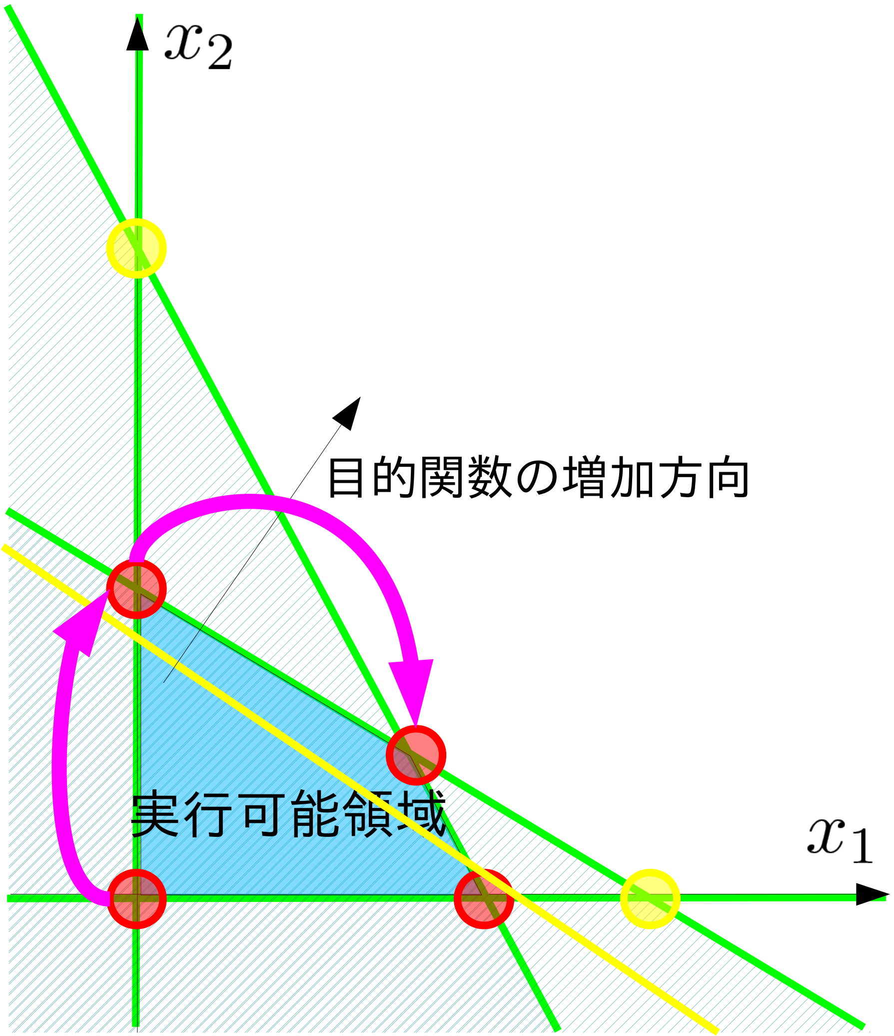
数理計画法

第6回:単体法の2段解法と罰則付単体法

復習:単体法の2段解法による初期基本解の決定



原点が実行可能領域に有る場合

maximize
$600x_1 + 500x_2$
subject to
$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$
$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$
$x_1, x_2 \geq 0$

全変数がゼロ⇒制約式を満たす

⇕

原点が実行可能領域にある

※別の言い方をすれば、
連立不等式に自明解＝ゼロがある

復習：単体法の2段解法による初期基本解の決定

制約式だけを見ると、

不等式制約では

maximize
$$600x_1 + 500x_2$$
subject to
$$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

「全変数がゼロ」で制約式を満たすことが判り易い

⇕

連立不等式に自明解＝ゼロがあることを判断できる

等式標準形にすると、

minimize
$$-600x_1 - 500x_2$$
subject to
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

ゼロにする変数は x_3, x_4 以外

x_3, x_4；追加した変数？

※各式に1つだけの変数

元から等式だったら？

⇕

連立不等式の解が容易に求まるように撰択している

復習：単体法の2段解法による初期基本解の決定

等式制約が与えられた場合、

```
minimize
```
$$-600x_1 - 500x_2$$
```
subject to
```
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45\times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40\times 10^3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

各式に1つだけの変数 x_3, x_4 以外を除いた連立方程式

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45\times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40\times 10^3$$

の解が非負条件を満たすなら

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

単体法の初期基本解となる

非負条件さえ満たせば良いが

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45\times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40\times 10^3$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45\times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40\times 10^3$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45\times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40\times 10^3$$

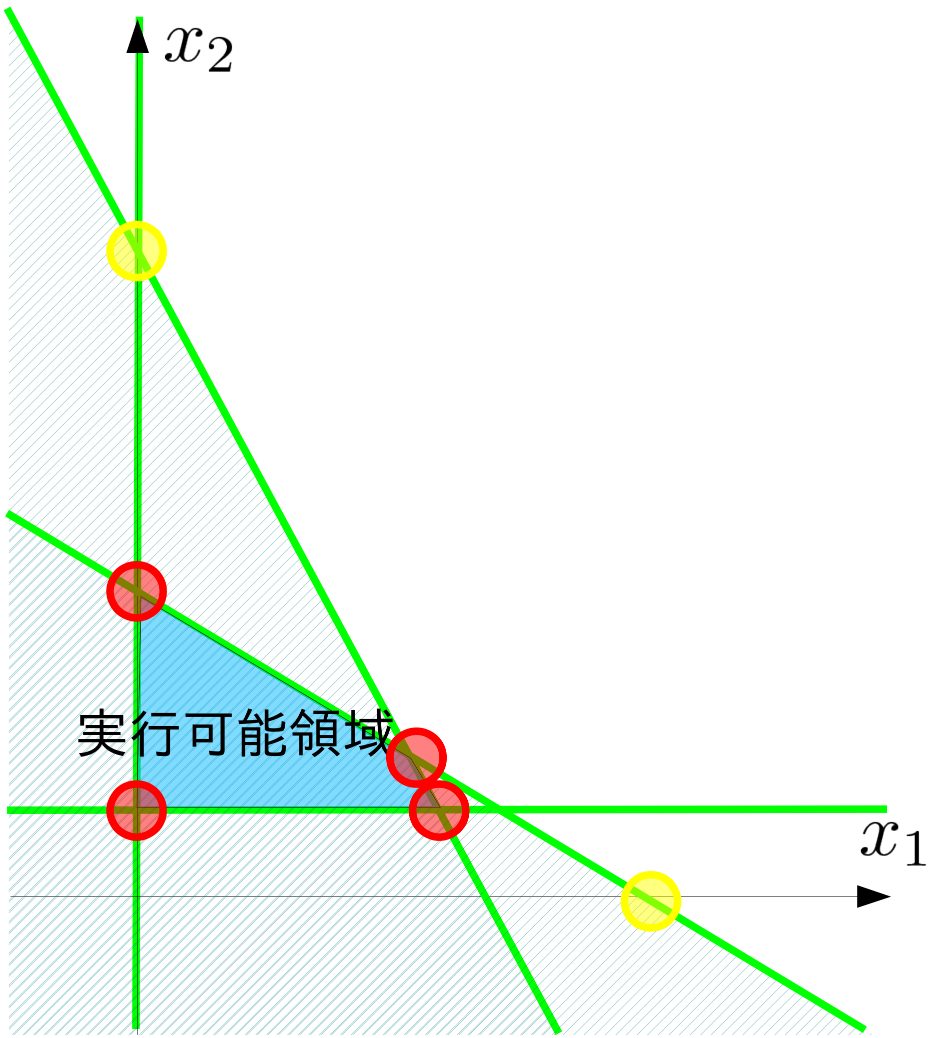
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45\times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40\times 10^3$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45\times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40\times 10^3$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45\times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40\times 10^3$$

