

2015数理計画法 情報工学科

- 履修登録済みの方、
「自分の名前と学生証番号のある解答用紙」
今日の「授業資料」
をとり、席についてください。
- 履修登録していない方、
「名前・学生証番号が空欄の解答用紙」
を岡野から受け取ってください。
今日の「授業資料」
をとり、席についてください。
- それ以外の方は岡野に問合せてください。
- 授業資料は両面、解答用紙は片面を使います。
- 練習問題の解答提出を出席記録とします。

授業資料の配布について

- ウェブサイトで授業資料と授業で使ったスライドを配布します。

<http://comp.cs.ehime-u.ac.jp/~okano/mathpro/>

- 授業資料は事前にダウンロードしてください。
- 必要であれば、各自で印刷してください。

練習問題の解答について

- 練習問題の解答は
 - 配布された用紙の片面に記入してください。
 - 授業時間の終わりに提出されたものを出席の記録とします。
 - 成績評価の対象となります。(40%)
 - 再提出が可能です。
- 練習問題解答の再提出は
 - 専用の用紙をウェブサイトからダウンロードしてください。
 - 欠席回の方は次の出席回に提出してください。
 - 出席回の方は別途定める再提出日にまとめて提出してください。

2015数理計画法

学習教育目標と科目との対応について

学習・教育目標(C):

数学、自然科学等の基礎的知識と情報工学に関する専門的な知識を有し、それらを情報社会における諸問題の探求・解決へ自主的・継続的に応用できる人材を育成する。

キーワード： 離散数学および確率・統計を含めた数学的知識

1. 線形計画問題を標準形に定式化し、単体法および関連する解法を用いて最適解を求めることができる。
2. 線形計画法における双対性について理解し、線形計画問題の解法に応用できる。
3. 線形計画法における自己双対型内点法を理解し、問題の解法に適用できる。

授業の内容・スケジュール：

第1回：数理計画問題・線形計画問題とは何か	10月6日
第2回：線形計画問題の標準形	10月20日
第3回：単体法	10月27日
第4回：単体法の実践	11月10日
第5回：単体法の2段解法	11月17日
第6回：罰則付単体法	11月24日
第7回：線形計画問題の行列表現と双対問題	12月1日
第8回：双対問題と双対定理・相補性定理	12月8日
第9回：線形計画問題の図形的理解	12月15日
第10回：双対定理・相補性定理の応用	12月22日
第11回：内点法1	1月12日
第12回：内点法2	1月19日
第13回：演習	1月26日
第14回：期末試験(筆記試験、持込不可)	2月2日
第15回：まとめ	2月9日

教科書・参考書

- 教科書:田村明久・村松正和「最適化法」
(共立出版, 2002年, 定価2900円+税)
 - 1章,2章を教科書に用いる.
- 参考書:金谷健一「これなら分かる最適化数学」
共立出版、2005年、
- 参考書:伊理正夫「線形計画法」
共立出版、1986年、
- 参考書:今野浩「カーマーカー特許とソフトウェア
:数学は特許になるか」
中央公論社、1995年、



教科書:

田村明久・村松正和「最適化法」
(共立出版, 2002年, 定価2900円+税)

1章, 2章を教科書に用いる.

もくじ

1. 最適化問題	1
1.1 最適化問題	1
1.2 線形計画問題	3
1.3 凸計画問題	5
1.4 非線形計画問題	6
1.5 変分問題	8
1.6 整数計画問題, 組合せ最適化問題	8
1.7 本書の構成	10
2. 線形計画	12
2.1 線形計画問題とその標準形	13
2.2 双対問題	17
2.3 諸定理	21
2.3.1 基本定理	21
2.3.2 双対定理	22
2.3.3 相補性定理	24
2.3.4 自己双対形線形計画問題	25
2.3.5 双対定理と Farkas の補題	27
2.4 単体法	31
2.4.1 原点が許容な問題に対する単体法	31

iv もくじ	
2.4.2 巡回	38
2.4.3 最小添字規則	38
2.4.4 その他のピボット列選択規則	40
2.4.5 2段階単体法	41
2.4.6 改訂単体法	45
2.4.7 辞書の双対性と双対単体法	47
2.4.8 感度分析	52
2.5 線形計画問題と多面体	54
2.6 自己双対型内点法	58
2.6.1 内点法概説	59
2.6.2 対数バリア関数	61
2.6.3 内点許容解存在の仮定	62
2.6.4 中心パスと強相補性最適解	65
2.6.5 アルゴリズム	68
2.6.6 真の最適解の求め方	72
2.7 低次元問題	76
練習問題	80
3. 非線形計画	85
3.1 非線形計画の基礎	87
3.1.1 非線形関数	87
3.1.2 凸集合	90
3.1.3 凸関数	93
3.2 制約なし最適化	97
3.2.1 制約なし最適化と最適性条件	97
3.2.2 制約なし最適化の解法 1: 最急降下法	102
3.2.3 制約なし最適化の解法 2: ニュートン法	105
3.2.4 大域的収束	109
3.2.5 局所的収束	113

