

復習:演習問題

次の線形計画問題の双対問題を求め、単体法等を用いてこれを解き、最適解の与える両者の目的関数値が等しいことを確認してください。

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \\ & z = x_1 + x_2 \\ &\text{subject to} \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \\ & w = 2y_1 + 2y_2 \\ &\text{subject to} \\ & y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ & 2y_1 + y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \\ & z = x_1 + x_2 \\ &\text{subject to} \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \\ & \tilde{z} (= -z = -x_1 - x_2) \\ &\text{subject to} \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ & \tilde{z} + x_1 + x_2 = 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

z	x1	x2	x3	x4	定数
	1	2	1		2/1=2
	2	1		1	2/2=1
1	1	1			0

z	x1	x2	x3	x4	定数
	0	3/2		1/2	-2/1=2
	1	1/2		1/2	-2/2=1
1	1	1		1/2	0

z	x1	x2	x3	x4	定数
		3/2	1	-1/2	1
	1	1/2		1/2	1
1	1	1/2	-1/2	-1	0

$$x_1 = x_2 = 2/3, \tilde{z} = -4/3 \Rightarrow z = 4/3$$

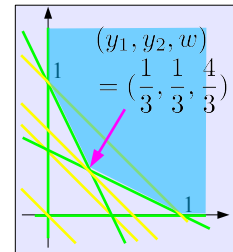
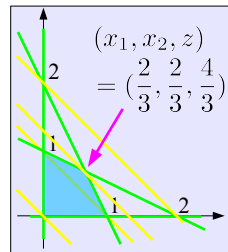
$$\begin{aligned} &\text{minimize} \\ & w = 2y_1 + 2y_2 \\ &\text{subject to} \\ & y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ & 2y_1 + y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \\ & w^*, \text{ then } w \\ &\text{subject to} \\ & y_1 + 2y_2 - y_3 + y_5 = 1 \\ & 2y_1 + y_2 - y_4 + y_6 = 1 \\ & w - 2y_1 - 2y_2 = 0 \\ & w^* + 3y_1 + 3y_2 - y_3 - y_4 = 2 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0 \end{aligned}$$

w,w*	y1	y2	y3	y4	y5	y6	定数
-1	1	2	-1				1
x1/2	2	1					1/2
+x2	-2	-2					0
-x3	1	3/2	3	-1	3/2	-3/2	2
x4/3	0	3/2	-1	1/2	1/2	1/2	2/3
-1/2	1	1/2	1/3	-2/3	-1/3	2/3	1/3
+x5	1	0	-1	-2/3	1/3	2/3	1/3
-3/2	1	0	3/2	-1	1/2	1/2	0

復習:演習問題

次の線形計画問題の双対問題を求め、単体法等を用いてこれを解き、最適解の与える両者の目的関数値が等しいことを確認してください。



双対定理

線形計画問題とその双対問題が右のように与えられ、 $\tilde{x}^T = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m)$, $\tilde{y}^T = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$ 実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、最適解である。

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \\ & z = c^T x \\ &\text{subject to} \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \\ & w = b^T y \\ &\text{subject to} \\ & A^T y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

$\exists \tilde{x}, \exists \tilde{y} \geq 0$ s.t. $A\tilde{x} \geq b, A^T\tilde{y} \leq c, c^T\tilde{x} = b^T\tilde{y}$ 主問題 双対問題
 $\Rightarrow \forall x, \forall y \geq 0$ s.t. $Ax \geq b, A^T y \leq c$, then $c^T\tilde{x} \leq c^T x, b^T\tilde{y} \geq b^T y$
 また、一方に最適解が存在すれば、もう一方にも最適解が存在し、最適解が与える双方の目的関数値は等しい。

$\exists \tilde{x} \geq 0$ s.t. $A\tilde{x} \geq b, c^T\tilde{x} \geq c^T\tilde{x}$, for $\forall x \geq 0$ s.t. $Ax \geq b$
 $\Rightarrow \exists \tilde{y} \geq 0$ s.t. $A^T\tilde{y} \leq c, b^T\tilde{y} \leq b^T\tilde{y}$,

$$\text{for } \forall y \geq 0 \text{ s.t. } A^T y \leq c, c^T\tilde{x} = b^T\tilde{y}$$