連立方程式を解かずに済むもの（⇒原点）を選ぶ

復習：単体法の2段解法による初期基本解の決定



左図の制約式を考える

minimize
$-600x_1 - 500x_2$
subject to
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$
$$x_2 - x_5 = 20 \times 10^3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

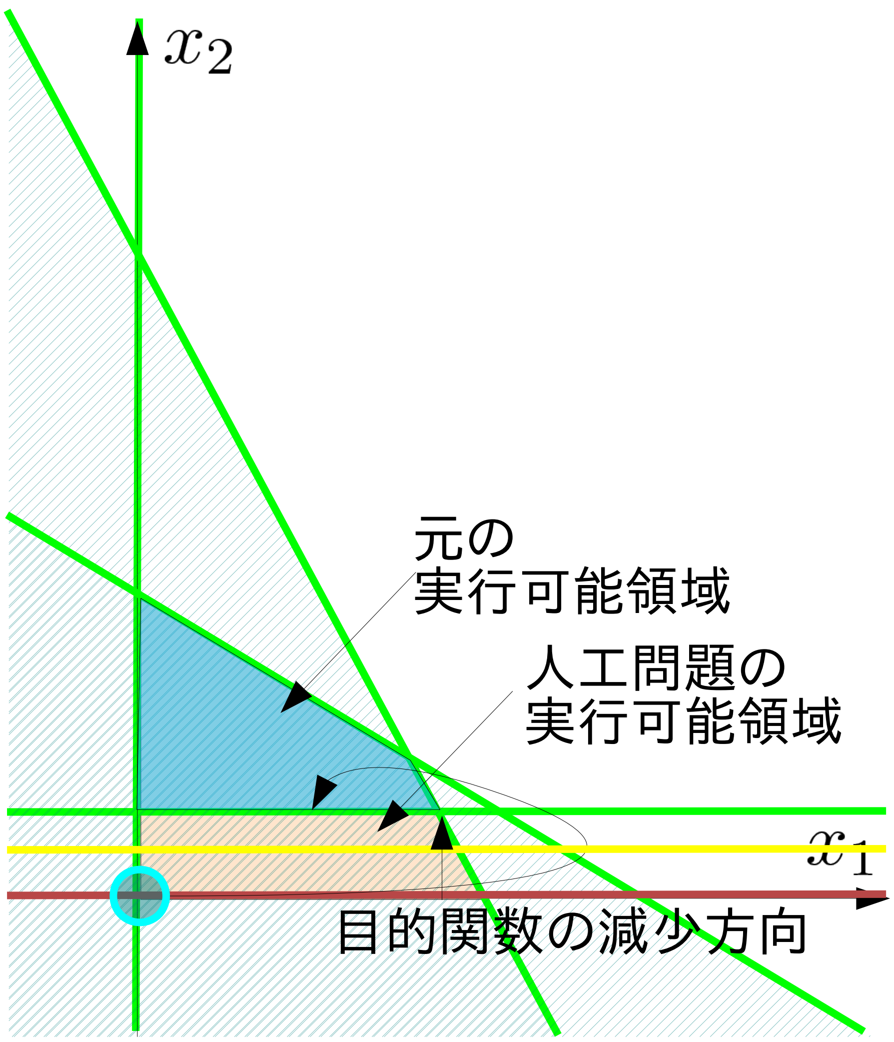
各式1つだけの変数：x_3, x_4, x_5

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$
$$x_2 - x_5 = 20 \times 10^3$$

x_5 が非負条件を満たさない

↑「係数と定数の符号が異なる」

復習:単体法の2段解法による初期基本解の決定

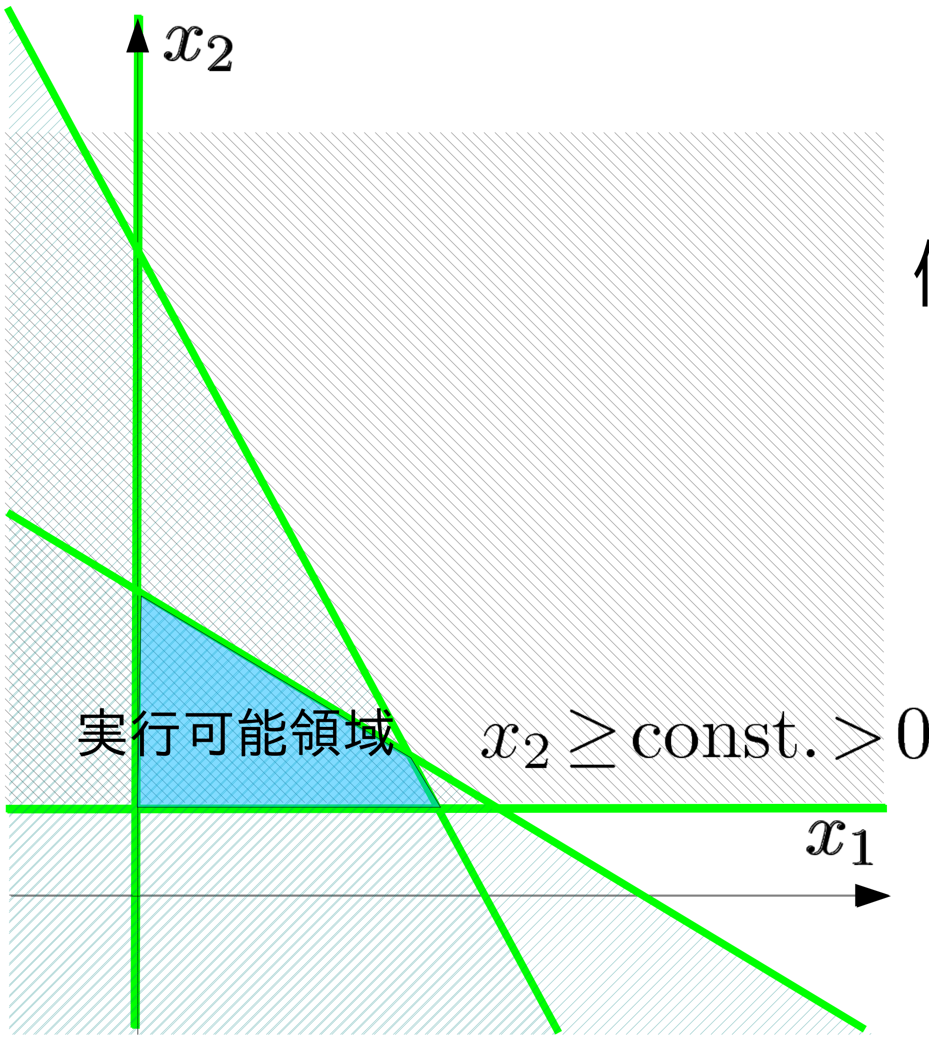


2段階法のアイディア

maximize
$$600x_1 + 500x_2$$
subject to
$$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_2 \geq 10 \times 10^3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1. 制約式を変形し、原点が実行可能領域に含まれるようにする
2. 元の実行可能領域で最小化される目的関数を定める
3. 1と2で作った人工問題を解き、元の問題の端点を求める

