

2014数理計画法

第2回：線形計画問題の標準形

復習

数理計画法 = 数理計画問題 - 問題 + 法

数理計画問題

maximize $z = f(x_1, \dots, x_n)$
subject to $g(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (x_1, \dots, x_n)^T \in X$

与えられた制約式のもとである関数を最大化する問題

線形計画問題

$f(x_1, \dots, x_n)$ や $g(x_1, \dots, x_n)$ が線形な場合

線形計画法 = 線形計画問題 - 問題 + 法

グラフを利用した解法
グラフの交点を総当たりする解法

復習

線形計画問題の素朴な解法

グラフを用いた解法

1. 制約式に対応するグラフを描き
2. グラフを境界とする実行可能領域を求める
3. 目的関数に対応するグラフを描き
4. 目的関数値を増やす(減らす)方向を調べる
5. 実行可能領域の端点から最適解を選ぶ

交点を総当たりする解法

1. 制約式に対応するグラフの方程式を全て求める
2. 方程式の組合せで定まる交点を全て求める
3. 全ての交点の実行可能性を調べる
4. 実行可能な交点の目的関数値を求め最適解を選ぶ

復習：練習問題1

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

上記の最適化問題について、
課題1：maximize ... subject to ... の形式で
線形計画問題を表現しなさい。

課題2：グラフを用いる解法・交点を総当たりする解法
で最適解を求めなさい。

課題3：授業の感想・意見があれば書いてください。

復習：練習問題1

A4用紙を横に使う、左上に名前・学年・学籍番号を記入

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

まず変数を定義、
問題の表現と自然
に対応し、誤り難い
選択をする
「求められている値
=生産量」

珈琲飲料の1日当り生産量を $x_1 \times 100$ [g] とする
珈琲牛乳の1日当り生産量を $x_2 \times 100$ [g] とする

復習：練習問題1

A4用紙を横に使う、左上に名前・学年・学籍番号を記入

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

次に制約式を導出、
問題に示された制限を定義した変数で表現する
例：「珈琲原液の最大供給量制限」

珈琲飲料の1日当り生産量を $x_1 \times 100$ [g] とする
珈琲牛乳の1日当り生産量を $x_2 \times 100$ [g] とする
↑の生産に要する珈琲原液の1日当り消費量

$$= x_1 \times 15 \text{ [g]} + x_2 \times 11 \text{ [g]}$$

∴制約式は、

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

同様にして

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

復習：練習問題1

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

問題に明示されない制限に注意する

例：「負の生産量
はありえない」

珈琲飲料の1日当り生産量を $x_1 \times 100$ [g] とする

珈琲牛乳の1日当り生産量を $x_2 \times 100$ [g] とする

原材料供給制限
にもとづく制約式

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\leq 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 &\leq 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 &\leq 1800 \times 10^3 \end{aligned}$$