双対定理

線形計画問題とその双対問題が右のように与えられ、 $\tilde{x}^T = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m)$, $\tilde{y}^T = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$ 実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、最適解である。

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \\ & z = c^T x \\ &\text{subject to} \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \\ & w = b^T y \\ &\text{subject to} \\ & A^T y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

$\exists \tilde{x}, \exists \tilde{y} \geq 0$ s.t. $A\tilde{x} \geq b, A^T\tilde{y} \leq c, c^T\tilde{x} = b^T\tilde{y}$
 $\Rightarrow \forall x, \forall y \geq 0, c^T\tilde{x} \leq c^T x, b^T\tilde{y} \geq b^T y$

証明：
 x と y をそれぞれの問題の任意の実行可能解とする。
 $z = c^T x$ の各項を不等式 $A^T y \leq c$ で評価すれば次の関係式が得られる。
 $z = c_1 x_1 + \dots + c_m x_m \geq (a_{11} y_1 + \dots + a_{1m} y_m) x_1 + \dots + (a_{1m} y_1 + \dots + a_{nm} y_n) x_m$
 同様に $w = b^T y$ と $Ax \geq b$ から次の関係式が得られる。
 $w = b_1 y_1 + \dots + b_n y_n \leq (a_{11} x_1 + \dots + a_{1m} x_m) y_1 + \dots + (a_{n1} x_1 + \dots + a_{nm} x_n) y_n$
 両式の右辺を比較すれば、一般に $c^T x = b^T y$ の成立することが分かる。
 $c^T\tilde{x} = b^T\tilde{y}$ であれば任意の x, y に対して次式が成立し定理が証明される。
 $b^T\tilde{y} = c^T\tilde{x} \geq b^T y, c^T x \geq b^T\tilde{y} = c^T\tilde{x}$

主問題と双対問題の関係

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \\ & z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ &\text{subject to} \\ & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 + 4x_3 \leq 4 \\ & -4x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

最大化問題

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \\ & w = 4y_1 + 4y_2 + y_3 \\ &\text{subject to} \\ & 2y_1 + 2y_2 - 4y_3 \geq 2 \\ & 2y_1 + 3y_3 \geq 1 \\ & -y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

最小化問題

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \\ & z = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &\text{subject to} \\ & \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\text{minimize} \\ & w = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &\text{subject to} \\ & \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

主問題と双対問題の関係

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \\ & z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ &\text{subject to} \\ & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4 \text{ ①} \\ & 2x_1 + 4x_3 \leq 4 \text{ ②} \\ & -4x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 1 \text{ ③} \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

最大化問題

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \\ & w = 4y_1 + 4y_2 + y_3 \\ &\text{subject to} \\ & 2y_1 + 2y_2 - 4y_3 \geq 2 \\ & 2y_1 + 3y_3 \geq 1 \\ & -y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

最小化問題

最大化問題は、制約式の定める上界に一番近い実行可能解を探す問題
 2つの制約式から分かる上界の例：
 $z \leq (①+②)/2 = 2x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 4$
 (係数を比較すれば不等式の成立が分かる)
 ①②③の組み合わせで得られる関係式
 $y_1 \times ① + y_2 \times ② + y_3 \times ③$
 を考える。
 $y_1, y_2, y_3 \geq 0$ であれば、各式の両辺を加えて
 $= (2y_1 + 2y_2 - 4y_3)x_1 + (2y_1 + 3y_3)x_2$
 $+ (-y_1 + 4y_2 - y_3)x_3 \leq (4y_1 + 4y_2 + y_3)$
 関係式の係数が目的関数の係数より大きければ、
 $z \leq 4y_1 + 4y_2 + y_3$ により
 目的関数の上界を得ることができる。
 このとき、最も厳しい上界を求める問題、すなわち $4y_1 + 4y_2 + y_3$ の最小化問題が z の上界を求める問題に対応する。

maximize $z = c^T x$
subject to $Ax \leq b$
 $x \geq 0$

最大化問題

minimize $w = b^T y$
subject to $A^T y \leq c$
 $y \geq 0$

最小化問題

一般化して考えると;