復習:単体法の2段解法による初期基本解の決定



原点を実行可能領域外にする制約
　＝変数が負orゼロ

例: $x_2 - x_\mathrm{s} = t > 0$

$x_2 = 0 \rightarrow x_\mathrm{s} = -t < 0$

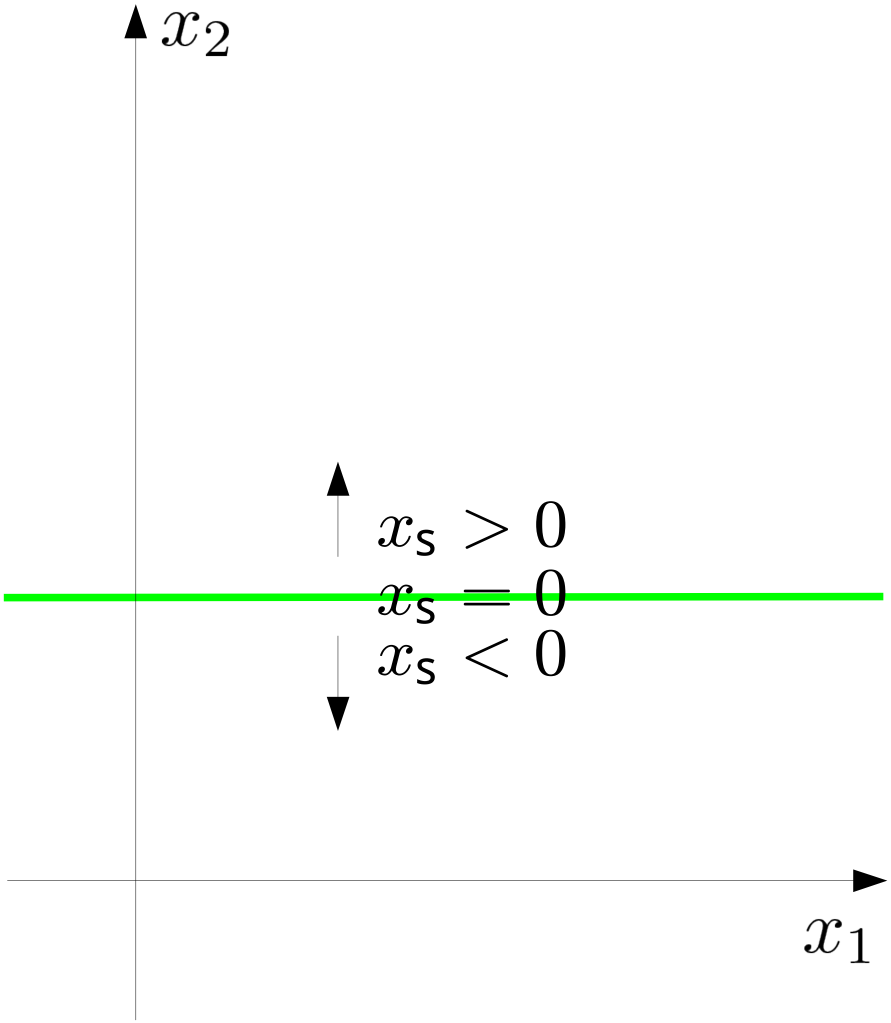
変数を追加して非負条件を満たす

例: $x_2 - x_\mathrm{s} + x_\mathrm{a} = t > 0$

$x_2 = 0 \rightarrow x_\mathrm{s} = x_\mathrm{a} - t$

$\therefore x_\mathrm{a} > t > 0 \Rightarrow x_\mathrm{s} = x_\mathrm{a} - t > 0$

復習:単体法の2段解法による初期基本解の決定



原点を実行可能領域外にする制約
＝変数が負orゼロ

例: $x_2 - x_s = t > 0$

$x_2 = 0 \rightarrow x_s = -t < 0$

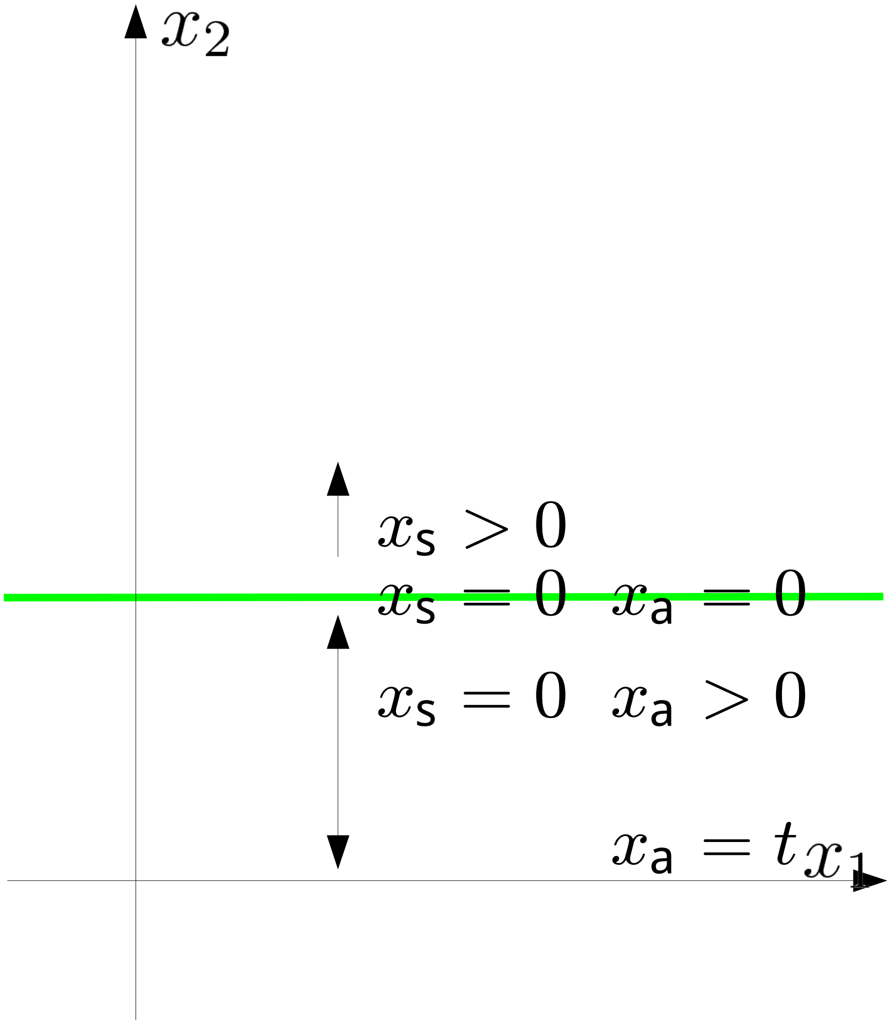
変数を追加して非負条件を満たす

例: $x_2 - x_s + x_a = t > 0$

$x_2 = 0 \rightarrow x_s = x_a - t$

$\therefore x_a > t > 0 \Rightarrow x_s = x_a - t > 0$

復習:単体法の2段解法による初期基本解の決定



原点を実行可能領域外にする制約
　＝変数が負orゼロ

例: $x_2 - x_\mathrm{s} = t > 0$

$x_2 = 0 \rightarrow x_\mathrm{s} = -t < 0$

変数を追加して非負条件を満たす

例: $x_2 - x_\mathrm{s} + x_\mathrm{a} = t > 0$

$x_2 = 0 \rightarrow x_\mathrm{s} = x_\mathrm{a} - t$

$\therefore x_\mathrm{a} > t > 0 \Rightarrow x_\mathrm{s} = x_\mathrm{a} - t > 0$

復習:単体法の2段解法による初期基本解の決定

minimize z

subject to

$$
\begin{aligned}
3x_1 \quad +x_2+x_3 &= 45\\
x_1+2x_2+x_4 &= 40\\
x_2-x_5 &= 10\\
z+6x_1+5x_2 \qquad &= 0\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

1. **基底変数の候補の係数が定数項と異なる符号を持つ**制約式を見つける
2. 1 の式に人工変数を加え新しい制約式を作る
3. 人工変数の総和を目的関数とする最小化問題を単体法を用いて解く
4. 3 で得た最適値が0であれば、最適解を元の問題の初期解として採用する