3.2.6	直線探索について	115
3.2.7	制約なし最適化の解法 3: 準ニュートン法	119
3.2.8	制約なし最適化の解法 4: 共役方向法	122
3.3	制約つき最適化	125
3.3.1	制約つき最適化の例題	125
3.3.2	制約つき最適化の最適性条件	131
3.3.3	ラグランジュ関数と双対理論	140
3.3.4	制約つき最適化の解法 1: ペナルティ関数法と バリア関数法	146
3.3.5	制約つき最適化の解法 2: 内点法	150
3.3.6	制約つき最適化の解法 3: 逐次 2 次計画法	156
3.4	大域的最適化	160
	練習問題	162
4.	錐線形計画	166
4.1	錐線形計画問題	166
4.2	Farkas の補題と双対定理	170
4.3	半正定値計画	176
4.4	半正定値計画に対する主双対内点法	179
4.5	半正定値計画の組合せ最適化への応用	188
	練習問題	194
付録	数学的準備	196
A.1	記号	196
A.2	開集合, 閉集合	196
A.3	線形部分空間, 凸錐, アフィン部分空間, 凸集合	197
A.4	行列	200
A.5	固有値, 正定値性, 半正定値性	202

A.6	関数の漸近的挙動	203
A.7	アルゴリズムの評価	203
	参考文献	206
	練習問題解答	209
	索引	228

「著作権保護コンテンツ」

これなら分かる 最適化数学

基礎原理から計算手法まで

金谷健一 著

共立出版

「著作権保護コンテンツ」

線形計画法

伊理正夫 著

共立出版株式会社

今野 浩著

カーマーカー特許と ソフトウェア

数学は特許になるか



知的財産権をめぐっ
て学界・実業界が繰り
広げる過激なゲーム

カーマーカー特許と 東京工業大学教授
ソフトウェア 今野 浩著

中公新書 1278

定価680円
(本体660円)

数理計画法

第1回: 数理計画問題・線形計画問題とは何か

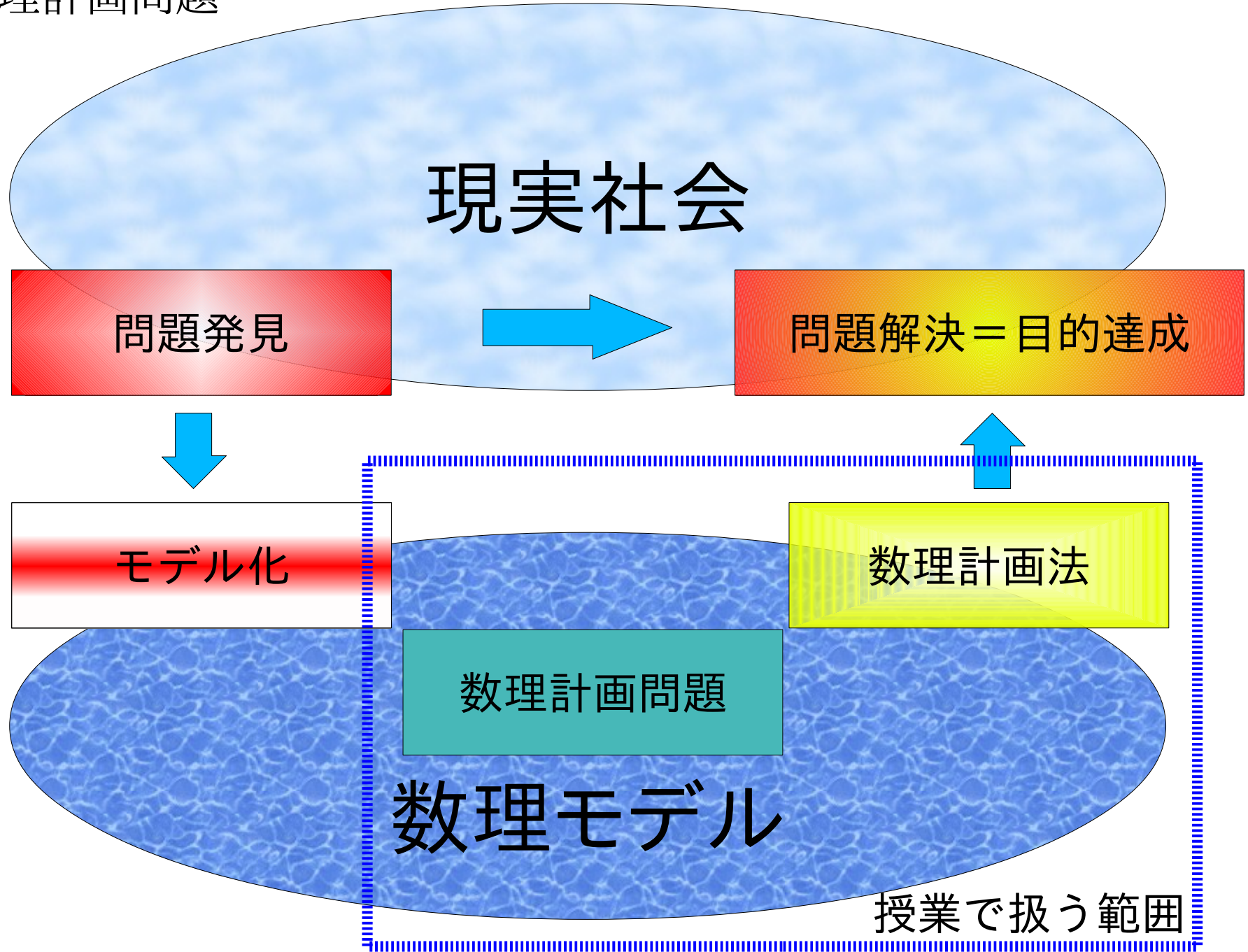
数理計画法 = 数理計画問題 - 問題 + 法
線形計画法 = 線形計画問題 - 問題 + 法