主問題の制約 $Ax \leq b$ と非負条件 $y \geq 0$ から $y^T Ax \leq y^T b$

主問題の制約 $A^T y \geq c$ と非負条件 $x \geq 0$ から $x^T A^T y \geq x^T c$

スカラーを転置しても値は変わらないので $z = c^T x = x^T c \leq x^T A^T y = y^T Ax \leq y^T b = b^T y = w$

y を変化させて最小の w を探す
 $\Rightarrow Ax \leq b$ のもとで最も厳しい z の上界を探す
 x を変化させて最大の z を探す
 $\Rightarrow A^T y \geq c$ のもとで最も厳しい w の下界を探す

minimize $z = c^T x$
subject to $Ax \geq b$
 $x \geq 0$

主問題

maximize $w = b^T y$
subject to $A^T y \leq c$
 $y \geq 0$

双対問題

双対問題は、最大化問題の最小上界、最小化問題の最大下界を求める数理計画問題である。行列表現を用いた一般的な表現は左記の通り

双対定理

上式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、 $\tilde{x}^T = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m)$ と $\tilde{y}^T = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$ がそれぞれ主問題、双対問題の実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、これは、それぞれの問題の最適解である。

$$\exists \tilde{x}, \exists \tilde{y} \geq 0 \text{ s.t. } A\tilde{x} \leq b, A^T \tilde{y} \geq c, c^T \tilde{x} = b^T \tilde{y} \\ \Rightarrow \forall x, \forall y \geq 0, c^T x \geq c^T \tilde{x}, b^T \tilde{y} \geq b^T y$$

また、どちらか一方に最適解 \tilde{x} が存在すれば、もう一方にも最適解 \tilde{y} が存在し、双方の最適解が与える目的関数値は等しい。

主問題と双対問題の等式標準形

minimize $z = c^T x$
subject to $Ax \geq b$
 $x \geq 0$

主問題

minimize $z = c^T x$
subject to $Ax - Is = b$
 $x \geq 0, s \geq 0$

主問題の等式標準形

主問題の主変数: $x^T = (x_1, \dots, x_m)$

x の双対変数: $t^T = (t_1, \dots, t_n)$

主問題のスラック変数: $s^T = (s_1, \dots, s_m)$

s の双対変数: $y^T = (y_1, \dots, y_n)$

maximize $w = b^T y$
subject to $A^T y \leq c$
 $y \geq 0$

双対問題

maximize $w = b^T y$
subject to $A^T y + It = c$
 $y \geq 0, t \geq 0$

双対問題の等式標準形

双対問題の主変数: $y^T = (y_1, \dots, y_n)$

y の双対変数: $s^T = (s_1, \dots, s_m)$

双対問題のスラック変数: $t^T = (t_1, \dots, t_n)$

t の双対変数: $x^T = (x_1, \dots, x_m)$

双対問題と相補性定理

minimize $z = c^T x$
subject to $Ax \geq b$
 $x \geq 0$

主問題

相補性定理

左式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、

$$\tilde{x}^T = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m) \quad \tilde{y}^T = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$$

がそれぞれ、主問題、双対問題の最適解であるならば、次の関係式が成立する。

$$\tilde{x}_j > 0 \Rightarrow a_{1j} \tilde{y}_1 + \dots + a_{nj} \tilde{y}_n = c_j$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Rightarrow a_{k1} \tilde{x}_1 + \dots + a_{km} \tilde{x}_m = b_k$$

$$a_{1j} \tilde{y}_1 + \dots + a_{nj} \tilde{y}_n < c_j \Rightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$a_{k1} \tilde{x}_1 + \dots + a_{km} \tilde{x}_m > b_k \Rightarrow \tilde{y}_k = 0$$

minimize $z = c^T x$
subject to $Ax \geq b$
 $x \geq 0$

主問題

maximize $w = b^T y$
subject to $A^T y \leq c$
 $y \geq 0$

双対問題

双対定理:
 \tilde{x} と \tilde{y} が実行可能解かつ $c^T \tilde{x} = b^T \tilde{y}$
 $\iff \tilde{x}$ と \tilde{y} は最適解
 弱双対定理:
 x と y が実行可能解 $\implies c^T x \geq b^T y$
 $\therefore c^T x \geq (A^T y)^T x = y^T Ax \geq y^T b = b^T y$