復習:単体法の2段解法による初期基本解の決定

minimize z

subject to

$$
\begin{aligned}
3x_1 \quad + x_2 + x_3 &= 45 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 &= 40 \\
\boxed{x_2 - x_5 = 10} \\
z + 6x_1 + 5x_2 \qquad &= 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

1. **基底変数の候補の係数が定数項と異なる符号を持つ**制約式を見つける
2. 1 の式に人工変数を加え新しい制約式を作る
3. 人工変数の総和を目的関数とする最小化問題を単体法を用いて解く
4. 3 で得た最適値が0であれば、最適解を元の問題の初期解として採用する

復習:単体法の2段解法による初期基本解の決定

minimize z

subject to

$$
\begin{aligned}
3x_1 \quad +x_2+x_3 &= 45 \\
x_1+2x_2+x_4 &= 40 \\
\boxed{x_2 - x_5 + x_6 = 10} \\
z+6x_1+5x_2 \qquad &= 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

1. **基底変数の候補の係数が定数項と異なる符号を持つ**制約式を見つける
2. 1 の式に人工変数を加え新しい制約式を作る
3. 人工変数の総和を目的関数とする最小化問題を単体法を用いて解く
4. 3 で得た最適値が0であれば、最適解を元の問題の初期解として採用する

復習：単体法の2段解法による初期基本解の決定

minimize $\boxed{x_6}$

subject to

$$
\begin{aligned}
3x_1 \quad +x_2+x_3 &= 45\\
x_1+2x_2+x_4 &= 40\\
\boxed{x_2 - x_5 + x_6 = 10}&\\
z+6x_1+5x_2 \qquad &= 0\\
\boxed{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}&
\end{aligned}
$$

1. **基底変数の候補の係数が定数項と異なる符号を持つ**制約式を見つける
2. 1 の式に人工変数を加え新しい制約式を作る
3. 人工変数の総和を目的関数とする最小化問題を単体法を用いて解く
4. 3 で得た最適値が0であれば、最適解を元の問題の初期解として採用する

復習：単体法の2段解法による初期基本解の決定

minimize $\boxed{x_6}$

subject to

$$
\begin{aligned}
3x_1 \quad + x_2 + x_3 &= 45 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 &= 40 \\
\boxed{x_2 - x_5 + x_6} &\boxed{= 10} \\
z + 6x_1 + 5x_2 \quad &= 0 \\
\boxed{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6} &\boxed{\geq 0}
\end{aligned}
$$

1. **基底変数の候補の係数が定数項と異なる符号を持つ**制約式を見つける
2. 1 の式に人工変数を加え新しい制約式を作る
3. 人工変数の総和を目的関数とする最小化問題を単体法を用いて解く
4. 3 で得た最適値が0であれば、最適解を元の問題の初期解として採用する

復習：演習問題5

minimize $z = x_1 + 2x_2$

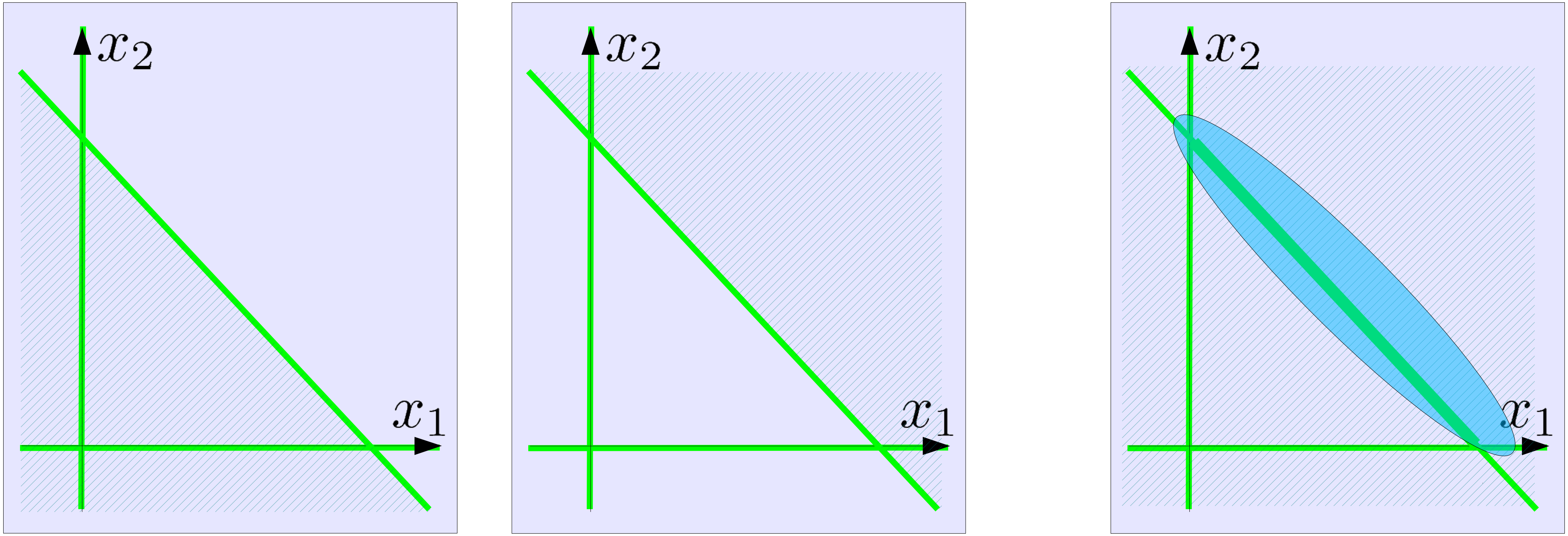
subject to $-x_1 - x_2 \geq -1$

$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

$\boxed{x_1 + x_2 \leq 1}$

課題1： グラフを描き、原点が実行可能領域ではないことを確認する。



復習:演習問題5

minimize $\quad z = x_1 + 2x_2$

subject to
$$
\begin{aligned}
-x_1 - x_2 &\geq -1\\
x_1 + x_2 &\geq 1\\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

課題2: 2段階 simplex 法の第1段階を用いて実行可能領域の端点を見つける。

等式標準形

minimize z

subject to
$$
\begin{aligned}
x_1 \quad +x_2+x_3 &= 1\\
x_1 \quad +x_2-x_4 &= 1\\
z-x_1-2x_2 \qquad &= 0\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

人工問題

minimize $z(= x_5)$

subject to
$$
\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3 \qquad\quad &= 1\\
x_1+x_2-x_4+x_5 &= 1\\
z \qquad\qquad -x_5 &= 0\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

復習:演習問題5

人工問題の等式標準形からsimplex 表を準備する

人工問題

minimize $z(=x_5)$

$= -x_1 - x_2 + x_4 + 1$

subject to

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 1 \\
x_1 + x_2 \qquad - x_4 + x_5 &= 1 \\
z + x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad &= 1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

simplex 表

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数	最大増加量
1	1	1	0	0	1	
1	1	0	−1	1	1	
1	1	0	−1	0	1	

復習:演習問題5

- 最初のシンプレックス表

z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	−1	1	1	
1	1	1	0	−1	0	1	

- 目的関数の定義式で非基底変数の係数のうち正のものを選ぶ

z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	−1	1	1	
1	1	1	0	−1	0	1	

- 2つの候補のうち、今回はx1の係数を選ぶ

z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	−1	1	1	
1	1	1	0	−1	0	1	

復習:演習問題5

- x1は非基底変数から基底変数になる

z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	−1	1	1	
1	1	1	0	−1	0	1	

- x1の係数で定数項を割りx1の増加量を計算する

z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	$/1 = 1$
0	1	1	0	−1	1	1	$/1 = 1$
1	1	1	0	−1	0	1	

