今後の授業日程について

- 今日の授業
  - 12月10日、第11回「多面体と双対定理・相補性定理」
- 今後の授業
  - 12月17日、第12回「内点法の原理」
  - 01月14日、第13回「演習」
- 期末試験
  - 01月21日、第14回「期末試験」
    - 2時限目、工学部5号館1階E411教室（予定 ）
- まとめ
  - 01月28日、第15回「その他の最適化法」
＋期末試験結果について

復習：線形計画問題と多面体

定義：n次元実ベクトル空間$\mathbb{R}^n$の多面体$\mathcal{P}$

$$\mathcal{P}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n | A_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1,\ A_2\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{b}_2\}$$

このように行列$A_1,\ A_2$とベクトル$\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2$で表わされる部分集合$\mathcal{P}$を$\mathbb{R}^n$の多面体と呼ぶ。

※この定義では面や直線、点、半平面も多面体となる

面： $\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3)$

直線： $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{pmatrix}$

点： $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{pmatrix}$

※上は全て 3次元の場合

定義：有界多面体

$^\forall\boldsymbol{x}\in\mathcal{P}\Rightarrow||\boldsymbol{x}||\leqq{}^\exists M$を満たす定数$M$が存在するとき、$\mathcal{P}$を有界多面体と呼ぶ。

復習：線形計画問題と多面体

定義：n次元実ベクトル空間$\mathbb{R}^n$の多面体$\mathcal{P}$

$\mathcal{P}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n | A_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1,\ A_2\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{b}_2\}$

3次元平面を$\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3|(a_1,a_2,a_3)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0,)=b_0\}$と表わせる

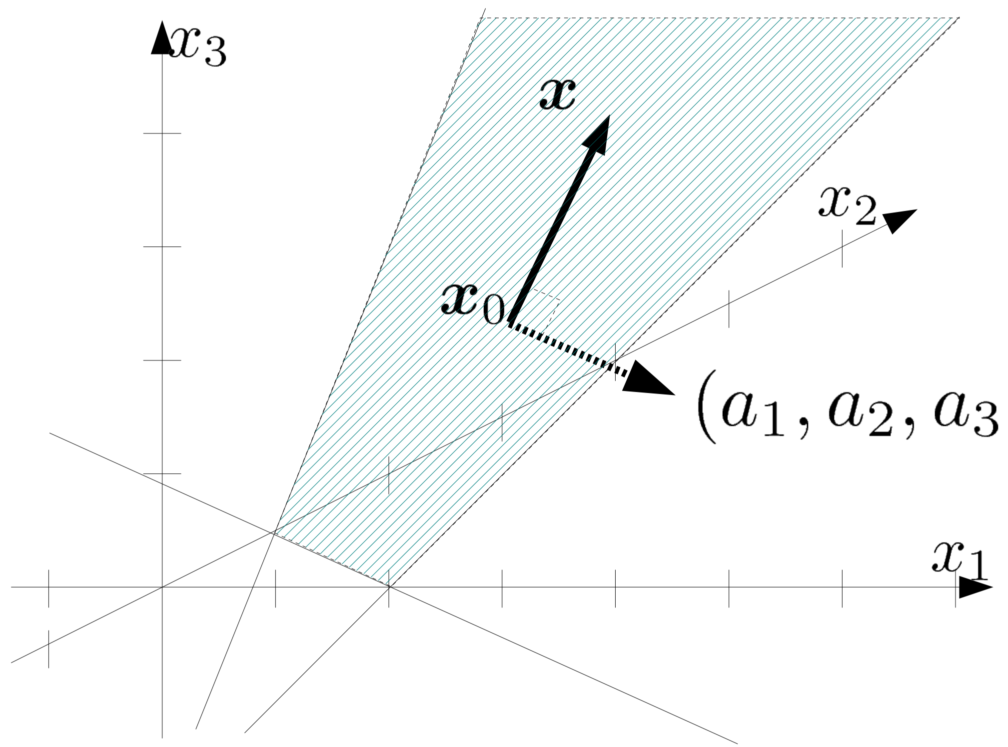
ただし、$\boldsymbol{x}_0,b_0$は$(a_1,a_2,a_3)\boldsymbol{x}_0=b_0$を満たす定数

このとき、

$A_1=(a_1,a_2,a_3),\ \boldsymbol{b}_1=b_0$

$A_2=\mathrm{O},\ \boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{0}$

とすれば、多面体の定義により、この平面を定めることができる。



復習：線形計画問題と多面体

定義：n次元実ベクトル空間$\mathbb{R}^n$の多面体$\mathcal{P}$

$\mathcal{P}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n | A_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1,\ A_2\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{b}_2\}$

3次元平面とは逆に

$A_1=\boldsymbol{b}_1=\mathbf{0}, A_2=(a_1,a_2,a_3),$

$\boldsymbol{b}_2=b_0$ならば(但し$A_2\boldsymbol{x}_0=b_0$)

$\mathcal{P}=$

$\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3|(a_1,a_2,a_3)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\leqq 0\}$