生産量は正なので

$$x_1, x_2 \geq 0$$

復習：演習問題1

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

上記の最適化問題について、
課題1：maximize ... subject to ... の形式で
線形計画問題を表現しなさい。

課題2：グラフを用いる解法・交点を総当たりする解法
で最適解を求めなさい。

課題3：授業の感想・意見があれば書いてください。

課題2 グラフを利用した解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

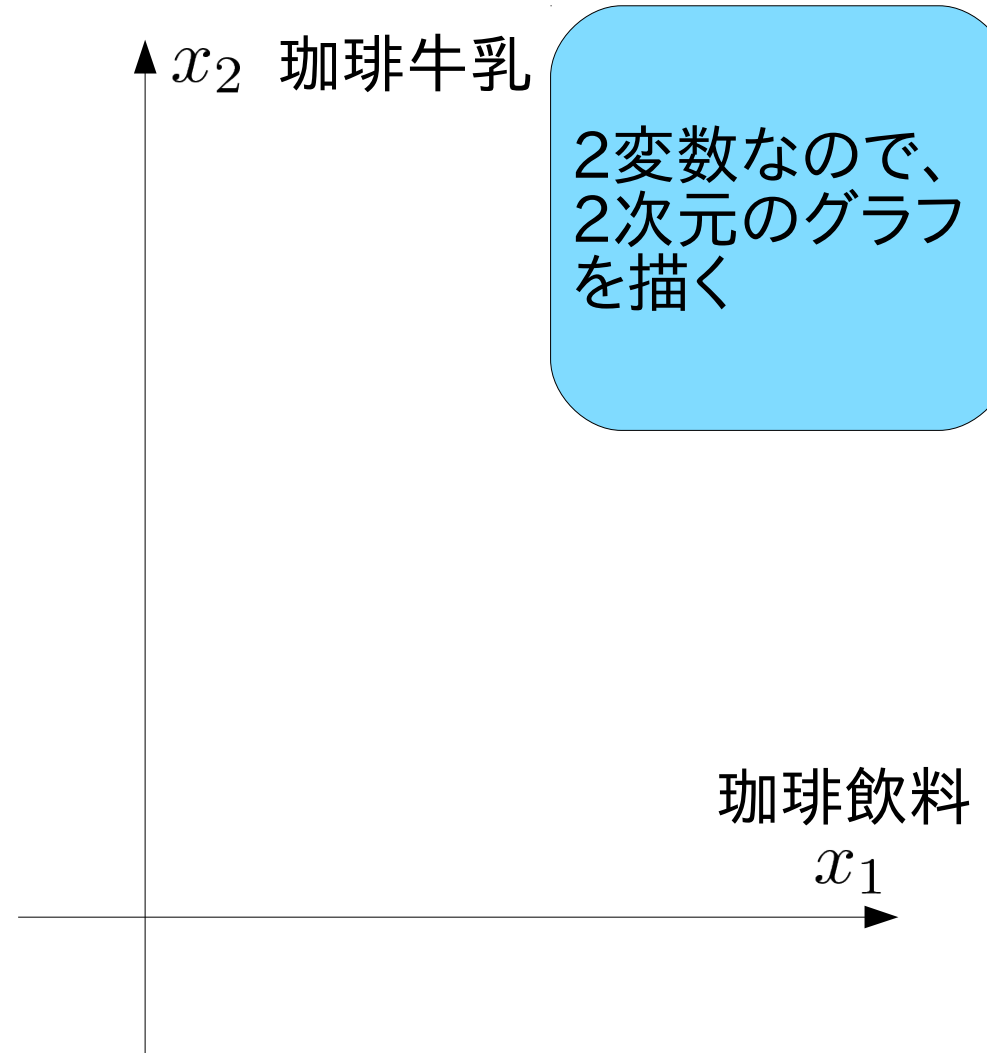
$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



課題2 グラフを利用した解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

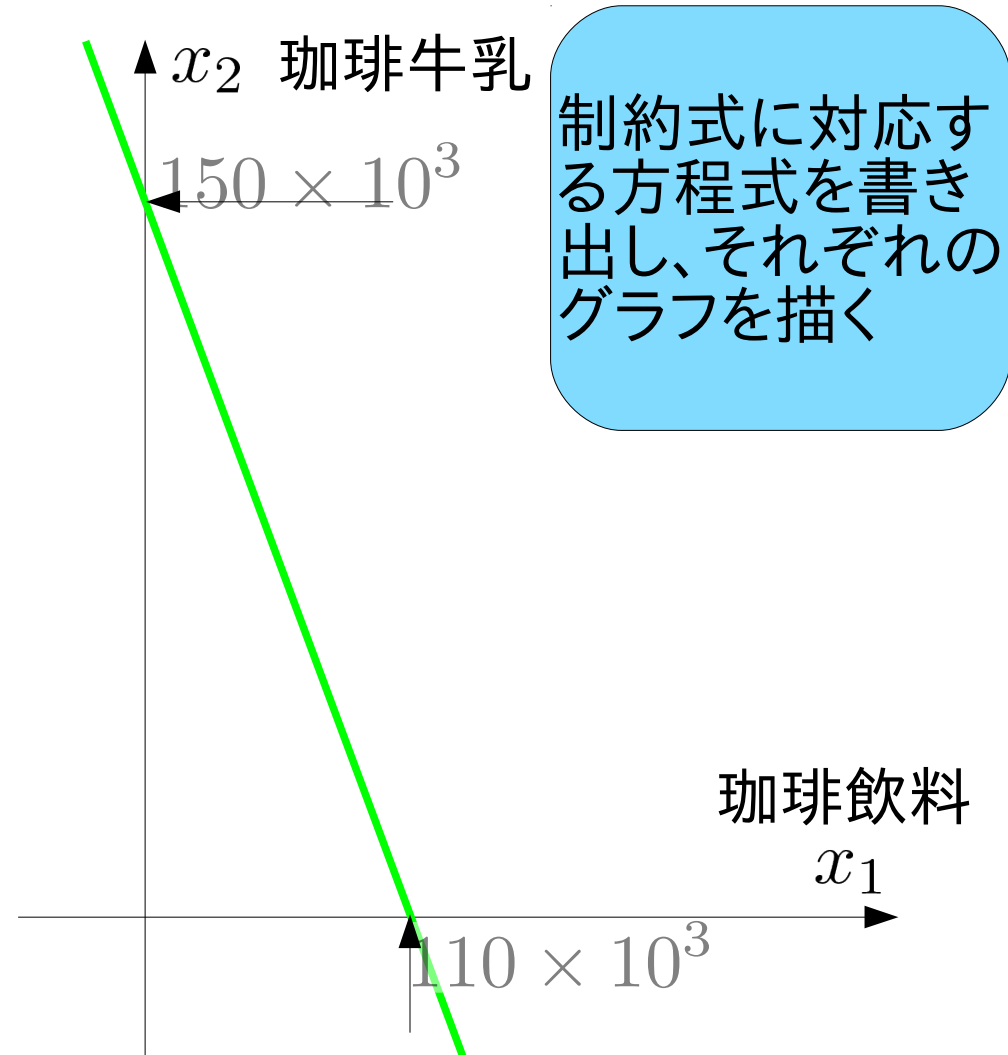
$$\textcircled{1} 15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$$

