数理計画法

第11回：内点法1

復習:演習問題10

次の線形計画問題の双対問題を求め、主問題・双対問題の実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

また、制約式・目的関数に関わる平面の法線ベクトルを描き、双対変数どうしの関係を説明せよ

maximize

$$z = x_1 + x_2$$

subject to

$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

minimize

$$w = 2y_1 + 2y_2$$

subject to

$$\begin{array}{rrcl} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

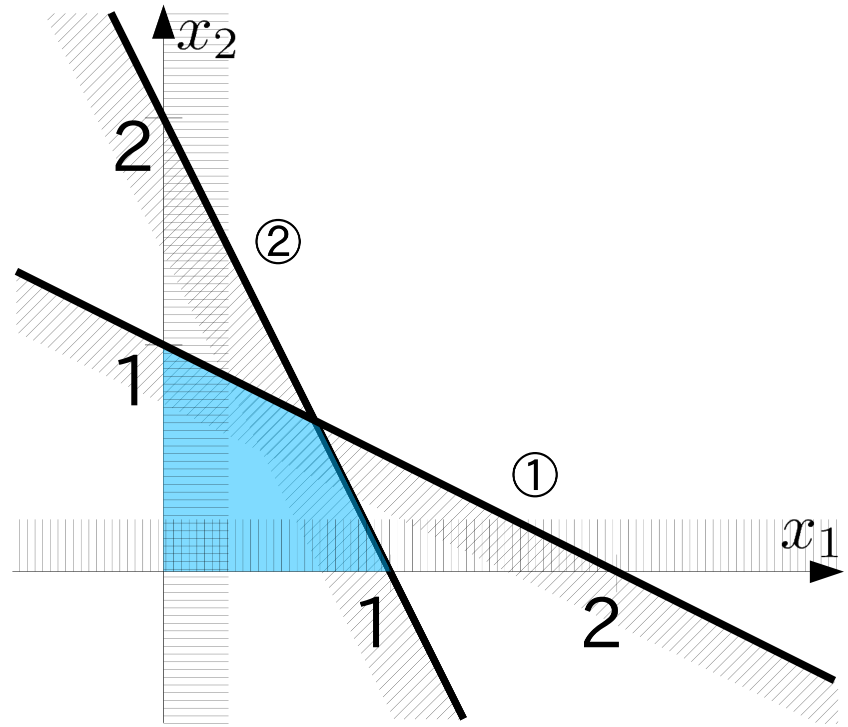
復習：演習問題10

実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

主問題

maximize
$z = x_1 + x_2$
subject to

$$
\begin{array}{rrcll}
x_1 & +2x_2 & \leq & 2 & ① \\
2x_1 & +x_2 & \leq & 2 & ② \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$