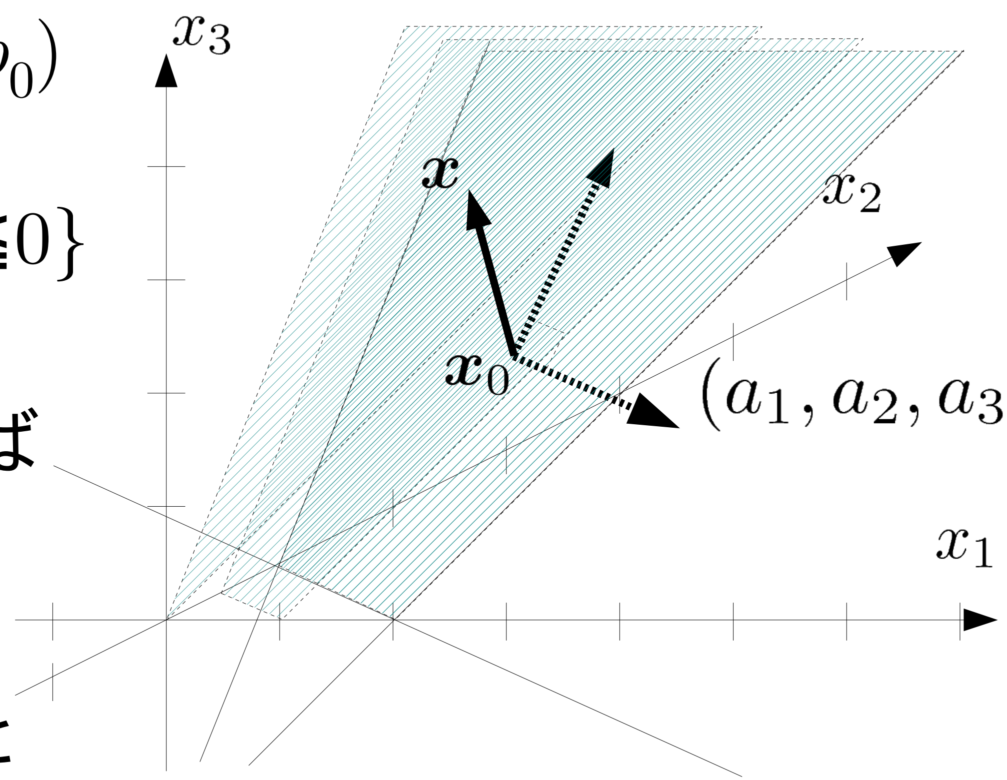
法線(a_1,a_2,a_3)とベクトル

$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$のなす角を$\theta$とすれば

$|(a_1,a_2,a_3)||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\cos\theta\leqq 0$

$\therefore\ \theta\geqq\pi/2$ なので

$\mathcal{P}$は平面$A_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$の法線とは反対側の全ての点からなる多面体となる。