$$\textcircled{2} 10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$$

$$\textcircled{3} 9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$$

$$\textcircled{4} x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} x_2 = 0$$



課題2 グラフを利用した解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

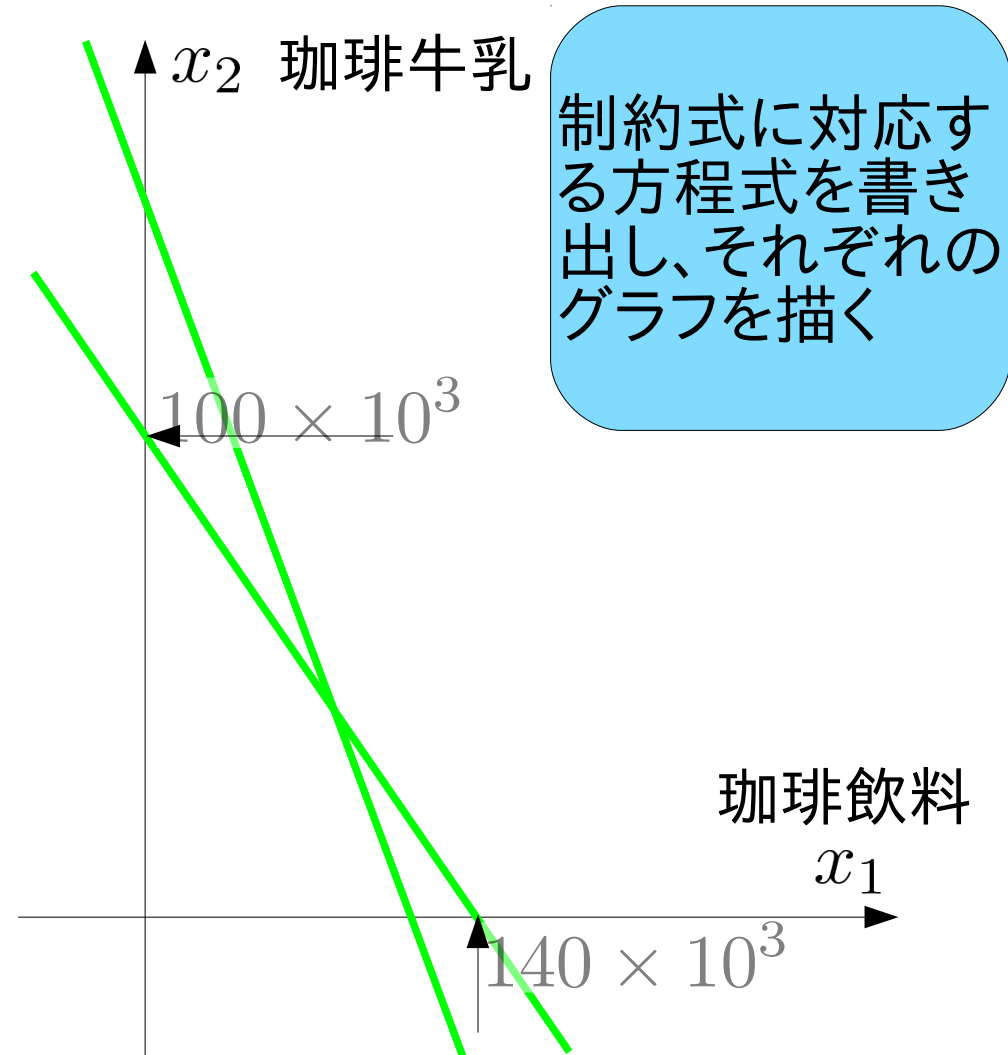
① $15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$

