

等式標準形

minimize

$$z = -5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 + x_3 = 1650000$$

$$10x_1 + 14x_2 + x_4 = 1400000$$

$$9x_1 + 20x_2 + x_5 = 1800000$$

$$z + 5x_1 + 4x_2 = 0$$

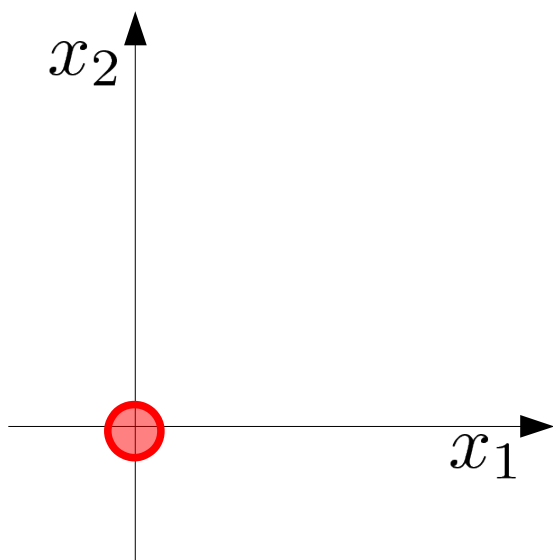
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

等式標準形をもとにして、最初の simplex 表を作る

Z	X1	X2	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

simplex表の操作により単体法を実行する。

Z	基	X1	非	X2	非	X3	基	X4	基	X5	基	定数	最大増加量
			15		11		1					1650000	
			10		14				1			1400000	
			9		20					1		1800000	
	1		5		4							0	



$$\begin{aligned}
 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650000 \\
 10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400000 \\
 9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800000 \\
 z + 5x_1 + 4x_2 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\
 = (0, 0, 0, 1650000, 1400000, 1800000)
 \end{aligned}$$

非基底変数はゼロ、残りの変数は非負でなければならない。今回はOK

# 基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 非	X2 非	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

非基底変数にだけシルシを付ける。  
実際の作業では、これが最初の段階になる。  
以降、基底変数 $\leftrightarrow$ 非基底変数の交換を進める。

# 基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 <del>非</del>	X2 非	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

1. 交換により目的関数が改善(減少)する。

$$z = 0 \rightarrow z + 5x_1 = 0 \text{ or } z + 4x_2 = 0$$

- 係数が正ならば目的関数は改善(減少)する。

今回は  $x_1, x_2$  のいずれとも係数が正なので、どちらでもOK。  
 とりあえず、目的関数が速く減るように大きい方を選ぶこと  
 にして、 $x_1$  の方を非基底変数→基底変数とする。

# 基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 非	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

1. 交換により目的関数が改善(減少)する

次に、 $x_1$  との交換の相手を基底変数の  $x_3, x_4, x_5$  から見つける。  
 交換後に全ての変数が非負条件を満たすものを選ぶ。  
 例えば、 $x_3$  が非基底変数になると現れる等式を考える。

$$x_3 = 1650000 \rightarrow 15x_1 = 1650000$$

- 定数項を係数で割り最大増加量を求める。
- 最小の最大増加量を与える非基底変数を選ぶ。

# 基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 <del>非</del>	X2 非	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
	10	14		1		1400000	$/10 = 140000$
	9	20			1	1800000	$/9 = 200000$
1	5	4				0	