復習：演習問題10

実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

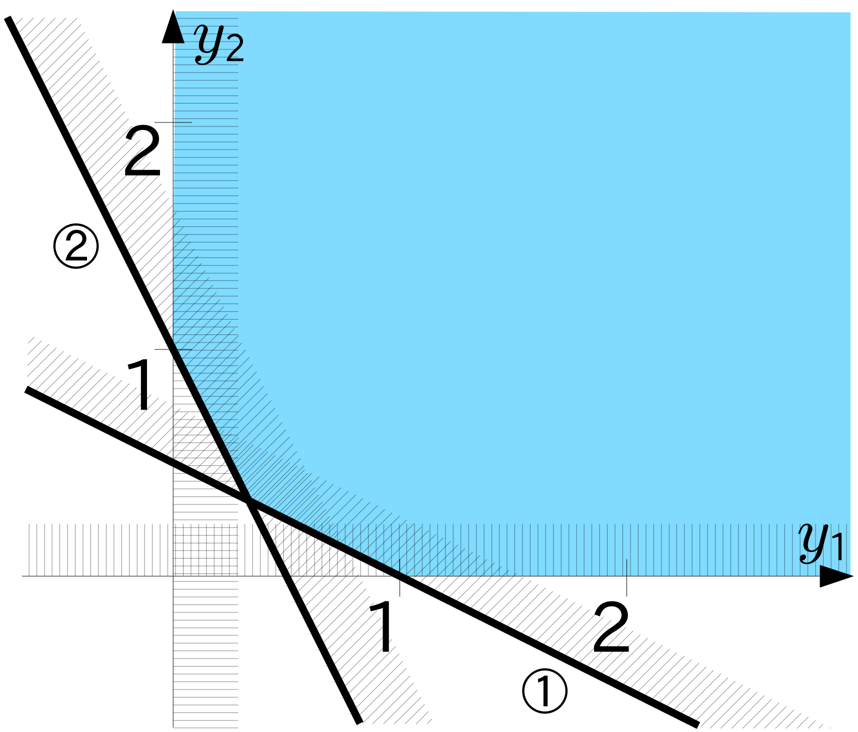
双対問題

minimize

$$w = 2y_1 + 2y_2$$

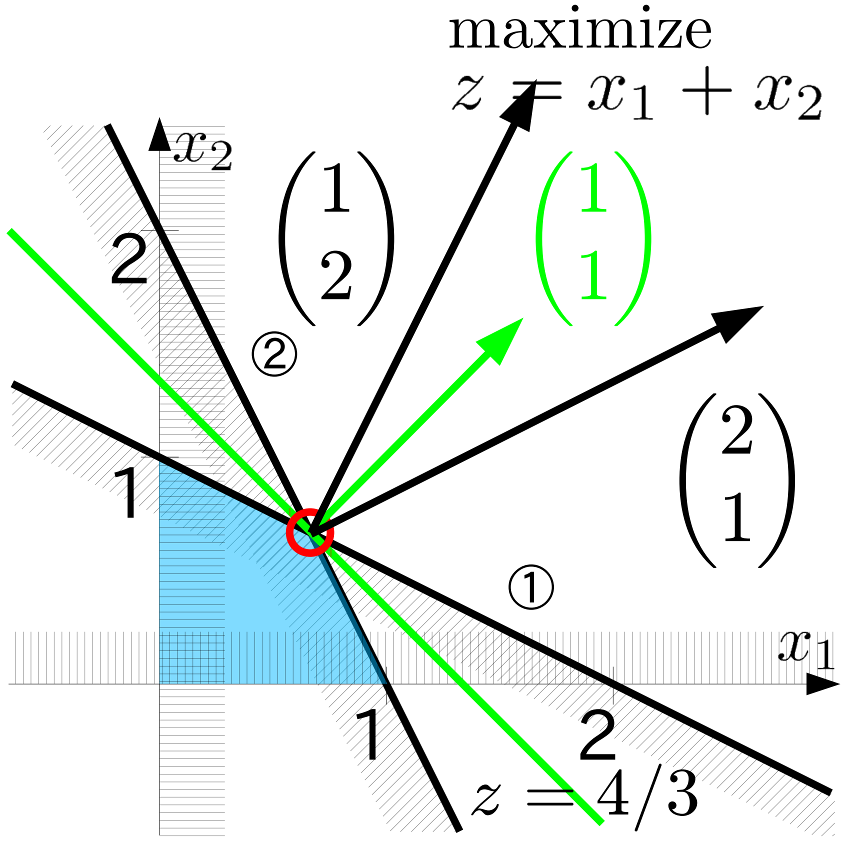
subject to

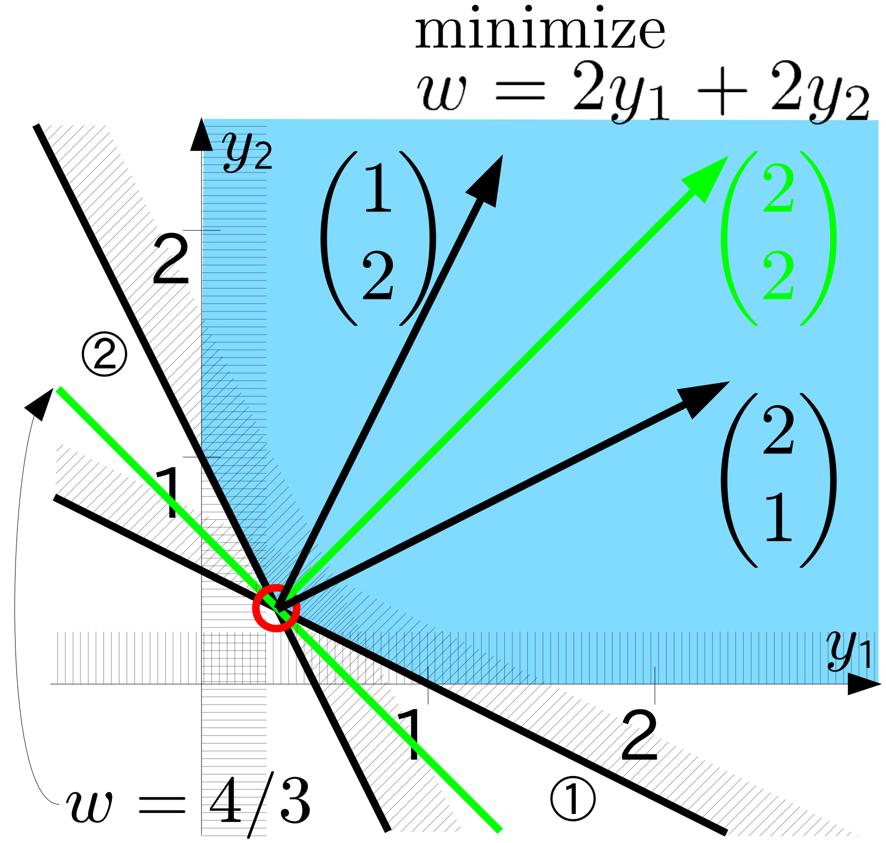
$$\begin{array}{llll} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 & ① \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 & ② \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 & \end{array}$$