② $10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$

③ $9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$

④ $x_1 = 0$

⑤ $x_2 = 0$



課題2 グラフを利用した解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

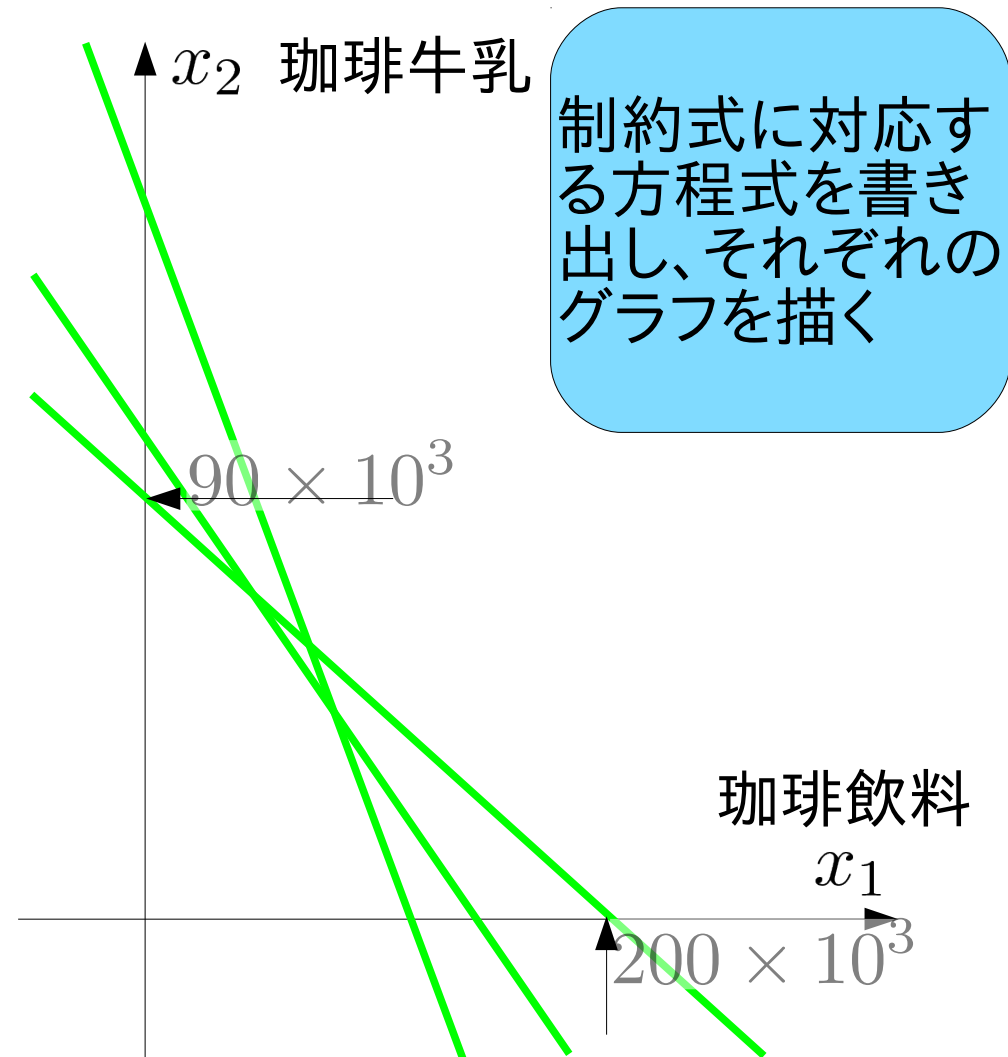
$$\textcircled{1} 15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$$

$$\textcircled{2} 10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$$

$$\textcircled{3} 9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$$

$$\textcircled{4} x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} x_2 = 0$$