1. 右端に1以外の目的関数係数が改善(減少)する

同様に  $x_3, x_4, x_5$  非基底変数となった場合を考え、 $x_1$ の増加量を比較して、最小の増加量を与える交換を採用する。

2. 交換後も非負条件を満たす。

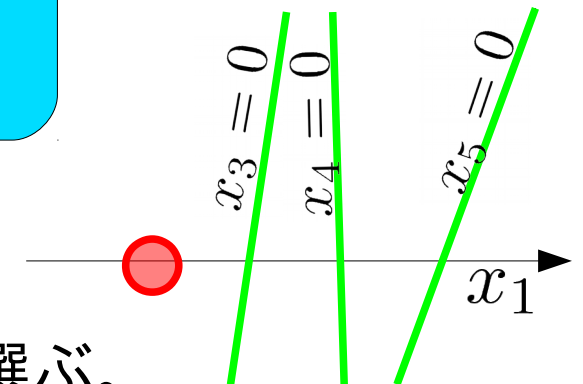
- $x_3 = 1650000 \rightarrow 15x_1 = 1650000$
- 定数項を係数で割り最大増加量を求める。
- 最小の最大増加量を与える非基底変数を選ぶ。

# 基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 <del>非</del>	X2 <del>非</del>	X3 <del>非</del>	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
	10	14		1		1400000	$/10 = 140000$
	9	20			1	1800000	$/9 = 200000$
1	5	4				0	

最小の増加量を与える交換により、新しい交点の実行可能領域外に出ないようにする

- $x_3 = 1650000 \rightarrow 15x_1 = 1650000$
- 定数項を係数で割り最大増加量を求める。
  - 最小の最大増加量を与える非基底変数を選ぶ。



# 基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 <del>非</del>	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
	10	14		1		1400000	$/10 = 140000$
	9	20			1	1800000	$/9 = 200000$
1	5	4				0	

ここまでの作業でsimplex表は上のようになる。  
この状態に対応する連立方程式は

$$\begin{aligned}
 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650000 \\
 10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400000 \\
 9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800000 \\
 z + 5x_1 + 4x_2 &= 0
 \end{aligned}$$

なので、これを解く必要がある。



# 交換後の連立方程式を解く

	Z	X1 非	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
$\times \frac{1}{15}$		<del>15</del>	<del>11</del>	<del>1</del>			<del>1650000</del>	$/15 = 110000$
	1	11/15	1/15				110000	
		10			1		1400000	
		9	20			1	1800000	
	1	5	4				0	

基底変数に関する連立方程式を解き基本解を得る

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 110000 \\
 \cancel{15x_1} &= \cancel{1650000} \\
 10x_1 &+ x_4 = 1400000 \\
 9x_1 &+ x_5 = 1800000 \\
 z + 5x_1 &= 0
 \end{aligned}$$

新たに基底変数となり、ゼロから正に値の変わる  $x_1$  の値を求めるために、 $x_1$  の係数で両辺を割る  
 simplex表では、対応する段の係数を全て割る

# 交換後の連立方程式を解く

	Z	X1 非	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
$\times \frac{1}{15}$		<del>15</del>	<del>11</del>	<del>1</del>			<del>1650000</del>	$/15 = 110000$
	1		$11/15$	$1/15$			110000	
$-\times 10$		<del>10</del>	<del>14</del>		1		<del>1400000</del>	$/10 = 140000$
	0		$20/3$	$-2/3$			300000	
$-\times 9$		<del>9</del>	<del>20</del>			1	<del>1800000</del>	$/9 = 200000$
	1	0	$67/5$	$-3/5$			810000	
$-\times 5$		<del>5</del>	<del>4</del>				<del>0</del>	
	0		$1/3$	$-1/3$			-550000	

基底変数に関する連立方程式を解き基本解を得る

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 110000 \\
 \cancel{10x_1} + x_4 &= \cancel{1400000} \\
 \cancel{9x_1} + x_5 &= \cancel{1800000} \\
 z + 5x_1 &= 0 \\
 z &= -550000
 \end{aligned}$$