復習:演習問題10

最適解を与える制約式・目的関数に関わる平面の法線ベクトルを描き、





復習：演習問題10

双対変数同士の関係を説明せよ

目的関数の法線ベクトル
＝y_1×①の法線ベクトル
＋y_2×②の法線ベクトル

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

目的関数
=y_1×制約式①+y_2×制約式②

$$z=x_1+x_2\leq\frac{1}{3}2+\frac{1}{3}2=\frac{4}{3}$$

主問題

maximize
$z=x_1+x_2$
subject to

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 & ① \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 & ② \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

最適解：

$$(z, x_1, x_2, s_1, s_2) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right)$$

復習：演習問題10

双対変数同士の関係を説明せよ

目的関数の法線ベクトル
＝x_1×①の法線ベクトル
＋x_2×②の法線ベクトル

$$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

目的関数
＝x_1×制約式①＋x_2×制約式②

$$w=2y_1+2y_2 \geq \frac{2}{3}1+\frac{2}{3}1=\frac{4}{3}$$

双対問題

minimize
$w=2y_1+2y_2$
subject to

$$\begin{array}{lllll} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 & ① \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 & ② \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

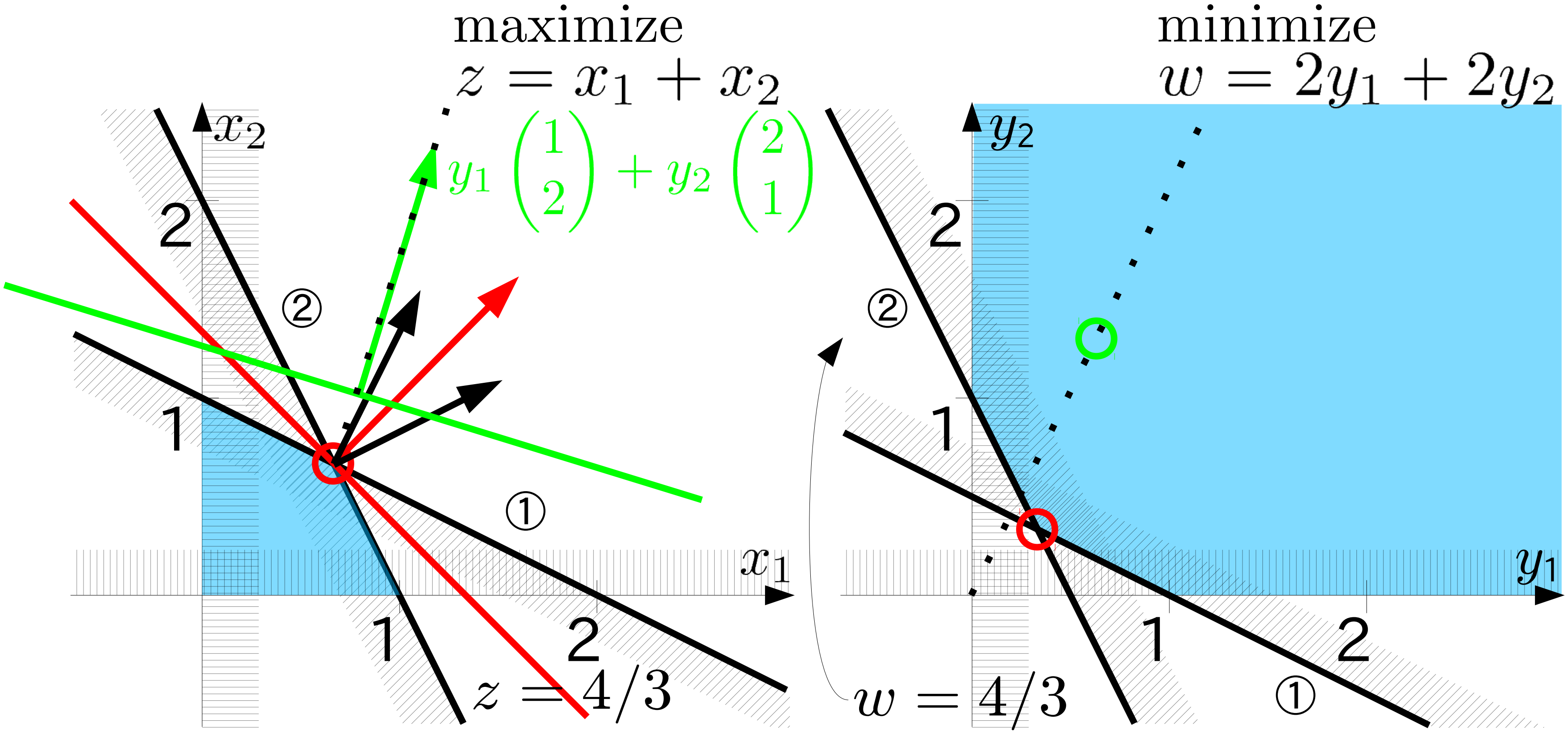
最適解

$$(w, y_1, y_2, t_1, t_2) = (\tfrac{4}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, 0)$$