相補性定理:
 \tilde{x} と \tilde{y} は最適解なので $c^T \tilde{x} = b^T \tilde{y}$ この不等式の等号が成立する。

$$(c - A^T \tilde{y})^T \tilde{x} = 0 \quad (b - A \tilde{x})^T \tilde{y} = 0$$

$$\tilde{x}_j > 0 \implies a_{1j} \tilde{y}_1 + \dots + a_{nj} \tilde{y}_n = c_j$$

$$\tilde{y}_k > 0 \implies a_{k1} \tilde{x}_1 + \dots + a_{km} \tilde{x}_m = b_k$$

$$a_{1j} \tilde{y}_1 + \dots + a_{nj} \tilde{y}_n < c_j \implies \tilde{x}_j = 0$$

$$a_{k1} \tilde{x}_1 + \dots + a_{km} \tilde{x}_m > b_k \implies \tilde{y}_k = 0$$

等式標準形と相補性定理

minimize $z = c^T x$
subject to $Ax - Is = b$
 $x \geq 0, s \geq 0$

主問題の等式標準形

相補性定理

左式のような線形計画問題とその双対問題の等式標準形が与えられているとき、

$$\tilde{x}^T = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m) \quad \tilde{s}^T = (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n)$$

がそれぞれ、主問題、双対問題の最適解であるとする。

このとき、次の関係式が成立する。

$$\tilde{x}_j > 0 \implies \tilde{t}_j = 0 \quad \tilde{t}_j > 0 \implies \tilde{x}_j = 0$$

$$\tilde{y}_k > 0 \implies \tilde{s}_k = 0 \quad \tilde{s}_k > 0 \implies \tilde{y}_k = 0$$

maximize $w = b^T y$
subject to $A^T y + It = c$
 $y \geq 0, t \geq 0$

双対問題の等式標準形

主問題の等式標準形

maximize $z = x_1 + 2x_2$
subject to $2x_1 - x_2 + s_1 = 7$
 $3x_1 + x_2 + s_2 = 10$
 $-x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$
 $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

双対問題の等式標準形

minimize $w = 7y_1 + 10y_2 + 18y_3$
subject to $2y_1 + 3y_2 - y_3 - t_1 = 1$
 $-y_1 + y_2 + 2y_3 - t_2 = 2$
 $y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0$

相補性定理

$$\tilde{x}_j > 0 \implies \tilde{t}_j = 0 \quad \tilde{t}_j > 0 \implies \tilde{x}_j = 0$$

$$\tilde{y}_k > 0 \implies \tilde{s}_k = 0 \quad \tilde{s}_k > 0 \implies \tilde{y}_k = 0$$

$\tilde{x}_1 = \frac{2}{7}$	$\tilde{t}_1 = 0$	
$\tilde{x}_2 = \frac{64}{7}$	$\tilde{t}_2 = 0$	$3y_2 - y_3 = 1,$
$\tilde{s}_1 = \frac{109}{7}$	$\tilde{y}_1 = 0$	$y_2 + 2y_3 = 2$
$\tilde{s}_2 = 0$	$\tilde{y}_2 = ?$	$\tilde{y}_2 = \frac{4}{7}$
$\tilde{s}_3 = 0$	$\tilde{y}_3 = ?$	$\tilde{y}_3 = \frac{5}{7}$
$\tilde{z} = \frac{130}{7}$	$\tilde{w} = \frac{130}{7}$	

主問題の最適解から、双対問題の最適解が定まる。(逆も同様)

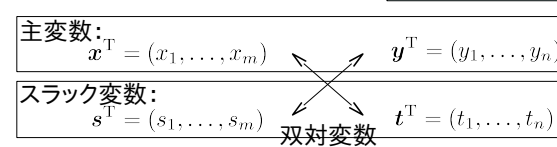
まとめ「相補性定理と双対変数」

minimize $z = c^T x$
subject to $Ax - Is = b$
 $x \geq 0, s \geq 0$

主問題の等式標準形

maximize $w = b^T y$
subject to $A^T y + It = c$
 $y \geq 0, t \geq 0$

双対問題の等式標準形



相補性定理

$$\tilde{x}_j > 0 \implies \tilde{t}_j = 0 \quad \tilde{t}_j > 0 \implies \tilde{x}_j = 0$$

$$\tilde{y}_k > 0 \implies \tilde{s}_k = 0 \quad \tilde{s}_k > 0 \implies \tilde{y}_k = 0$$