$x_4 = 300000$   
 $x_5 = 810000$

前段で得た関係式

$x_1 + (11/15)x_2 + (11/15)x_3 = 110000$   
 を使って他の方程式から  $x_1$  を消去する

# 交換後の連立方程式を解く

	Z	X1 <del>非</del>	X2 <del>非</del>	X3 <del>非</del>	X4	X5	定数	最大増加量
$\times \frac{1}{15}$		<del>1</del>	<del>11</del>	<del>1</del>			<del>1650000</del>	$/15 = 110000$
	1		11/15	1/15			110000	
$-\times 10$		<del>1</del>	<del>11</del>		1		<del>1400000</del>	$/10 = 140000$
	0		20/3	-2/3			300000	
$-\times 9$		<del>1</del>	<del>20</del>			1	<del>1800000</del>	$/9 = 200000$
	0		67/5	-3/5			810000	
$-\times 5$	1	<del>5</del>	<del>4</del>				<del>0</del>	
	0		1/3	-1/3			-550000	

基底変数に関する連立方程式を解き基本解を得る

$$\begin{aligned}
 x_1 + 11x_2 + x_3 &= 110000 \\
 + 14x_2 + x_4 &= 300000 \\
 + 20x_2 + x_5 &= 810000 \\
 z + 4x_2 &= -550000
 \end{aligned}$$

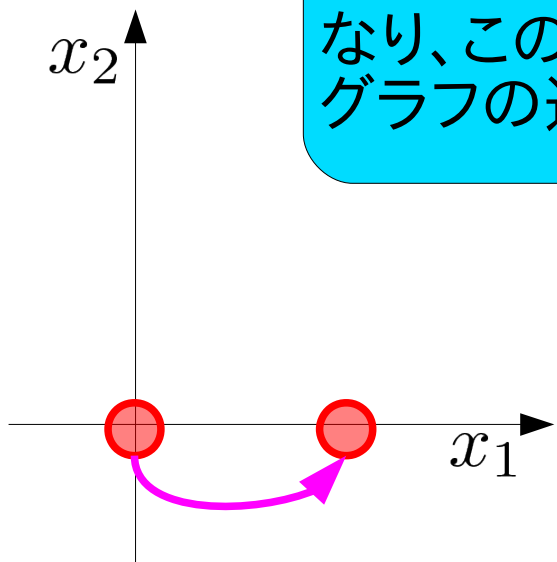
$$(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-550000, 110000, 0, 0, 300000, 810000)$$

simplex表の定数欄に現われた基本解は非負条件を満たす

# 交換後の連立方程式を解く

	Z	X1 非	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
$\times \frac{1}{15}$		<del>6</del>	<del>4</del>	<del>1</del>			<del>1650000</del>	$/15 = 110000$
	1		11/15	1/15			110000	
$-\times 10$		<del>10</del>	<del>4</del>		1		<del>1400000</del>	$/10 = 140000$
	0		20/3	-2/3			300000	
$-\times 9$		<del>9</del>	<del>20</del>			1	<del>1800000</del>	$/9 = 200000$
	0		67/5	-3/5			810000	
$-\times 5$	1	<del>5</del>	<del>4</del>				<del>0</del>	
	0		1/3	-1/3			-550000	

ここまでの作業で、simplex表は上のようになり、このときまでの基本解の移動は左下のグラフの通り



$$\begin{aligned}
 & (z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\
 & = (-550000, 110000, 0, 0, 300000, 810000)
 \end{aligned}$$

# 表を更新する

Z	X1 <del>非</del>	X2 <del>非</del>	X3 <del>非</del>	X4	X5	定数	最大増加量
	<del>1</del>	<del>11/15</del>	<del>1/15</del>			<del>1650000</del> 110000	<del>/15 =</del> 110000
	<del>0</del>	<del>20/3</del>	<del>-2/3</del>	1		<del>1400000</del> 300000	<del>/10 =</del> 140000
	<del>0</del>	<del>67/5</del>	<del>-3/5</del>		1	<del>1800000</del> 810000	<del>/9 =</del> 200000
1	<del>0</del>	<del>1/3</del>	<del>-1/3</del>			<del>0</del> -550000	