双対変数値と支持(超)平面

法線ベクトルの組合せで目的関数値に対する制限が決まる

⇒一番厳しい制限=目的関数と同一法線



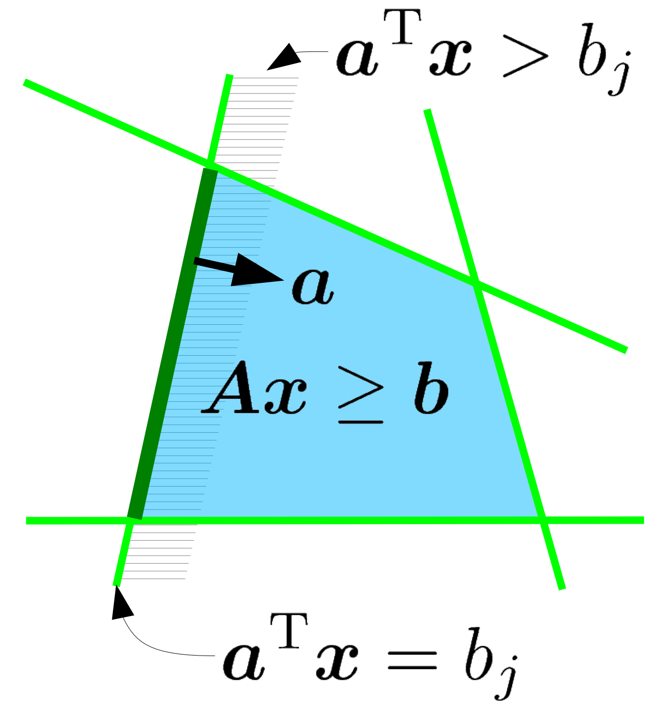
復習+α:線形計画問題と多面体

多面体:
線形計画問題を考えるベクトル空間において、制約等式、不等式の定める領域、全ての制約を満たす多面体=実行可能領域

(超)平面:
(線形)制約等式を満たす点の集合

支持超平面:
多面体を構成する不等式の一つが単独で構成する多面体の境界

面:
多面体とその支持超平面の交わり



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \vdots \\ b_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

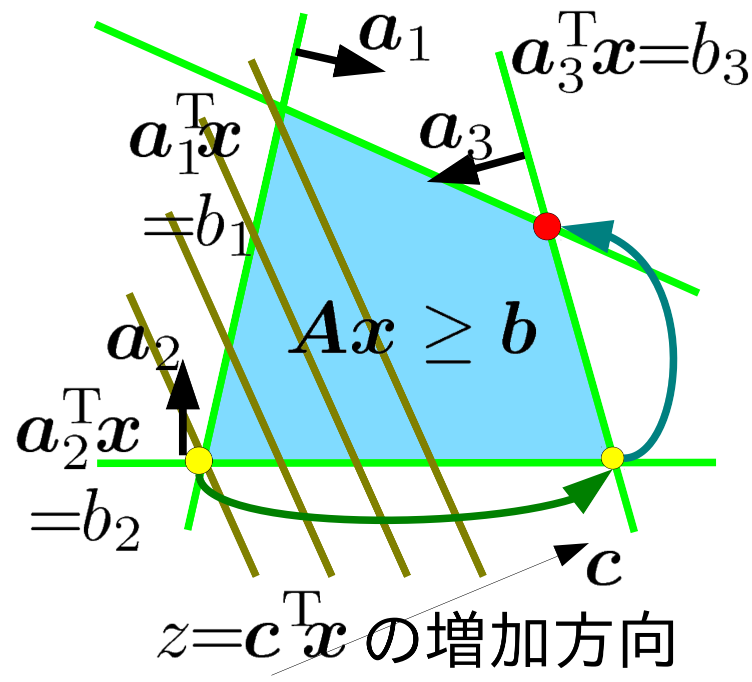
復習+α:線形計画問題と多面体

交点:
　複数の(超)平面の交わりのうち、点を成すもの

多面体の頂点:
　支持(超)平面の成す交点

単体法の原理:
　目的関数が増加するように多面体の頂点を移動し、最適解を求める方法
　出発点となる頂点から頂点を構成する支持超平面を順番に入れ換えて目的関数を増加させる
　総当たり法よりも効率が良い?