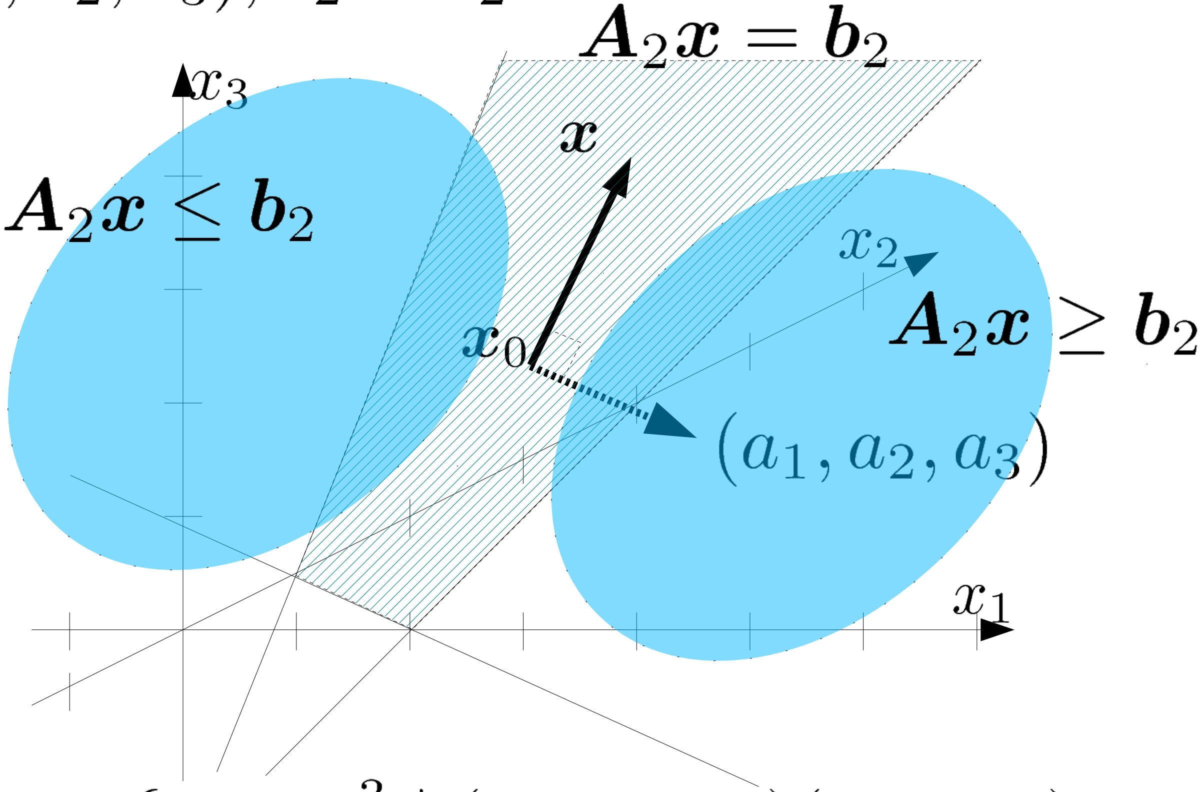
復習：線形計画問題と多面体

定義：n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体：

$$\boldsymbol{A}_2 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_2 = b_2$$



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

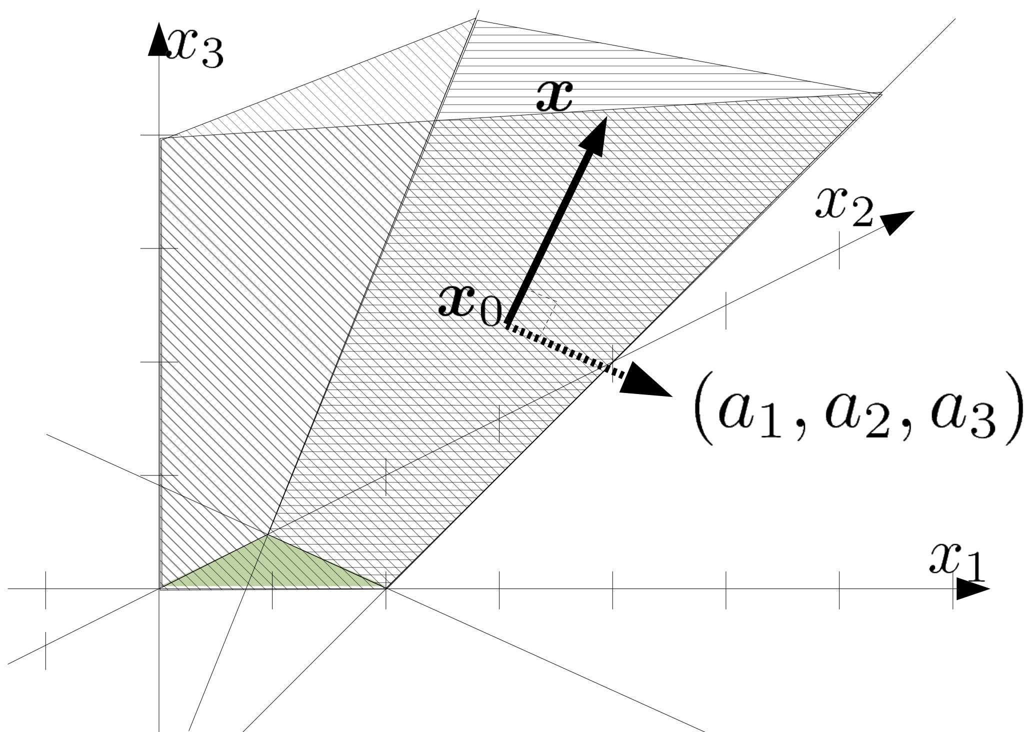
復習:線形計画問題と多面体

定義:n次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \cancel{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1}, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元領域を2分する多面体:

$$\boldsymbol{A}_2 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_2 = b \qquad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_0 = b$$



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \le 0\}$$

復習:線形計画問題と多面体

定義: n次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \cancel{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1}, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_2\}$$

