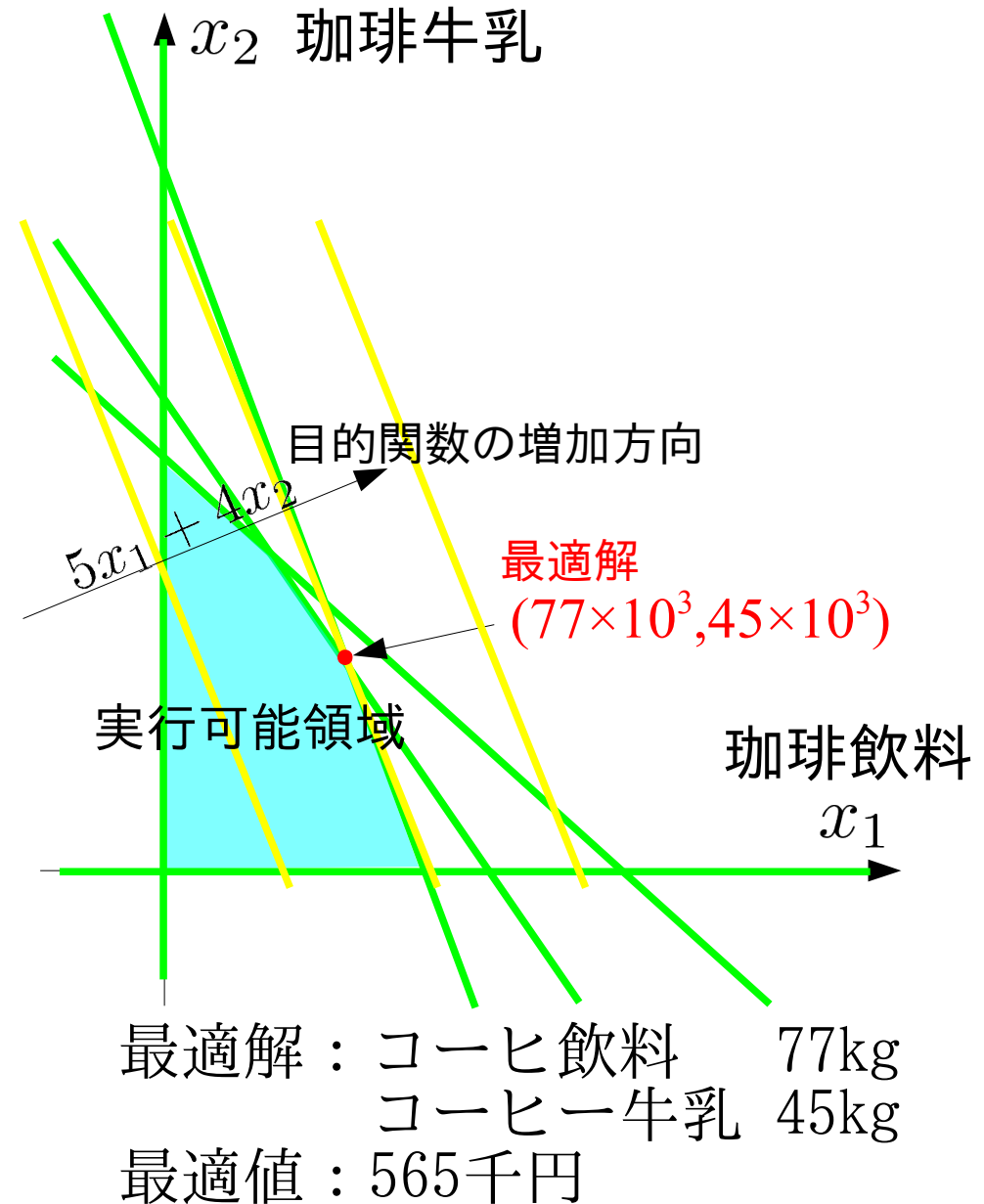
①  $15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$