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}} \\ \vdots \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$



内点法の原理

不等式標準形

minimize

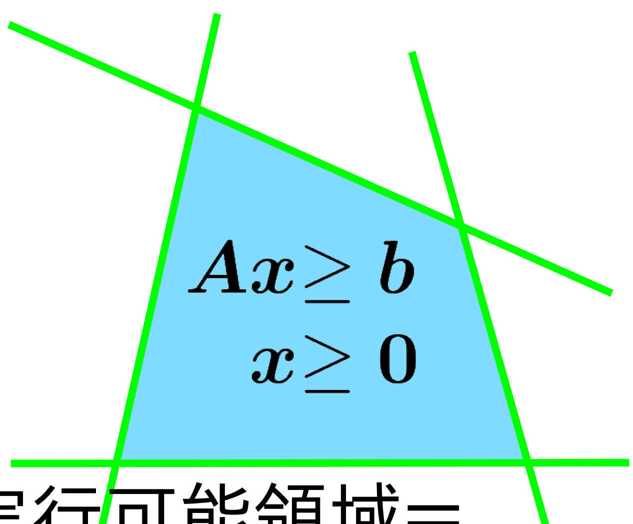
$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$

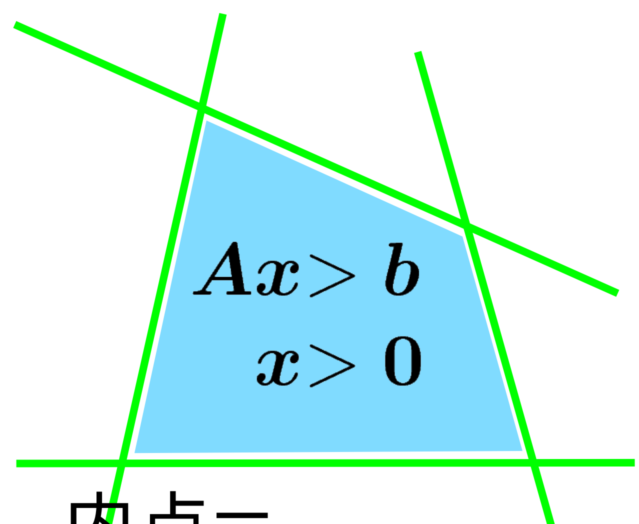
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

内点：
　不等式標準形の制約式から等号を除いた条件を満たす点を内点と呼ぶ



実行可能領域＝

$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$



内点＝

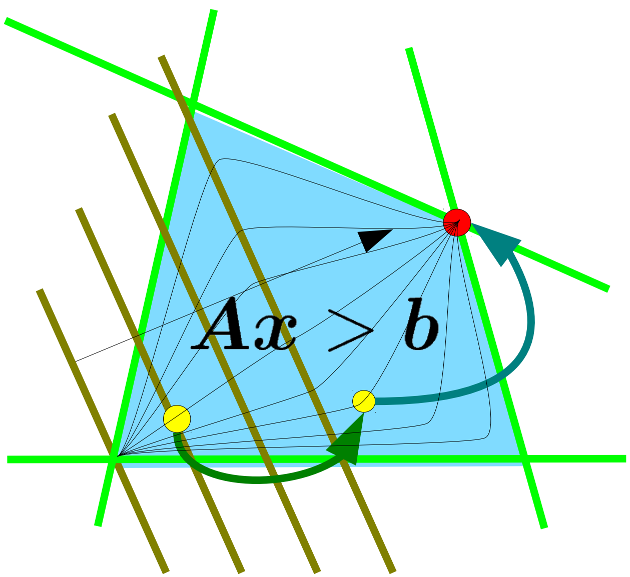
$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}\}$$

内点法の原理

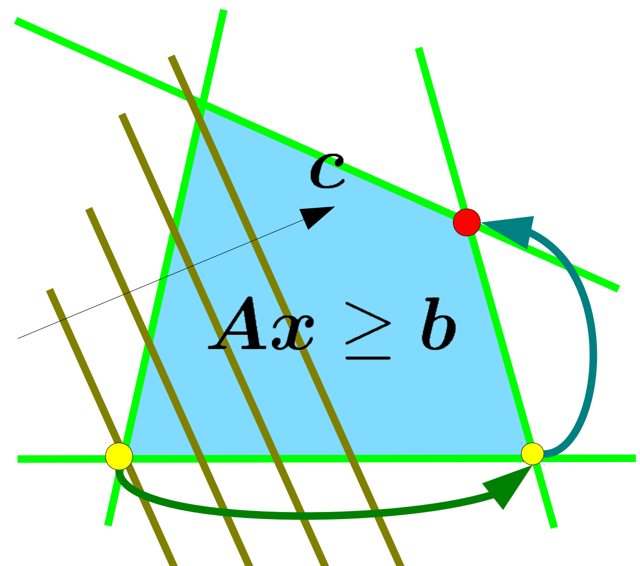
内点法の原理:
　内点領域中に最適解へ向かうベクトル場からなるう軌跡を作り、軌跡に沿って内点領域を通る経路を近似的に求める方法。

不等式標準形

minimize
$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$



内点法



単体法

内点法の原理

内点法の原理:

ある目的関数値をとる内点

x_k>(ただし $Ax_k > b$)