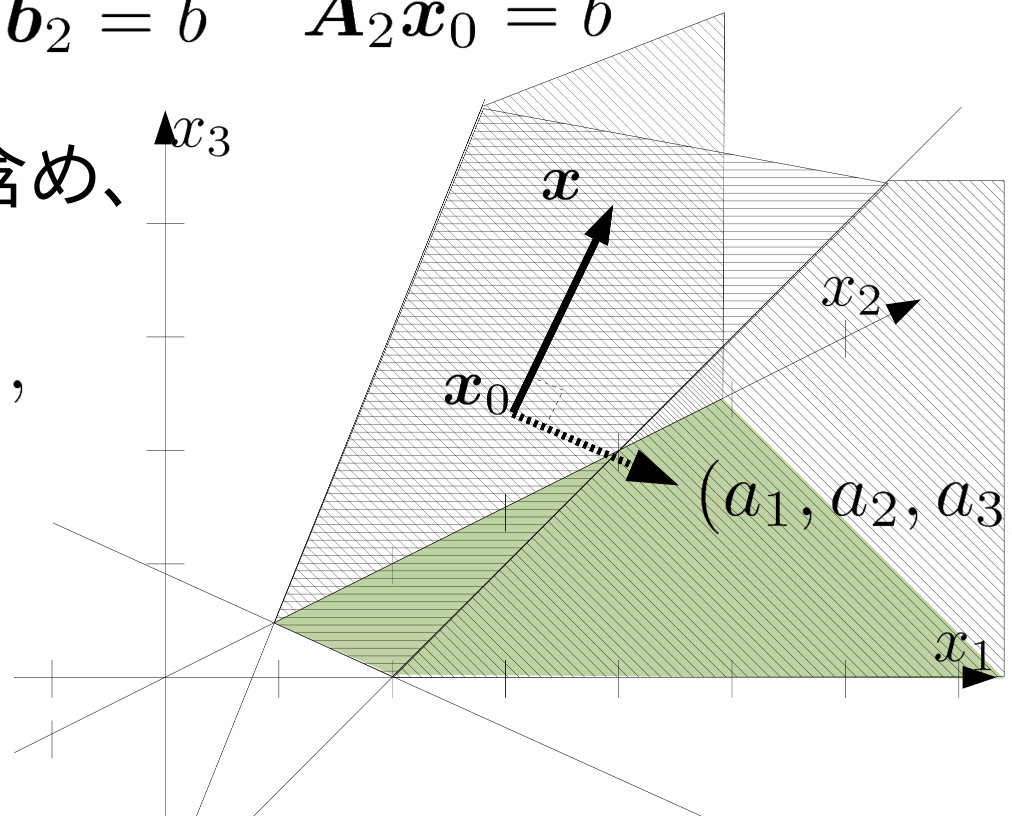
3次元領域を2分する多面体:

$$\boldsymbol{A}_2 = -(a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_2 = b \qquad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_0 = b$$

正確には非負条件も含め、

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -(a_1, a_2, a_3) \\ -\boldsymbol{I} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} b \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid -(a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \le 0\}$$

復習：線形計画問題と多面体

定義：n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \cancel{\boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2}\}$$

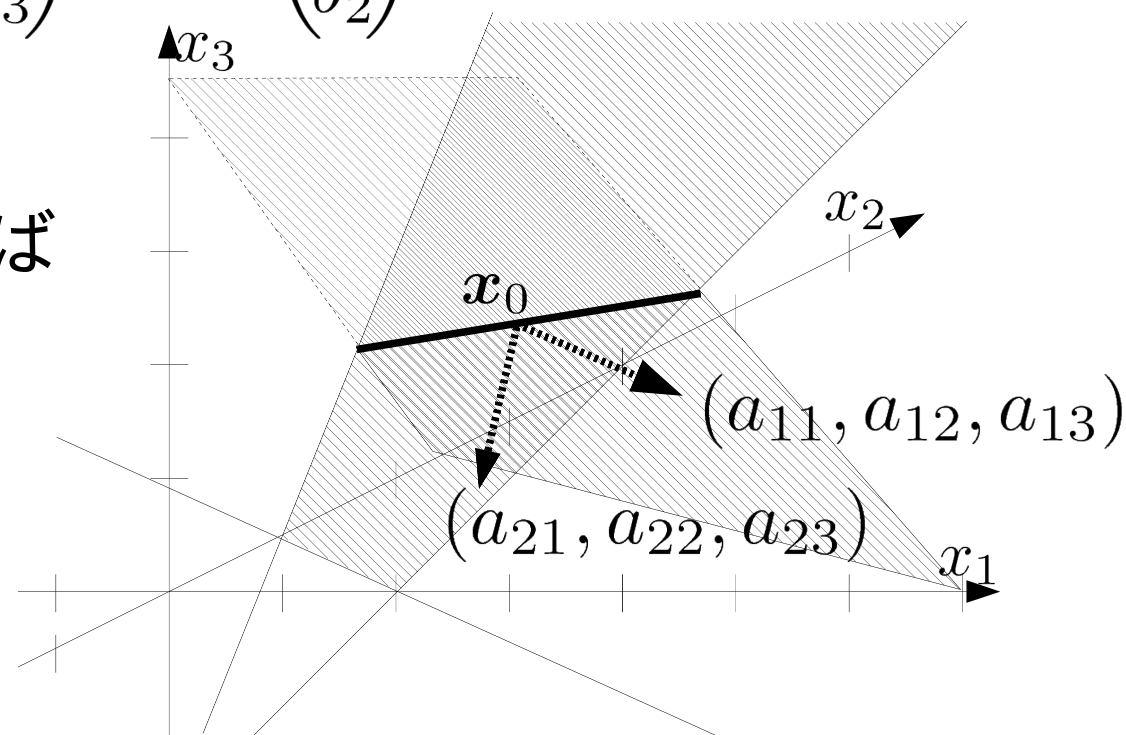
3次元の直線を構成する多面体：

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}_1$$

非負条件を入れれば

線分になる



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{pmatrix} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