課題2 グラフを利用した解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

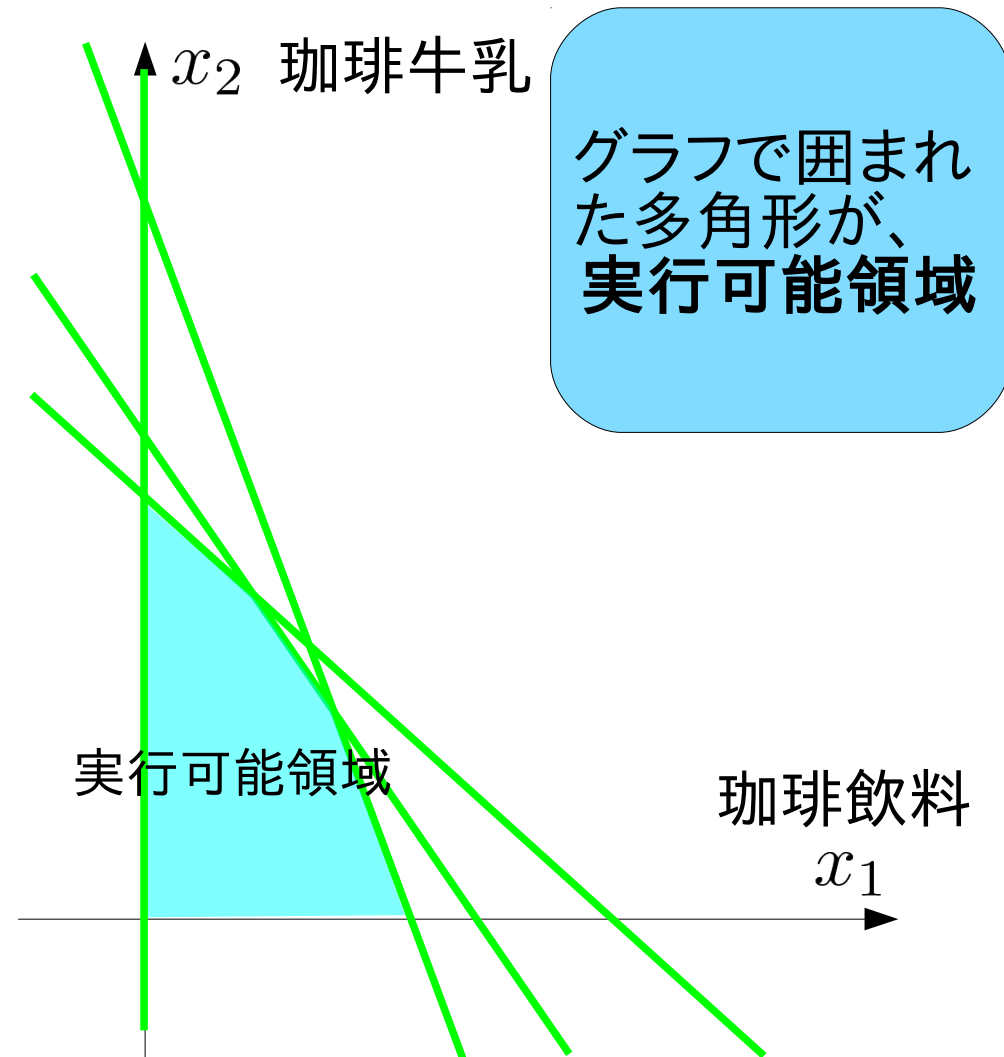
$$\textcircled{1} \quad 15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$$

$$\textcircled{2} \quad 10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$$

$$\textcircled{3} \quad 9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$$

$$\textcircled{4} \quad x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} \quad x_2 = 0$$



課題2 グラフを利用した解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

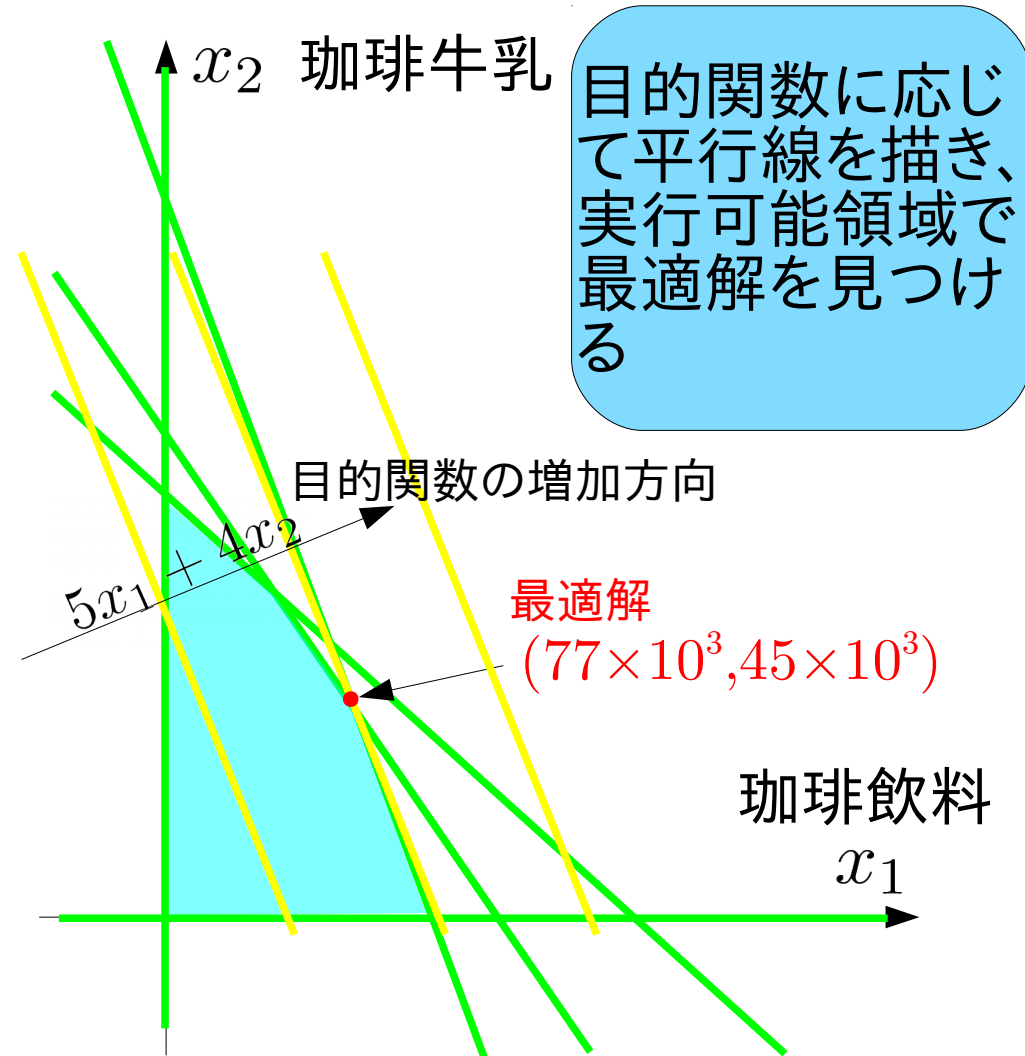
$$\textcircled{1} \quad 15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$$