- 最小の増加量を選び、基底変数→非基底変数の候補を決める

z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	$/1 = 1$
0	1	1	0	−1	1	1	$/1 = 1$
1	1	1	0	−1	0	1	

復習：演習問題5

- x3は基底変数から非基底変数になる

z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	−1	1	1	
1	1	1	0	−1	0	1	

- 基底変数の値を求めるためx1の係数を払う

z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
$-\times 1$ 0	1 -1	1 -1	0 -1	−1	1	1 -1	
$-\times 1$ 1	1 -1	1 -1	0 -1	−1	0	1 -1	

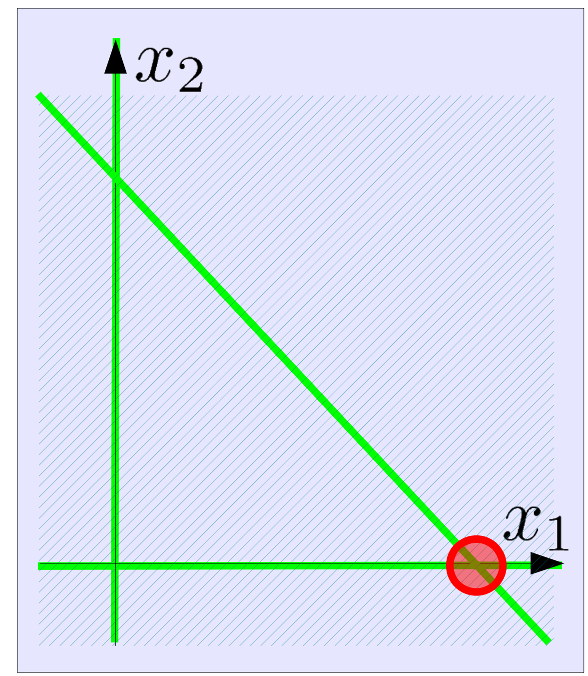
- 目的関数の式で非基底変数の係数が非正になり最適解を得た

z	x_1	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	0	0	−1	−1	1	0	
1	0	0	−1	−1	0	0	

復習:演習問題5

z	x_1	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	0	0	−1	−1	1	0	
1	0	0	−1	−1	0	0	

- 最適解を得る
  $z = 0, x_1 = 1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0$
- 最適値=0 なので、これを初期解に用いることができる



単体法の2段解法、適用の条件

等式標準形

minimize

$$z = -6x_1 + 6x_2$$

subject to

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\
① \quad &-5x_1 + 9x_2 = 15 \\
② \quad &-6x_1 + 3x_2 - x_4 = 3 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

人工問題の等式標準形

minimize

$$z$$

subject to

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\
-5x_1 + 9x_2 \boxed{+x_5} &= 15 \\
-6x_1 + 3x_2 - x_4 \boxed{+x_6} &= 3 \\
z - 11x_1 + 12x_2 - x_4 &= 18 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}
$$

① 係数が1の変数がなく定数項がゼロでない

② x4の係数と定数項で符号が異なる

→「x3,x4を基底変数、それ以外を非基底変数」とすると、非負条件を満たせない。→2段解法を利用する

単体法の2段解法、2段目

- 初期のsimplex表

z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	x_6	定数	最大増加量
0	2	3	1	0	0	0	6	
0	-5	9	0	0	1	0	15	
0	-6	3	0	-1	0	1	3	
1	-11	12	0	-1	0	0	18	

- 1段目終了時のsimplex表

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4	x_5 非	x_6 非	定数	最大増加量
0	1	0	3/11	0	-1/11	0	3/11	
0	0	0	-13/11	1	8/11	-1	9/11	
0	0	1	5/33	0	0	0	20/11	
1	0	0	0	0	-1	-1	0	

- 人工問題の最適解

$$(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 3/11, 20/11, 0, 9/11, 0, 0)$$

- 1段目終了後の解法はどう進めるのか？

単体法の2段解法、2段目

- 人工問題の最適解から人工変数を除けば、

  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3/11, 20/11, 0, 9/11)$

  基底変数: x_1, x_2, x_4　　非基底変数:x_3

等式標準形

minimize

$$z = -6x_1 + 6x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 \qquad &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

基底変数の連立方程式

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 \qquad &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 \qquad &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

の解は、人工問題の最適解

$$x_1 = 3/11$$
$$x_2 = 20/11$$
$$x_4 = 9/11$$

- 基底変数を x_1, x_2, x_4 非基底変数を x_3 として、単体法の手順を開始すれば良い

単体法の2段解法、2段目

- 基底変数: x_1 ,x_2, x_4　非基底変数: x_3
  元の等式標準形からsimplex表を作る

z	x_1	x_2	x_3　非	x_4	定数	最大増加量
0	2	3	1	0	6	
0	-5	9	0	0	15	
0	-6	3	0	-1	3	
1	6	-6	0	0	0	

- 一度連立方程式を解いて、基本解を得る

z	x_1	x_2	x_3　非	x_4	定数
0	1	0	3/11	0	3/11
0	0	1	5/33	0	20/11
0	0	0	-13/11	1	9/11
1	0	0	-8/11	0	102/11

- (この例では)非基底変数の係数が全て負なので最適解

単体法の2段解法、2段目

- 元の標準形まで戻らなくても、
  人工問題の最終段階の simplex 表を削って

z	x_1	x_2	x_3　　非	x_4	x_5	x_6	定数	最大増加量
0	1	0	3/11	0	-1/11	0	3/11	
0	0	0	-13/11	1	8/11	-1	9/11	
0	0	1	5/33	0	0	0	20/11	
1	0	0	0	0	-1	-1	0	

- 基本解を得ることができる

z	x_1	x_2	x_3　　非	x_4	定数
0	1	0	3/11	0	3/11
0	0	0	-13/11	1	9/11
0	0	1	5/33	0	20/11

- z の行は？

単体法の2段解法、2段目

- 元の標準形まで戻らなくても、
  人工問題の最終段階の simplex 表を削って

z	x_1	x_2	x_3　非	x_4	定数
0	1	0	3/11	0	3/11
0	0	0	-13/11	1	9/11
0	0	1	5/33	0	20/11

- 目的関数値の段は、定義より計算

$$z = -6x_1 + 6x_2 = -6(-\frac{3}{11}x_3 + \frac{3}{11}) + 6(-\frac{5}{33}x_3 + \frac{20}{11})$$
$$= \frac{8}{11}x_3 + \frac{102}{11}$$

z	x_1	x_2	x_3　非	x_4	定数
1	0	0	-8/11	0	102/11

- 非基底変数の係数が全て負なので最適解

2段階単体法(2stage simplex method)

第1段階:初期基底解を求めるための線形計画問題を解く

・元の問題の等式標準形に以下の操作を施し人工問題を作る。
(1)基底変数候補の係数が正でない制約式に人工変数を加える
(2)人工変数の総和から成る人工目的関数を定める