を目的関数値を改善するように
更新して最適解を見つけたい。

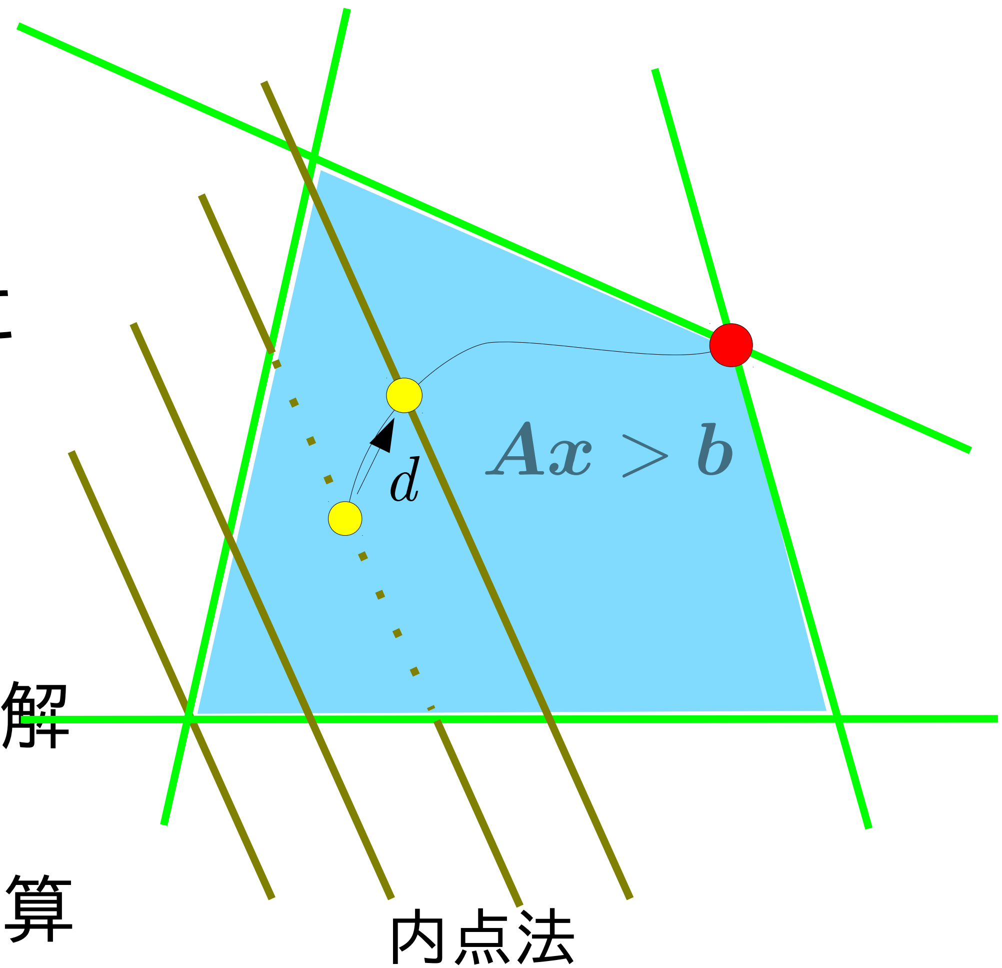
$x_{k+1} = x_k + d$(ただし$c^{\mathrm{T}} x_k > c^{\mathrm{T}} x_{k+1}$)

さらに、

$Ax_{k+1} > b$で、かつ最終的に最適解
に収束するようにdを定める。

できれば反復回数は少なく、計算
も簡単な方が好い。

どうやって?



内点法の準備

- 自己双対型線形計画問題

歪対称行列A($A^{\mathrm{T}}=-A$)を用いて次式で表される線形計画問題を自己双対型と呼ぶ。

$$\text{minimize} \quad z=c^{\mathrm{T}}x \quad \text{subject to} \quad Ax\geq -c,\ x\geq 0$$

自己双対型の主問題に対する双対問題を考える。

$$\text{maximize} \quad w=(-c)^{\mathrm{T}}y \quad \text{subject to} \quad -Ay\leq c,\ y\geq 0$$

符号を考えて最小化問題に置き換えると、主問題に一致する。

$$\text{minimize} \quad w=c^{\mathrm{T}}y \quad \text{subject to} \quad Ay\geq -c,\ y\geq 0$$

主問題が自身の双対問題でもあることをもって「自己双対型」と呼んでいる。

内点法の準備

- 自己双対型線形計画問題への変換

任意の線形計画問題を自己双対型に変換することができる。

例：次の最小化問題を考える。

$$\text{minimize} \quad z = c^{\mathrm{T}} x \quad \text{subject to} \quad Ax \geq b,\ x \geq 0$$

その双対問題は次の通り、

$$\text{maximize} \quad w = b^{\mathrm{T}} y \quad \text{subject to} \quad A^{\mathrm{T}} y \leq c,\ y \geq 0$$

ここに現われた行列を使って次の問題を考える。

$$\text{minimize} \quad z = 0^{\mathrm{T}} x + 0^{T} y + 0^{T} \tau \qquad (x, y, \tau \geq 0)$$

$$\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} O & A & -b \\ -A^{\mathrm{T}} & O & c \\ b^{\mathrm{T}} & -c^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \\ \tau \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ただし0, Oはそれぞれ適切な行数・列数の零行列。