$$\textcircled{2} \quad 10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$$

$$\textcircled{3} \quad 9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$$

$$\textcircled{4} \quad x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} \quad x_2 = 0$$



課題2 グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

$$\textcircled{1} \quad 15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$$

$$\textcircled{2} \quad 10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$$

$$\textcircled{3} \quad 9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$$

$$\textcircled{4} \quad x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} \quad x_2 = 0$$

方程式	x_1	x_2	実行可能?	目的関数値
①②	77×10^3	45×10^3	○	
①③	65.6×10^3	60.4×10^3	×	
①④	0	150×10^3	×	
①⑤	110×10^3	0	○	
②③	37.8×10^3	73.0×10^3	○	
②④	0	100×10^3	×	
②⑤	140×10^3	0	×	
③④	0	90×10^3	○	
③⑤	200×10^3	0	×	
④⑤	0	0	○	

交点を制約式に代入し、全ての交点の実行可能性を調べる

課題2 グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

$$\textcircled{1} \quad 15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$$

$$\textcircled{2} \quad 10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$$

$$\textcircled{3} \quad 9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$$

$$\textcircled{4} \quad x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} \quad x_2 = 0$$

方程式	x_1	x_2	実行可能?	目的関数値
①②	77×10^3	45×10^3	○	565×10^3
①③	65.6×10^3	60.4×10^3	×	
①④	0	150×10^3	×	
①⑤	110×10^3	0	○	550×10^3
②③	37.8×10^3	73.0×10^3	○	481×10^3
②④	0	100×10^3	×	
②⑤	140×10^3	0	×	
③④	0	90×10^3	○	360×10^3
③⑤	200×10^3	0	×	
④⑤	0	0	○	0

実行可能な交点における目的関数値を求める

課題2 グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

$$\textcircled{1} \quad 15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$$

$$\textcircled{2} \quad 10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$$

$$\textcircled{3} \quad 9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$$

$$\textcircled{4} \quad x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} \quad x_2 = 0$$

方程式	x_1	x_2	実行可能?	目的関数値
①②	77×10^3	45×10^3	○	565×10^3
①③	65.6×10^3	60.4×10^3	×	
①④	0	150×10^3	×	
①⑤	110×10^3	0	○	550×10^3
②③	37.8×10^3	73.0×10^3	○	481×10^3
②④	0	100×10^3	×	
②⑤	140×10^3	0	×	
③④	0	90×10^3	○	360×10^3
③⑤	200×10^3	0	×	
④⑤	0	0	○	0

目的関数最適化の条件に合う
最適解を見つける

課題2 グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

$$\textcircled{1} \quad 15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$$

$$\textcircled{2} \quad 10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$$

$$\textcircled{3} \quad 9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$$

$$\textcircled{4} \quad x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} \quad x_2 = 0$$

方程式	x_1	x_2	実行可能?	目的関数値
$\textcircled{1}\textcircled{2}$	77×10^3	45×10^3	○	565×10^3
$\textcircled{1}\textcircled{3}$	65.6×10^3	60.4×10^3	×	
$\textcircled{1}\textcircled{4}$	0	150×10^3	×	
$\textcircled{1}\textcircled{5}$	110×10^3	0	○	550×10^3
$\textcircled{2}\textcircled{3}$	37.8×10^3	73.0×10^3	○	481×10^3
$\textcircled{2}\textcircled{4}$	0	100×10^3	×	
$\textcircled{2}\textcircled{5}$	140×10^3	0	×	
$\textcircled{3}\textcircled{4}$	0	90×10^3	○	360×10^3
$\textcircled{3}\textcircled{5}$	200×10^3	0	×	
$\textcircled{4}\textcircled{5}$	0	0	○	0