復習：線形計画問題と多面体

定義：n次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \cancel{\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_2}\}$$

3次元の直線を構成する多面体：

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}_1$$

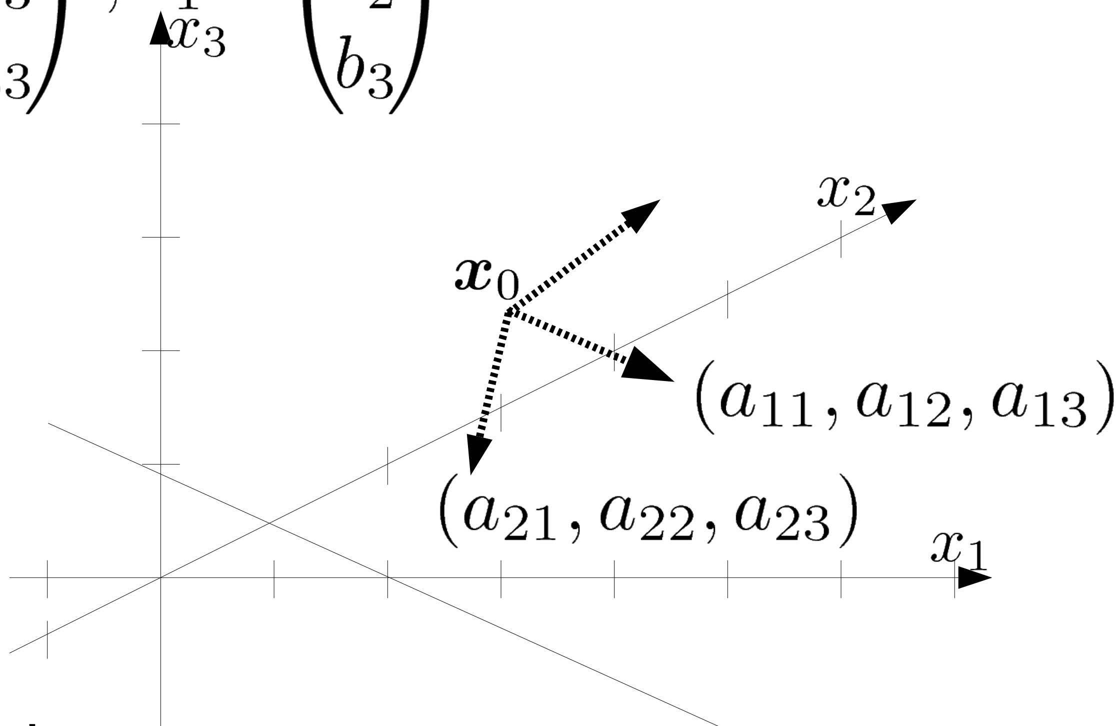
3つのベクトル

$$(a_{11}, a_{12}, a_{13})$$
$$(a_{21}, a_{22}, a_{23})$$
$$(a_{31}, a_{32}, a_{33})$$

が一次独立なら

$$\det \boldsymbol{A} \neq 0$$

∴ x_0 が一意に決まる



復習:線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_2\}$$

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{N_1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N_1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_{N_2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_{N_2} \end{pmatrix}$$

多面体を構成する平面の法線ベクトル:

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{N_1}, \boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_{N_2}$$

　不等式標準形の不等式制約の係数に対応する「minimize , subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b}$」のとき、$\boldsymbol{A}$ の行ベクトル毎に平面が考えられる。

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$$

平面 ℓ : $\boldsymbol{a}_\ell^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \ge b_\ell \qquad \ell = 1, \ldots, n$