②  $10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$

③  $9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$

④  $x_1 = 0$

⑤  $x_2 = 0$



# 課題2 グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

$$\textcircled{1} \quad 15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$$

$$\textcircled{2} \quad 10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$$

$$\textcircled{3} \quad 9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$$

$$\textcircled{4} \quad x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} \quad x_2 = 0$$

方程式	$x_1$	$x_2$	実行可能?	目的関数値
①②	$77 \times 10^3$	$45 \times 10^3$	○	$565 \times 10^3$
①③	$65.6 \times 10^3$	$60.4 \times 10^3$	×	
①④	0	$150 \times 10^3$	×	
①⑤	$110 \times 10^3$	0	○	$550 \times 10^3$
②③	$37.8 \times 10^3$	$73.0 \times 10^3$	○	$481 \times 10^3$
②④	0	$100 \times 10^3$	×	
②⑤	$140 \times 10^3$	0	×	
③④	0	$90 \times 10^3$	○	$360 \times 10^3$
③⑤	$200 \times 10^3$	0	×	
④⑤	0	0	○	0

最適解 : コーヒ飲料 77kg  
 コーヒー牛乳 45kg

最適値 : 565千円

# 「素朴な解法」の問題点と解決法

- グラフを用いた解法
  - 2~3変数までの問題に適用可能
  - 計算機アルゴリズムとして構成し難い
- 交点を総当たりする解法
  - 多変数の問題に適用可能
  - 交点の実行可能性を調べる手間がある
  - 変数が増えると無駄な交点計算が増える
- 単体法 (シンプレックス法、Simplex Method)  
G. B. Danzig (1947)
  - 問題を標準化し、規則にしたがって表に変換する。
  - 決められた手順で表を更新して最適解を見つける。

# 線形計画問題の標準化

- 不等式標準形
  - 目的関数は最小化される
  - 制約式は「左辺に変数と係数 $\geq$ 右辺に定数のみ」
  - 全ての変数は非負
- 等式標準形
  - 目的関数は最小化される
  - 制約式は「左辺に変数と係数 $=$ 右辺に定数のみ」
  - 全ての変数は非負
- シンプレックス表

等式標準形の制約式から左辺の係数、右辺の定数、目的関数から左辺の係数を取り表にしたもの



# 線形計画問題の不等式標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数 $\geq$ 右辺に定数のみ」
- 全ての変数は非負
- 規則にしたがって問題を書換える

元の問題と正しく  
対応するように変  
形すること

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

元の問題(演習1課題1)

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$-15x_1 - 11x_2 \geq -1650 \times 10^3$$

$$-10x_1 - 14x_2 \geq -1400 \times 10^3$$

$$-9x_1 - 20x_2 \geq -1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

不等式標準形

# 線形計画問題の不等式標準形

- 目的関数は最小化される

- -1倍して最小化問題に書換える

$$\text{maximize } 5x_1 + 4x_2 \implies \text{minimize } -5x_1 - 4x_2$$

- 制約式は「左辺に変数と係数 $\geq$ 右辺に定数のみ」

- 両辺を-1倍して不等号の向きを揃える

$$x_1 - x_2 \leq 1 \implies -x_1 + x_2 \geq -1$$

- 1つの等式制約を2つの不等式制約で置換え

$$x_1 + x_2 = 1 \implies x_1 + x_2 \geq 1, -x_1 - x_2 \geq -1$$

- 全ての変数は非負

- 非正変数を-1倍した非負変数で置換える

$$x_1 \leq 0 \implies x_2 \geq 0 \quad (x_2 = -x_1)$$

- 自由変数を2つの非負変数で置換える

$$x \implies x_1, x_2 \geq 0 \quad (x = x_1 - x_2)$$

**全ての線形計画問題を不等式標準形で表すことができる**

# 線形計画問題の等式標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数=右辺に定数のみ」
- 全ての変数は非負
- 変数を加えて不等式→等式に書換える
  - 左辺 $\leq$ 右辺→左辺に不足する分を非負変数で補う
  - 左辺 $\geq$ 右辺→左辺が過剰な分を非負変数で減らす