最適解 : コーヒ飲料 77kg
 コーヒー牛乳 45kg

最適値 : 565千円

「素朴な解法」の問題点と解決法

- グラフを用いた解法
 - 2～3変数までの問題に適用可能
 - 計算機アルゴリズムとして構成し難い
- 交点を総当たりする解法
 - 多変数の問題に適用可能
 - 交点の実行可能性を調べる手間がある
 - 変数が増えると無駄な交点計算が増える
- 単体法 (シンプレックス法、Simplex Method)
G. B. Danzig (1947)
 - 問題を標準化し、規則にしたがって表に変換する。
 - 決められた手順で表を更新して最適解を見つける。

線形計画問題の標準化

- 不等式標準形
 - 目的関数は最小化される
 - 制約式は「左辺に変数と係数 \geq 右辺に定数のみ」
 - 全ての変数は非負
- 等式標準形
 - 目的関数は最小化される
 - 制約式は「左辺に変数と係数 $=$ 右辺に定数のみ」
 - 全ての変数は非負
- シンプレックス表

等式標準形の制約式から左辺の係数、右辺の定数、目的関数から左辺の係数を取り表にしたもの

線形計画問題の等式標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数=右辺に定数のみ」
- 全ての変数は非負
- 変数を加えて不等式→等式に書換える
 - 左辺 \leq 右辺→左辺に不足する分を非負変数で補う
 - 左辺 \geq 右辺→左辺が過剰な分を非負変数で減らす

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$-15x_1 - 11x_2 \geq -1650 \times 10^3$$

$$-10x_1 - 14x_2 \geq -1400 \times 10^3$$

$$-9x_1 - 20x_2 \geq -1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

不等式標準形

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$-15x_1 - 11x_2 - x_3 = -1650 \times 10^3$$

$$-10x_1 - 14x_2 - x_4 = -1400 \times 10^3$$

$$-9x_1 - 20x_2 - x_5 = -1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

等式標準形

線形計画問題の等式標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数=右辺に定数のみ」
- 全ての変数は非負
- 不等式標準形で用いた式変形に加え、
- 変数を追加して、不等式を等式と追加変数の非負条件で置換える
 - 左辺 \leq 右辺 \rightarrow 左辺に不足する分を非負変数で補う

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \quad 9x_1 + 20x_2 + x_3 = 1800$$
$$x_3 \geq 0$$