$\times \frac{1}{15}$   
 $-\times 10$   
 $-\times 9$   
 $-\times 5$

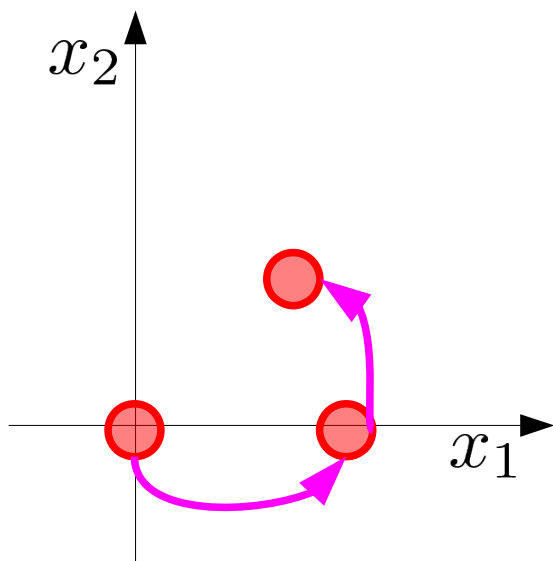
新しい表に書き写して作業を進める。そのまま上書きでも可。

Z	X1	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	1	11/15	1/15			110000	
		20/3	-2/3	1		300000	
		67/5	-3/5		1	810000	
1		1/3	-1/3			-550000	

# 新しい表で基底変数・非基底変数の交換を続ける

	Z	X1	X2 <del>*</del>	X3 非	X4 非	X5	定数	最大増加量
$-\times \frac{11}{15}$			<del>1</del>	<del>11/15</del>	<del>1/15</del>	<del><math>-\frac{11}{100}</math></del>	<del>110000</del>	<del><math>/(11/15) = 150000</math></del>
$\times \frac{3}{20}$			<del>0</del>	<del>7/50</del>	<del><math>-\frac{2}{3}</math></del>	<del><math>\times</math></del>	77000	45000
			1	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$		45000	45000
$-\times \frac{67}{5}$			<del>0</del>	<del>67/5</del>	<del><math>-\frac{3}{5}</math></del>	<del><math>\frac{201}{100}</math></del>	<del>810000</del>	<del><math>/(67/5) = 60447. \dots</math></del>
			0	$-\frac{37}{50}$	$\frac{1}{100}$		207000	60447....
$-\times \frac{1}{3}$		1	<del>0</del>	<del><math>-\frac{1}{3}</math></del>	<del><math>-\frac{1}{3}</math></del>	<del><math>-\frac{1}{20}</math></del>	<del>550000</del>	
			0	$-\frac{9}{30}$	$-\frac{1}{20}$		-565000	

ここまでの作業でsimplex表は上のようになり、目的関数の定義式に現われる非基底変数の係数は全て負になる。



$$(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

$$= (-565000, 77000, 45000, 0, 0, 207000)$$

これ以上改善できないので、この時の基本解が最適解になる。

# 単体法のまとめ

- 最も基本的な単体法による解法

- 1.等式標準形を作り、係数を用いて simplex表を作る。

- 2.slack変数surplus変数から基底変数を選ぶ

- 3.残りの変数を非基底変数とし、以下を繰り返す

- 1.次の条件を満たす基底変数・非基底変数の交換を行う  
目的関数が改善(減少)する  
交換後に基本解が非負条件を満たす

- 2.基底変数の連立方程式を解き基本解を求める

- 4.改善ができなくなったら終了し、その時点の基本解を最適解とする

- 問題点

- 最初の実行可能解を決める方法が欠けている

- 最適解ではないのに目的関数が改善されない場合がある

- 変数選択の候補を限定できない

## 演習問題4

5Lのミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題:利益を最大化するミックスジュースの生産量は?

課題1: simplex 表による単体法を用いて最適解を求めなさい。

課題2: グラフを描き、課題1で辿った端点の経路を示しなさい。

課題3: 授業の感想・意見があれば書いてください