制約式の構成する多面体

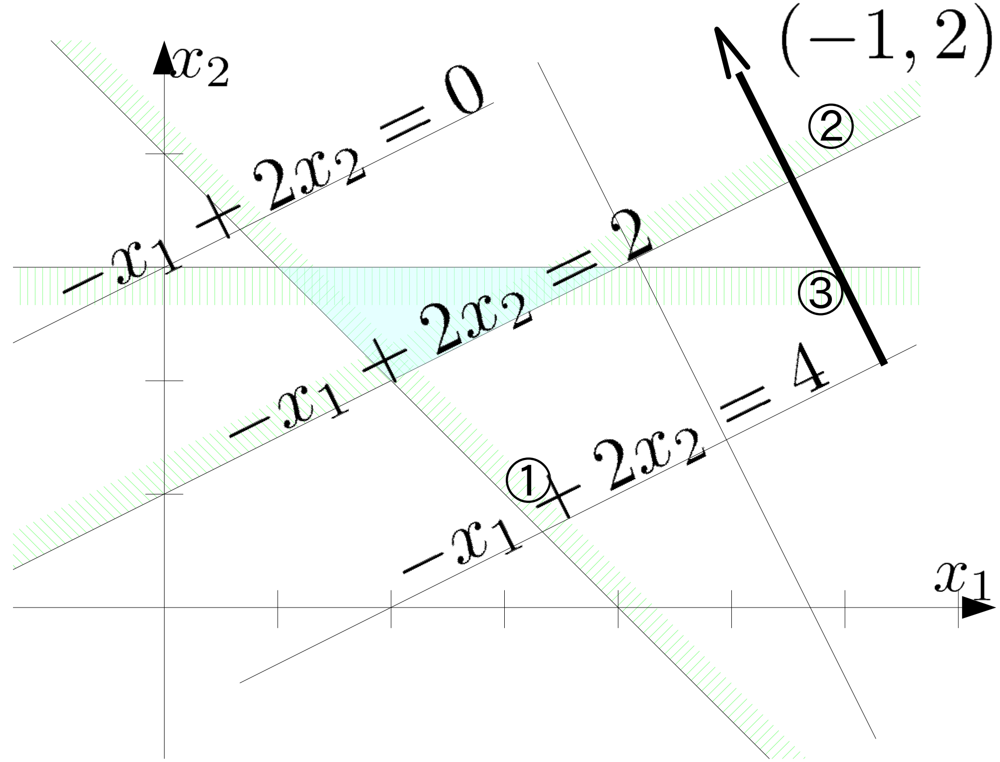
不等式標準形

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\geq 4 & ① \\
-x_1 + 2x_2 &\geq 2 & ② \\
-x_2 &\geq -3 & ③ \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$



等式標準形

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

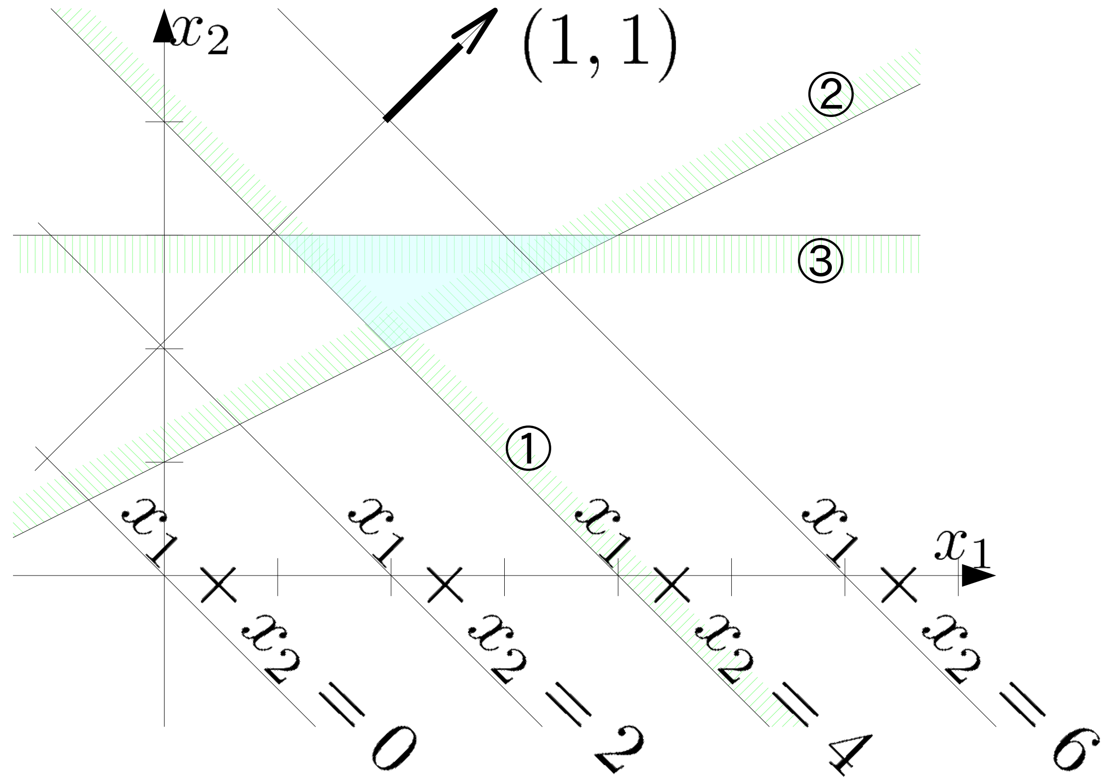
$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - s_1 &= 4 & ① \\
-x_1 + 2x_2 - s_2 &= 2 & ② \\
-x_2 - s_3 &= -3 & ③ \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

主変数が法線ベクトル方向に変化するとスラック変数値が増加する。

制約式の構成する多面体

不等式標準形

```
minimize
```
$$z = x_1 + 2x_2$$
```
subject to
```
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 & ① \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 2 & ② \\ -x_2 &\geq -3 & ③ \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



等式標準形

```
minimize
```
$$z = x_1 + 2x_2$$
```
subject to
```
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - s_1 &= 4 & ① \\ -x_1 + 2x_2 - s_2 &= 2 & ② \\ -x_2 - s_3 &= -3 & ③ \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