・人工問題の最適解を単体法を用いて求める

※初期基底変数はsimplex表の目的関数から消去しておく
※最適値が 0 ならば元の問題の初期基本解として利用できる

第2段階:元の問題と同等の線形計画問題を解く

・最終段階のsimplex表から人工変数を取り除き、元の目的関数の定義と併せて元の問題のsimplex表を作り単体法を適用する

※初期基底変数はsimplex表の目的関数から消去しておく
※補助問題のsimplex表に目的関数の行を加えて利用する

例題（単体法の2段解法）

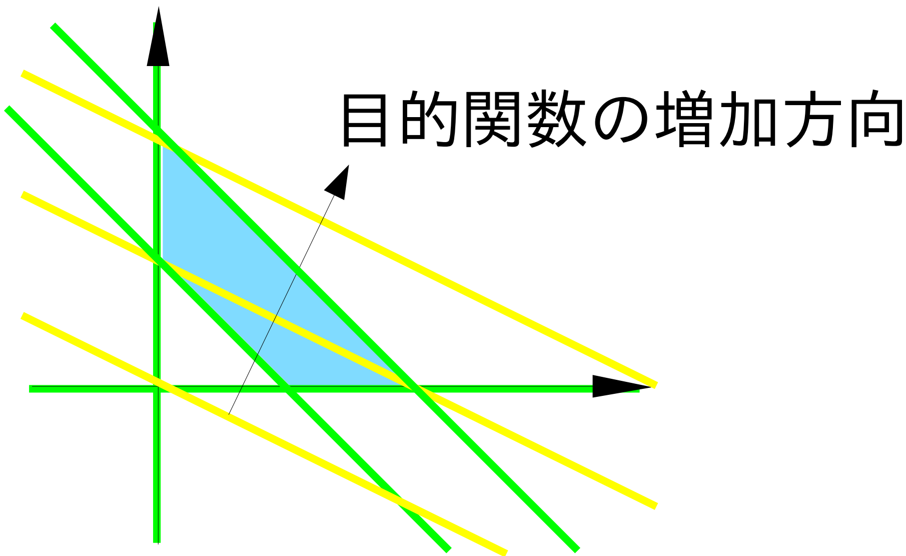
- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \;\; z = x_1 + 2x_2 \\
&\text{subject to} \\
&x_1 + x_2 \le 2 \\
&x_1 + x_2 \ge 1 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

例題(単体法の2段解法)

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

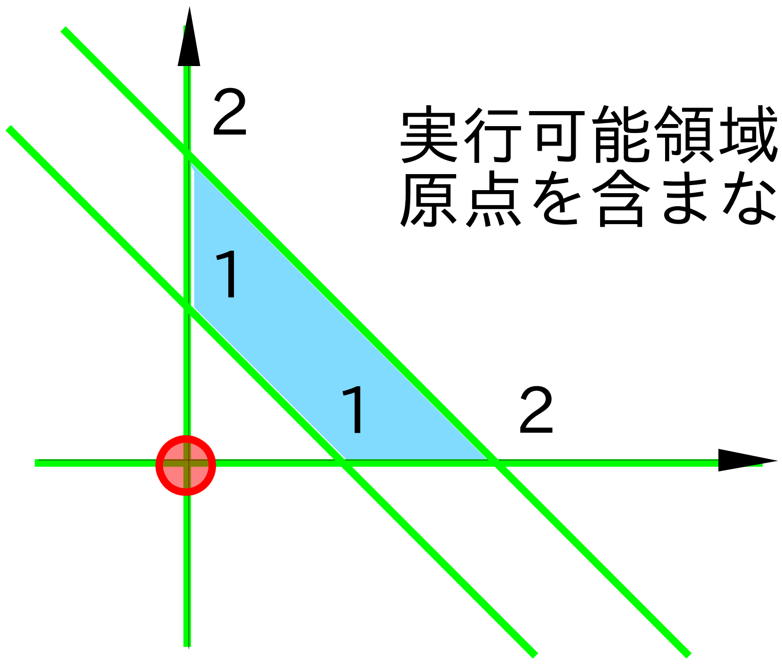
$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad z = x_1 + 2x_2 \\
&\text{subject to} \\
&x_1 + x_2 \leq 2 \\
&x_1 + x_2 \geq 1 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



例題（単体法の2段解法）

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \ \ z = x_1 + 2x_2 \\
&\text{subject to} \\
&x_1 + x_2 \le 2 \\
&x_1 + x_2 \ge 1 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



例題（単体法の2段解法）

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad z = x_1 + 2x_2 \\ &\text{subject to} \\ &x_1 + x_2 \leq 2 \\ &x_1 + x_2 \geq 1 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad z = -x_1 - 2x_2 \\ &\text{subject to} \\ &\quad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ &\quad x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

等式標準形を導く

例題（単体法の2段解法）

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

等式標準形

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & z \\
\text{subject to} & \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
& x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
& z + x_1 + 2x_2 = 0 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & z^* = x_5 \\
\text{subject to} & \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
& x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\
& z^* - x_5 = 0 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \quad \geq 0
\end{array}
$$

同じもの

人工問題を導く

例題（単体法の2段解法）

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

等式標準形

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad z \\
&\text{subject to} \\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&\qquad x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
&z + x_1 + 2x_2 = 0 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad z^* = x_5 \\
&\text{subject to} \\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&\boxed{\begin{aligned} &\qquad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ &z^* \qquad\qquad - x_5 = 0 \end{aligned}} \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\
&z^* + x_1 + x_2 - x_4 = 1
\end{aligned}
$$

2式を両辺加えて

人工問題を導く

例題（単体法の2段解法）

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

等式標準形

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad z \\
&\text{subject to} \\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&\qquad x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
&z + x_1 + 2x_2 = 0 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

人工問題の等式標準形

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad z^* \\
&\text{subject to} \\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&\qquad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\
&z^* + x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

例題（単体法の2段解法）

- 人工問題(or補助問題)の等式標準形に対応して simplex 表を作る
- 単体法を用いて第1段、第2段の線形計画問題を解く

人工問題の等式標準形

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad z^* \\
&\text{subject to} \\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&\qquad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\
&z^* + x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

z^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	1	1	0	-1	0	1	

例題（単体法の2段解法）

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く
  6変数3制約なので、基底/非基底変数は 3/3

z^*	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	1	1	0	-1	0	1	

各行に1つずつ係数が1の変数を基底変数に選び、残りを非基底変数とする

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\
x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 1 \\
z^* + x_1 + x_2 - x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

連立方程式が
解けた状態に
対応する

例題（単体法の2段解法）

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く

z^*	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 **非**	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	/1=2
0	1	1	0	-1	1	1	/1=1
1	1	1	0	-1	0	1	

基底変数と非基底変数を交換して現れた連立方程式を解く

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3 \qquad\qquad &= 2\\
x_1+x_2 \qquad -x_4+x_5 &= 1\\
z^*+x_1+x_2 \qquad -x_4 \qquad &= 1
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3 \qquad\qquad &= 2\\
x_1+x_2 \qquad -x_4+x_5 &= 1\\
z^*+x_1+x_2 \qquad -x_4 \qquad &= 1
\end{aligned}
$$

z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0 ~~1~~	0 ~~1~~	1	1 ~~0~~	-1 ~~0~~	1 ~~2~~	-×1
0	1	1	0	-1	1	1	
1	0 ~~1~~	0 ~~1~~	0	0 ~~-1~~	-1 ~~0~~	0 ~~1~~	

例題(単体法の2段解法)

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く

z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0 ~~1~~	0 ~~1~~	1	1 ~~0~~	-1 ~~0~~	1 ~~2~~	-×1
0	1	1	0	-1	1	1	
1	0 ~~1~~	0 ~~1~~	0	0 ~~-1~~	-1 ~~0~~	0 ~~1~~	

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 2 \\
x_1 + x_2 \qquad - x_4 + x_5 &= 1 \\
z^* + x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad &= 1
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\
x_1 + x_2 \qquad - x_4 + x_5 &= 1 \\
z^* \qquad\qquad - x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

連立方程式を解いて得た関係式をもとにシンプレックス表を更新する

z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	0	0	0	0	-1	0	

例題（単体法の2段解法）

- 非基底変数の係数が非正なので終了
  z*=0 となる最適解が求まった→成功

z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	0	0	0	0	-1	0	

- 元の線形計画問題: $z = -x_1 - 2x_2$ の最小化問題を解く

z, z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	0	0	0	0	-1	0	
z 1	1	2	0	0		0	