内点法の準備

- $A,\ b,\ c$ を用いた次の問題は自己双対型である。

$$\text{minimize} \quad z = 0^{\mathrm{T}} x + 0^{T} y + 0^{T} \lambda$$

$$\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} O & A & -b \\ -A^{\mathrm{T}} & O & c \\ b^{\mathrm{T}} & -c^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \\ \tau \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 実際に、その双対問題を考えれば、

$$\text{maximize} \quad w = 0^{\mathrm{T}} x' + 0^{T} y' + 0^{T} \lambda' \qquad (x', y', \tau' \geq 0)$$

$$\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} O & A & -b \\ -A^{\mathrm{T}} & O & c \\ b^{\mathrm{T}} & -c^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} y' \\ x' \\ \tau' \end{bmatrix} \leq - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} O & A & -b \\ -A^{\mathrm{T}} & O & c \\ b^{\mathrm{T}} & -c^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ x' \\ \tau' \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

内点法の準備

- 3つの問題を比較して、

$$\text{minimize} \quad z = c^{\mathrm{T}} x \quad \text{subject to} \quad Ax \geq b,\ x \geq 0$$

$$\text{maximize} \quad w = b^{\mathrm{T}} y \quad \text{subject to} \quad A^{\mathrm{T}} y \leq c,\ y \geq 0$$

$$\text{minimize} \quad z = 0^{\mathrm{T}} x + 0^T y + 0^T \tau \qquad (x, y, \tau \geq 0)$$

$$\text{subject to} \begin{bmatrix} O & A & -b \\ -A^{\mathrm{T}} & O & c \\ b^{\mathrm{T}} & -c^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \\ \tau \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1番目の問題の最適解をx^*、その双対問題の最適解をy^*としたとき、$x = x^*, y = y^*, \tau = 1$が自己双対型問題の実行可能解であることは明らか、目的関数が変化しないので最適解でもある。

逆にx, y, τが自己双対型問題の実行可能解であれば、最下行の不等式より$b^{\mathrm{T}} y - c^T x = \rho \geq 0$ とおけるのでτをかけ、次式を得る

$$\tau\rho = \tau(b^{\mathrm{T}} y - c^{\mathrm{T}} x) = (\tau b)^{\mathrm{T}} y - (\tau c)^{\mathrm{T}} x \leq (Ax)^{\mathrm{T}} y - (A^{\mathrm{T}} y)^{\mathrm{T}} x = 0$$

内点法の準備

（続き）前頁より、$\tau\geq 0,\ b^{\mathrm{T}}y-c^{\mathrm{T}}x=\rho\geq 0,\ \tau\rho=0$なので

$\tau>0$なら、

$\rho=0\Rightarrow b^{\mathrm{T}}y-c^{\mathrm{T}}x=0, Ax\geq b\tau, A^{\mathrm{T}}y\leq c\tau$となり

$x/\tau, y/\tau$は元の主問題・双対問題の最適解（∵双対定理）

$\tau=0$なら、

$\rho>0$のとき $b^{\mathrm{T}}y-c^{\mathrm{T}}x>0$となり弱双対定理に矛盾

$\rho=0$のとき $b^{\mathrm{T}}y-c^{\mathrm{T}}x=0, Ax\geq 0, A^{\mathrm{T}}y\leq 0$となる、このとき等号の成立は自明な実行可能解：$(\mathrm{x,y},\tau)=0$に対応する。

$$\text{subject to}\ \begin{bmatrix} O & A & -b \\ -A^{\mathrm{T}} & O & c \\ b^{\mathrm{T}} & -c^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ x \\ \tau \end{bmatrix}\geq\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

演習問題11

課題1：次の線形計画問題を書換えて自己双対型線形計画問題を導きなさい。

minimize $z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 \geq 4 \\
&x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\
&x_2 \leq 3 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