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$-15x_1 - 11x_2 \geq -1650 \times 10^3$$

$$-10x_1 - 14x_2 \geq -1400 \times 10^3$$

$$-9x_1 - 20x_2 \geq -1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

不等式標準形

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$-15x_1 - 11x_2 - x_3 = -1650 \times 10^3$$

$$-10x_1 - 14x_2 - x_4 = -1400 \times 10^3$$

$$-9x_1 - 20x_2 - x_5 = -1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

等式標準形

# 線形計画問題の等式標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数=右辺に定数のみ」
- 全ての変数は非負
- 不等式標準形で用いた式変形に加え、
- 変数を追加して、不等式を等式と追加変数の非負条件で置換える
  - 左辺 $\leq$ 右辺 $\rightarrow$ 左辺に不足する分を非負変数で補う

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \quad 9x_1 + 20x_2 + x_3 = 1800$$
$$x_3 \geq 0$$

- 左辺 $\geq$ 右辺 $\rightarrow$ 左辺が過剰な分を非負変数で減らす

$$9x_1 + 20x_2 \geq 1800 \quad 9x_1 + 20x_2 - x_4 = 1800$$
$$x_4 \geq 0$$

※元の不等式の成否は追加された変数の非負条件に対応する。

※  $x_3$  をslack変数、 $x_4$  をsurplus変数と呼ぶこともある。

# 等式標準形のもとでの総当たり解法

等式標準形

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 + x_3 = 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 + x_4 = 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 + x_5 = 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

1. 3つの方程式で定まる3変数を選ぶ。

2. 連立方程式を解き、変数値を定める。

例:  $x_1, x_2, x_3$  であれば、 $x_4, x_5$  を無視して、

$$15x_1 + 11x_2 + x_3 = 1650 \times 10^3 \quad x_1 = 1400 \times 10^3 / 37$$

$$10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3 \quad x_2 = 2700 \times 10^3 / 37$$

$$9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3 \quad x_3 = 10350 \times 10^3 / 37$$

3. 全ての組合せに対して実行し、最適値・最適解を探す

# 等式標準形のもとでの総当たり解法

$x_1$ [ $\times 10^3$ ]	$x_2$ [ $\times 10^3$ ]	$x_3$ [ $\times 10^3$ ]	$x_4$ [ $\times 10^3$ ]	$x_5$ [ $\times 10^3$ ]	条件	目的関数 [ $\times 10^3$ ]
		1650	1400	1800		0
	150		-700	-1200	×	
	100	550		-200	×	
	90	660	140			-360
110			300	810		-550
140		-450		540	×	
200		-1350	-600		×	
77	45			207		-565
4400/67	4050/67		-6900/67		×	
1400/37	2700/37	10350/37				-481.08

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

※元の不等式制約には変数の非負条件が対応するので、  
 全ての変数が非負の場合だけを考えれば良い

# 線形計画問題の標準形

等式標準形にもとづく総当たりによる解法

1. 等式制約と変数の数に対応して、  
全ての組み合わせの連立方程式を解く
2. 変数の非負条件を満たす解について目的関数を求める
3. 最小(最大)の目的関数値を与える解が最適解となる。

問題点、

- ・ 連立方程式の組み合わせ数が爆発的に増加する
- ・ 不必要な連立方程式も解く必要がある

次回：単体法

次々回：巡回と最小添字規則

## 練習問題2

名前・学年・学籍番号を記入し、授業の感想とともに提出

ミックスジュース5Lの生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題:利益を最大化する2種類のミックス  
ジュースの生産量は?

課題1: 対応する線形計画問題の不等式標準形を示しなさい。

課題2: 不等式標準形を等式標準形に書換えなさい。

課題3: 総当たりによる解法を用いて最適解を求めなさい。