- 人工問題専用の目的関数・変数を削除して、目的関数 z の定義式をsimplex表に記入すると x_1 に非ゼロ係数がつく

例題（単体法の2段解法）

- 元の線形計画問題: z=-x_1-2x_2 の最小化問題を解く

z,z*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	0	0	0	0	-1	0	
z 1	1	2	0	0		0	

- 人工問題専用の目的関数･変数を削除して、目的関数z の定義式をsimplex表に記入するとx_1に非ゼロ係数がつく
  x_1は基底変数なので方程式が解けていないことになる
  ⇒非基底変数 x_2, x_4 で置き換える

$$
\begin{aligned}
x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\
x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 1 \\
z^* - x_5 &= 0 \\
z + x_1 + 2x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\
x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 1 \\
z^* - x_5 &= 0 \\
z + x_2 + x_4 - x_5 &= -1
\end{aligned}
$$

2段目の式 $x_1+x_2-x_4+x_5=1$ を利用してを x_1 消去

単体法の2段解法、2段目＝元の問題を解くまでにすること

- 連立方程式（制約式）に注目すれば、次の通りになる

$$
\begin{array}{lllll}
 & x_1 & +x_2+x_3 & & =2 \\
 & x_1 & +x_2 & -x_4+x_5 & =1 \\
z^* & +x_1 & +x_2 & -x_4 & =1 \\
z & +x_1 & +2x_2 & & =0
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{lllll}
 & x_1 & +x_2+x_3 & & =2 \\
 & x_1 & +x_2 & -x_4+x_5 & =1 \\
z^* & +x_1 & +x_2 & -x_4 & =1 \\
z & +x_1 & +2x_2 & & =0
\end{array}
$$

基底変数であるx1,x3の係数を払う

$$
\Rightarrow
\begin{array}{lllll}
 & & & x_3+x_4+x_5 & =1 \\
 & x_1 & +x_2 & -x_4+x_5 & =1 \\
z^* & & & -x_5 & =0 \\
z & +x_1 & +2x_2 & & =0
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{lllll}
 & & & x_3+x_4+x_5 & =1 \\
 & x_1 & +x_2 & -x_4+x_5 & =1 \\
z^* & & & -x_5 & =0 \\
z & & +x_2 & +x_4-x_5 & =-1
\end{array}
$$

基底変数であるx1,x3の係数を払う

- 元の問題を解く前にしていること＝
  人工問題についてしたこと⇒一緒にやってしまえば？

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

等式標準形

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z \\
\text{subject to} \\
\begin{array}{rrrrl}
 & x_1 & +x_2+x_3 & & = 2 \\
 & x_1 & +x_2 & -x_4 & = 1 \\
z+x_1+2x_2 & & & & = 0
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

人工問題の等式標準形

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z^* \\
\text{subject to} \\
\begin{array}{rrrrl}
 & x_1 & +x_2+x_3 & & = 2 \\
 & x_1 & +x_2 & -x_4+x_5 & = 1 \\
z^*+x_1 & & +x_2 & -x_4 & = 1 \\
(z+x_1+2x_2 & & & & = 0)
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

- 人工問題(or補助問題)の等式標準形に対応して simplex 表を作る
- 単体法を用いて第1段、第2段の線形計画問題を解く

人工問題の等式標準形

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z^* \\
\text{subject to} \\
\qquad x_1 \;\; +x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad = 2 \\
\qquad x_1 \;\; +x_2 \qquad\quad -x_4 + x_5 = 1 \\
z^* + x_1 \;\; +x_2 \qquad\quad -x_4 \qquad\;\; = 1 \\
(z + x_1 + 2x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad = 0) \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

z, z^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
z^* 1	1	1	0	-1	0	1	
z 1	1	2	0	0	0	0	

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く
  6変数3制約なので、基底/非基底変数は 3/3

z,z^*	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 **非**	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	/1=2
0	1	1	0	-1	1	1	/1=1
z^* 1	1	1	0	-1	0	1	
z 1	1	2	0	0	0	0	

z,z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0 ~~1~~	0 ~~1~~	1	1 ~~0~~	-1 ~~0~~	1 ~~2~~	-×1
0	1	1	0	-1	1	1	
z^* 1	0 ~~1~~	0 ~~1~~	0	0 ~~-1~~	-1 ~~0~~	0 ~~1~~	
z 1	0 ~~1~~	1 ~~2~~	0	1 ~~0~~	-1 ~~0~~	-1 ~~0~~	

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

- 非基底変数の係数が非正なので終了
  $z^*=0$ となる最適解が求まった→成功

z,z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
z^* 1	0	0	0	0	-1	0	
z 1	0	1	0	1	-1	-1	

- 元の線形計画問題= z の最小化問題を解く

z,z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
z^* 1	0	0	0	0	-1	0	
z 1	0	1	0	1	-1	-1	

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法から罰則付単体法へ

- z と z^* を区別してみると、

  単体法の2段解法＝

  z と z^*, x_1,...の関係式を用いて、
  　まずz^* を最適化、次にz を最適化する方法
  と言える
- z と z^* を同時に最適化する方法＝罰則付単体法

罰則付単体法

- 2段解法の人工(補助)問題と元の問題を併せた罰則付の線形計画問題を作る

等式標準形

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z \\
\text{subject to} \\
\qquad \begin{array}{lllll}
 & x_1 & +x_2+x_3 & & = 2 \\
 & x_1 & +x_2 & -x_4 & = 1 \\
z+ & x_1 & +2x_2 & & = 0
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

罰則付問題の等式標準形

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z + Mz^* \\
\text{subject to} \\
\qquad \begin{array}{lllll}
 & x_1 & +x_2+x_3 & & = 2 \\
 & x_1 & +x_2 & -x_4+x_5 & = 1 \\
z^*+ & x_1 & +x_2 & -x_4 & = 1 \\
(z+ & x_1 & +2x_2 & & = 0)
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

罰則付単体法

- 2段階法における人工(補助)問題と元の問題の関係
  - まず z^* を最小化して、次に z を最小化する
- 人工問題を同時に解く方法＝罰則付単体法
  - z の最小化と人工変数=0 が成立すれば良い
  - z, z^* を同時($z^*=0$ 優先)に最適化＝罰則付単体法
    - $z+M\times z^*$ (M は大きな数) を最小化する
      M の影響が大きいので z^* の最小化→$z^*=0$ が優先的に実現される

罰則付単体法

- 罰則付問題の等式標準形に対応して simplex 表を作る

z+M z*	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_4	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	1+M	2+M	0	-M	0	M	

- M=100 とした場合

z+M z*	x_1 非	x_2 ~~非~~	x_3	x_4 非	x_4 非	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	/1=2
0	1	1	0	-1	1	1	/1=1
1	101	102	0	-100	0	100	

z+M z*	x_1 0 非	x_2 0	x_3	x_4 1 非	x_4 -1非	定数 1	最大増加量
0	~~1~~	~~1~~	1	~~0~~	~~0~~	~~2~~	-×1
0	1	1	0	-1	1	1	-×102
1	~~101~~	~~102~~	0	~~-100~~	~~0~~	~~100~~	
	-1	0		2	-102	-2	