- 左辺 \geq 右辺 \rightarrow 左辺が過剰な分を非負変数で減らす

$$9x_1 + 20x_2 \geq 1800 \quad 9x_1 + 20x_2 - x_4 = 1800$$
$$x_4 \geq 0$$

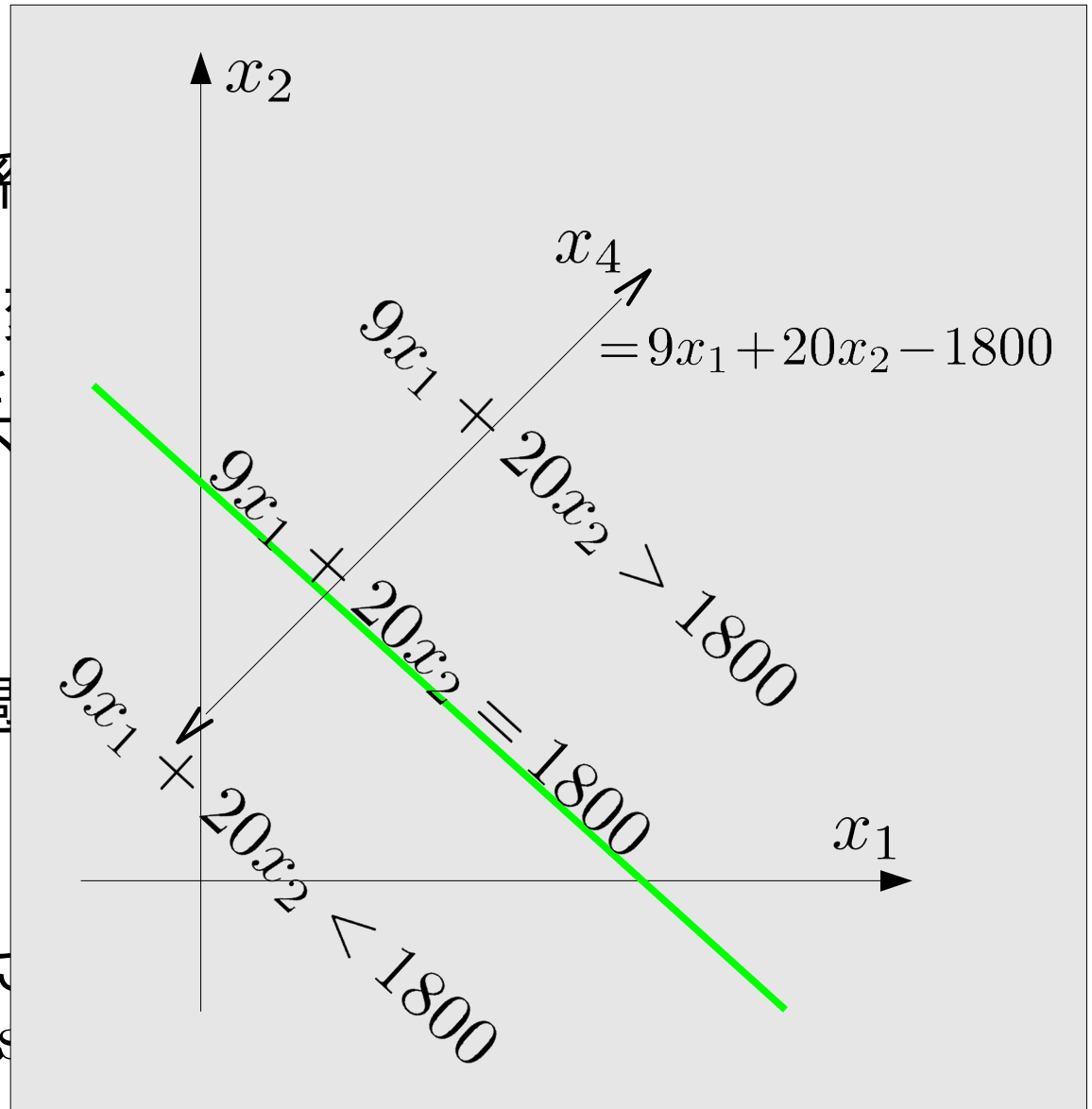
※元の不等式の成否は追加された変数の非負条件に対応する。

※ x_3 をslack変数、 x_4 をsurplus変数と呼ぶこともある。

線形計画問題の等式標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数」
- 全ての変数は非負
- 不等式標準形で用いた式
- 変数を追加して、不等式を
 - 左辺 \leq 右辺 \rightarrow 左辺に不足変数 x_3 を追加
 $9x_1 + 20x_2 + x_3 = 1800$
 - 左辺 \geq 右辺 \rightarrow 左辺が過剰
 $9x_1 + 20x_2 - x_4 = 1800$

※元の不等式の成否は追加された変数で決まる
※ x_3 をslack変数、 x_4 をsurplus変数



等式標準形のもとでの総当たり解法

等式標準形

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 + x_3 = 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 + x_4 = 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 + x_5 = 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

1. 3つの方程式で定まる3変数を選ぶ。

2. 連立方程式を解き、変数値を定める。

例: ※ x_3, x_4, x_5 , であれば、 x_1, x_2 を無視して、

$$15x_1 + 11x_2 + x_3 = 1650 \times 10^3 \quad x_1 = 1400 \times 10^3 / 37$$

$$10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3 \quad x_2 = 2700 \times 10^3 / 37$$

$$9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3 \quad x_3 = 10350 \times 10^3 / 37$$

3. 全ての組合せに対して実行し、最適値・最適解を探す

等式標準形のもとでの総当たり解法

x_1 [$\times 10^3$]	x_2 [$\times 10^3$]	x_3 [$\times 10^3$]	x_4 [$\times 10^3$]	x_5 [$\times 10^3$]	条件	目的関数 [$\times 10^3$]
		1650	1400	1800		0
	150		-700	-1200	×	
	100	550		-200	×	
	90	660	140			-360
110			300	810		-550
140		-450		540	×	
200		-1350	-600		×	
77	45			207		-565
4400/67	4050/67		-6900/67		×	
1400/37	2700/37	10350/37				-481.08

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

※元の不等式制約には変数の非負条件が対応するので、
 全ての変数が非負の場合だけを考えれば良い

線形計画問題の標準形

等式標準形にもとづく総当たりによる解法

1. 等式制約と変数の数に対応して、
全ての組み合わせの連立方程式を解く
2. 変数の非負条件を満たす解について目的関数を求める
3. 最小(最大)の目的関数値を与える解が最適解となる。

問題点、

- ・ 連立方程式の組み合わせ数が爆発的に増加する
- ・ 不必要な連立方程式も解く必要がある

次回：単体法

次々回：巡回と最小添字規則

演習問題2

所定の用紙に回答を記入し提出してください。

ミックスジュース5Lの生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題:利益を最大化する2種類のミックス
ジュースの生産量は?

課題1: 対応する線形計画問題の不等式標準形を示しなさい。

課題2: 不等式標準形を等式標準形に書換えなさい。

課題3: 総当たりによる解法を用いて最適解を求めなさい。