主変数が法線ベクトル方向に変化するとスラック変数値が増加する。

制約式の構成する多面体

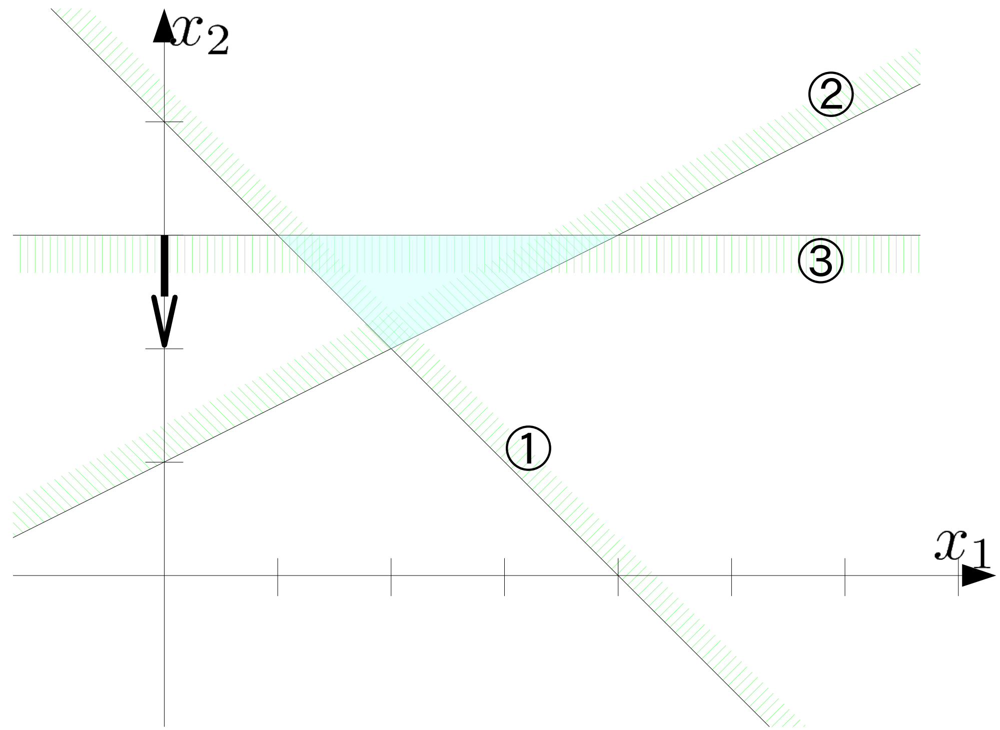
不等式標準形

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 & ① \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 2 & ② \\ -x_2 &\geq -3 & ③ \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



等式標準形

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - s_1 &= 4 & ① \\ -x_1 + 2x_2 - s_2 &= 2 & ② \\ -x_2 - s_3 &= -3 & ③ \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

主変数が法線ベクトル方向に変化するとスラック変数値が増加する。

主問題と双対問題の関係

maximize

$z = 2x_1 + x_2 + x_3$

subject to

$$
\begin{array}{rrrcll}
2x_1 & +2x_2 & -x_3 & \leq & 4 & ① \\
2x_1 & & 4x_3 & \leq & 4 & ② \\
-4x_1 & +3x_2 & -x_3 & \leq & 1 & ③
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

最大化問題

minimize

$w = 4y_1 + 4y_2 + y_3$

subject to

$$
\begin{array}{r}
2y_1 + 2y_2 - 4y_3 \geq 2 \\
2y_1 + 3y_3 \geq 1 \\
-y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 1
\end{array}
$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

最小化問題

最大化問題は、制約式の定める
上界に一番近い実行可能解を探す問題
2つの制約式から分かる上界の例:

$$z \leq (①+②)/2 = 2x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 \leq 4$$

（係数を比較すれば不等式の成立が分かる）

①②③の組み合わせで得られる関係式

$$y_1 \times ① + y_2 \times ② + y_3 \times ③$$

を考える。

$y_1, y_2, y_3 \geqq 0$ であれば、各式の両辺を加えて

$$= (2y_1 + 2y_2 - 4y_3)x_1 + (2y_1 + 3y_3)x_2$$
$$+(-y_1 + 4y_2 - y_3)x_3 \leq (4y_1 + 4y_2 + y_3)$$