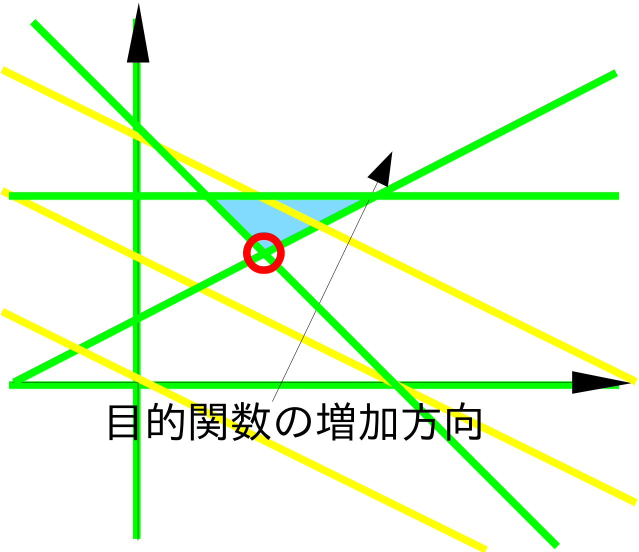
罰則付単体法

- 2段階法における人工(補助)問題と元の問題の関係
  - まず z^* を最小化して、次に z を最小化する
- 人工問題を同時に解く方法＝罰則付単体法
  - z の最小化と人工変数=0 が成立すれば良い
  - z, z^* を同時($z^*=0$ 優先)に最適化＝罰則付単体法
    - $z+M\times z^*$ (M は大きな数) を最小化する
M の影響が大きいので z^* の最小化→$z^*=0$ が優先的に実現される
- 安全な罰則(M)を決める方法が無い
  - M を任意の数よりも大きい数として扱う
    - 2段階法と同じ手間になる

練習問題6

課題：次の線形計画問題を罰則付単体法を用いて解く

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \;\; x_1 + 2x_2 \\
&\text{subject to} \\
&x_1 + x_2 \geq 4, \quad x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\
&x_2 \leq 3, \;\; x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



注意：原点は実行可能領域ではありません

ヒント：

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{min.} & z = -x_1 - 2x_2 \\
\texttt{s.t.} & x_1 + x_2 \geq 4 \\
& -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{min.} & z = -x_1 - 2x_2 \\
\texttt{s.t.} & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\
& -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\
& x_2 + x_5 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

練習問題6:線形計画問題の導出

- 罰則付単体法

十分大きな M により、

$z+Mz^*$ の最小化で、

$z^*=0$, z の最小化が

同時に実現する

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad \tilde{z} = z + Mz^* \\
&\text{subject to} \\
&\quad x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4 \\
&\quad -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2 \\
&\quad x_2 + x_5 = 3 \\
&\tilde{z} + x_1 + (3M+2)x_2 - Mx_3 - Mx_4 = 6M \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{aligned}
$$

z˜	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	定数
	1	1	-1			1		4
	-1	2		-1			1	2
		1			1			3
1	1	302	-100	-100				600

z,z*	x1 非	x2 ~~非~~	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数	
	1	1	-1			1		4	/1=4
	-1	2		-1			1	2	/2=1
		1			1			3	/1=3
1	1	302	-100	-100				600	

	z,z*	x1 非	x2	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数
		1	1	-1			1		4
×1/2		-1/2 -1	1 2		-1/2 -1			1/2 1	1 2
			1			1			3
	1	1	302	-100	-100				600

	z,z*	x1 非	x2 ~~非~~	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数
×-1		1/2 1	-1 1	-1	1/2		1	-1/2	-1 4
		-1/2 ~~-1~~	1 ~~2~~		-1/2 ~~-1~~			1/2 ~~1~~	1 ~~2~~
×-1		1/2	-1 1		1/2	1		-1/2	-1 3
×-302	1	151 1	302	-100	-100			-151	600
			-302		151				-302

z,z*	x1 非	x2	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数
	3/2	0	-1	1/2		1	-1/2	3
	-1/2	1		-1/2			1/2	1
	1/2	0		1/2	1		-1/2	2
1	152	0	-100	51			-151	298

z,z*	x1 ~~非~~	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数	
	3/2	0	-1	1/2		1	-1/2	3	/(3/2)=2
	-1/2	1		-1/2			1/2	1	/(-1/2)<0
	1/2	0		1/2	1		-1/2	2	/(1/2)=4
1	152	0	-100	51			-151	298	

	z,z*	x1 ~~非~~	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数
×2/3		1 3/2	0	-2/3 -1	1/3 1/2		2/3 1	-1/3 -1/2	2 3
		-1/2	1		-1/2			1/2	1
		1/2	0		1/2	1		-1/2	2
	1	152	0	-100	51			-151	298

	z,z*	x1 ~~非~~	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数
		1 ~~3/2~~	0	-2/3 ~~-1~~	1/3 ~~1/2~~		2/3 ~~1~~	-1/3 ~~-1/2~~	2 ~~3~~
×1/2		1/2 -1/2	1	-1/3	1/6 -1/2		1/3	-1/6 1/2	1 1
×-1/2		-1/2 1/2	0	1/3	-1/6 1/2	1	-1/3	1/6 -1/2	-1 2
×-152	1	-152 152	0	304/3 -100	-152/3 51		-304/3	152/3 -151	-304 298

z,z*	x1	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数
	1		-2/3	1/3		2/3	-1/3	2
	0	1	-1/3	-1/3		1/3	1/3	2
	0		1/3	1/3	1	-1/3	-1/3	1
1	0		4/3	1/3		-304/3	-301/3	-6

z,z*	x1	x2	x3 ~~非~~	x4 非	x5 非	x6 非	x7 非	定数
	1		-2/3	1/3		2/3	-1/3	2
	0	1	-1/3	-1/3		1/3	1/3	2
	0		1/3	1/3	1	-1/3	-1/3	1 /(1/3)=3
1	0		4/3	1/3		-304/3	-301/3	-6

z,z*	x1	x2	x3 ~~非~~	x4 非	x5 非	x6 非	x7 非	定数
	1		-2/3	1/3		2/3	-1/3	2
	0	1	-1/3	-1/3		1/3	1/3	2
×3	0		1 1/3	1 1/3	3 1	-1 -1/3	-1 -1/3	3 1
1	0		4/3	1/3		-304/3	-301/3	-6

z,z*	x1	x2	x3 ~~非~~	x4 非	x5 非	x6 非	x7 非	定数
×2/3	1		2/3 -2/3	2/3 1/3	2	-2/3 2/3	-2/3 -1/3	2 2
×1/3	0	1	1/3 -1/3	1/3 -1/3	1	-1/3 1/3	-1/3 1/3	1 2
	0		1 ~~1/3~~	1 ~~1/3~~	3 ~~1~~	-1 ~~-1/3~~	-1 ~~-1/3~~	3 ~~1~~
×-4/3 1	0		4/3	1/3		-304/3	-301/3	-6
			-4/3	-4/3	-4	4/3	4/3	-4

z,z*	x1	x2	x3 非	x4	x5 非	x6 非	x7 非	定数
	1		0	1	2	0	-1	4
	0	1	0	0	1	0	0	3
	0		1	1	3	-1	-1	3
1	0		0	-1	-4	-100	-99	-10

x1=4

x2=3

最適解

練習問題6:何よりも大きい数Mの利用

	z,z*	x1 非	x2 ~~非~~	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数	
×-1		1/2 1	-1 1	-1	1/2		1	-1/2	-1 4	/1=4
×1/2		-1/2 ~~-1~~	1 ~~2~~		-1/2 ~~-1~~			1/2 ~~1~~	1 ~~2~~	/2=1
×-1		1/2	-1 1		1/2	1		-1/2	-1 3	/1=3
×	-3M+2 1	3M/2 -1	-3M +2 3M -1	-M	3M/2 -1 -M			-3M/2 +1	-3M +2 6M	

- 非常に大きい数 M を記号で残した場合、
  - シンプレックス表には M の係数と定数の両方を記録しなければならない
  - 連立方程式の解法では M の係数と定数の両方を掃き出さなければならない
- 結局、2段階単体法で z* と同時に z の式を扱うのと同じことになる