課題2：元の問題の最適解が求めた自己双対型線形計画問題の実行可能解になっていることを確認してください。

演習問題

主問題は2変数

minimize

$z = x_1 + 2x_2$

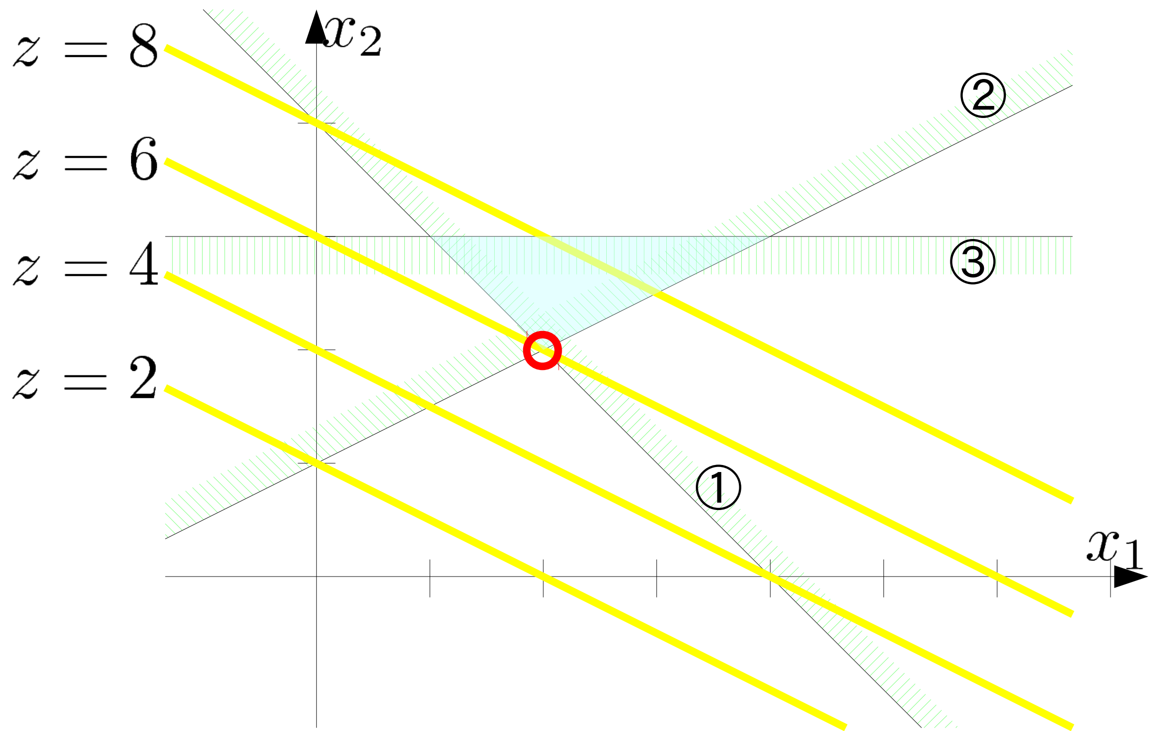
subject to

① $x_1 + x_2 \geq 4$

② $x_2 - 2x_2 + 2 \leq 0$

③ $x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$



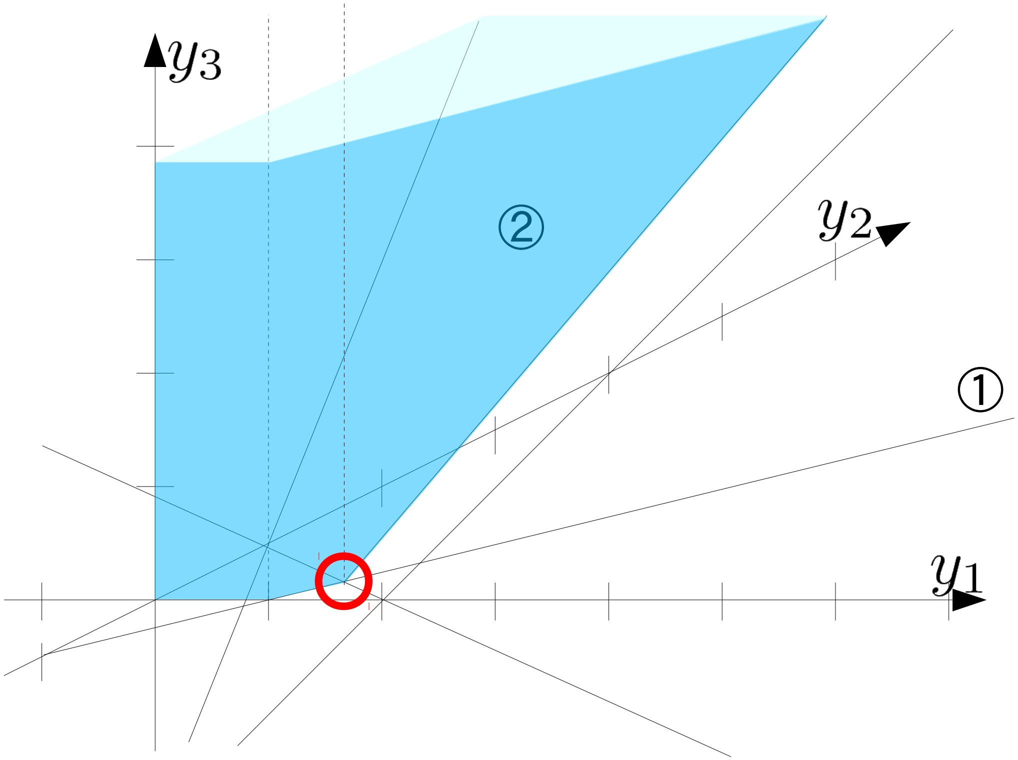
最適解:

$$z = 6, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 1, x_1 = 2, x_2 = 2$$

演習問題

双対問題は3変数

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \\ &w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\ &\text{subject to} \\ ① \ &y_1 - y_2 \leq 1 \\ ② \ &y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2 \\ &y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$



最適解：

$$w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$$