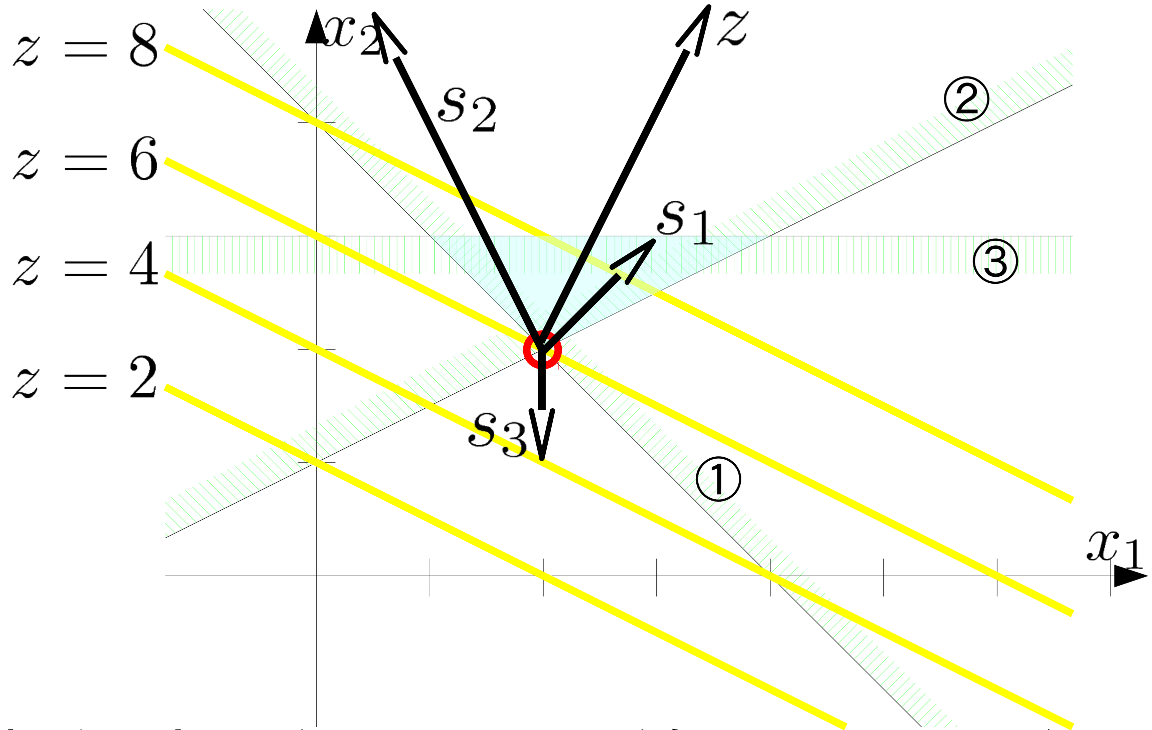
関係式の係数が目的関数の係数より大きければ、

$z \leq 4y_1 + 4y_2 + y_3$ により

目的関数の上界を得ることができる。

このとき、最も厳しい上界を求める問題、
すなわち $4y_1 + 4y_2 + y_3$ の最小化問題が
z の上限を求める問題に対応する。

目的関数の作る平面



不等式標準形

minimize
$$z = x_1 + 2x_2$$
subject to
$$x_1 + x_2 \geq 4 \quad ①$$
$$-x_1 + 2x_2 \geq 2 \quad ②$$
$$-x_2 \geq -3 \quad ③$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

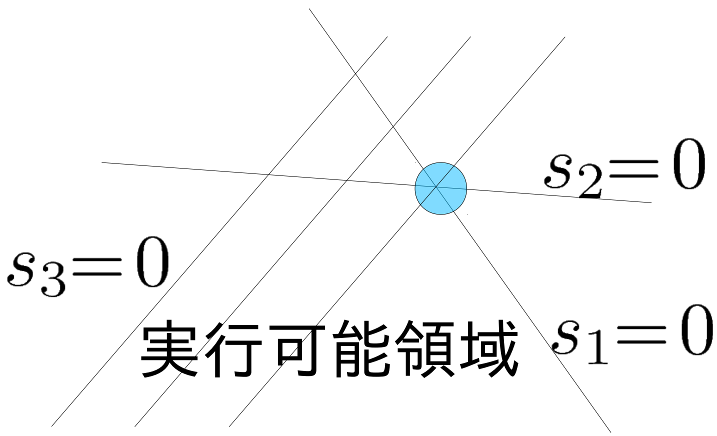
等式標準形

minimize
$$z = x_1 + 2x_2$$
subject to
$$x_1 + x_2 - s_1 = 4 \quad ①$$
$$-x_1 + 2x_2 - s_2 = 2 \quad ②$$
$$-x_2 - s_3 = -3 \quad ③$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

制約式の組合せ=法線ベクトルの組合せ
※目的関数のベクトルと平行にすれば、
双対定理に対応する下限の式が得られる

$$y_1 s_1 + y_2 s_2 \parallel z \rightarrow$$
$$z \geq y_1① + y_2② \geq 4y_1 + 2y_2$$

相補性定理と多面体



minimize
$z = x_1 + 2x_2$
subject to

$$x_1 + x_2 - s_1 = 4 \quad ①$$
$$-x_1 + 2x_2 - s_2 = 2 \quad ②$$
$$-x_2 - s_3 = -3 \quad ③$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

主変数が2つの平面の交点に対応する値をとる

→対応するスラック変数値はゼロ、他のスラック変数値は正

→目的関数を制限する不等式の係数＝双対変数は正、他の制約式の係数はゼロ