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z = f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{subject to} & g(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (x_1, \dots, x_n)^T \in X \end{array}$$

与えられた制約式のもとである関数を最大化する問題

線形計画問題 \subset 数理計画問題 \subset 最適化問題

数理計画問題



数理計画法による目的達成の手順

1. 問題発見

操作できるものは何か(変数と制約式)

得られた結果をどう評価するのか(目的関数)

2. モデル化

同じ問題でもモデル化の方法は多様

違う問題でも類似数理モデルに共通の方法が使える

3. 数理計画法

問題の種類に応じた方法、効率の良い方法、コストの低い方法、手間の多い方法…

4. 目的達成

最適解を実行することはできるのか、
得られる結果は目的に合ったものか、

数理モデルと数理計画問題の分類

- 数理モデル作成の例
- 数理計画問題の類別
- 線形計画問題とは何か

数理モデル作成の例

ミックスジュース5Lあたりの原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題: 利益を最大化する2種類のミックス
ジュースの生産量は?

$$\begin{array}{ll} \text{変数} & : \text{生産量} \quad \left. \begin{array}{l} \text{トロピカルミックス} \quad x_1 \times 5 \text{ [L]} \\ \text{フレッシュミックス} \quad x_2 \times 5 \text{ [L]} \end{array} \right\} \\ \text{制約式} & : \text{供給量} \quad \left. \begin{array}{l} \text{マンゴー液} \quad 3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3 \text{ [L]} \\ \text{オレンジ液} \quad x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3 \text{ [L]} \end{array} \right\} \\ \text{目的関数} & : \text{利益} \quad 600x_1 + 500x_2 \end{array}$$

負の生産量が無いことに注意

数理計画問題の表現と用語

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

最大化(minimize:最小化)

目的関数(objective func.)

制約式(constraints)

最適解(optimal solution) 目的関数の最大値を与える解

※大域的/局所的最適解: あとで、

最適値(optimal value) 最適解をとる目的関数の値

実行可能解(feasible solution) 制約式を満たす解

実行可能領域(feasible region) 実行可能解の集合

数理計画問題の表現と分類

- 変数の性質による分類
 - 連続型：(実数)
 - 離散型：(整数)
- 条件(制約式、目的関数)の性質による分類
線形、非線形、微分可・不可、連続、不連続、
区分線形…

授業で扱うのは、
連続変数による線形関数の数理計画問題

→線形計画問題

線形計画問題と素朴な解法

ミックスジュース5Lあたりの原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題:利益を最大化する2種類のミックス
ジュースの生産量は?

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

変数:生産量

トロピカルミックス x_1 ($\times 5$ [L])
フレッシュミックス x_2 ($\times 5$ [L])

目的関数も制約式も全て
1次関数であり線形

グラフを利用した解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

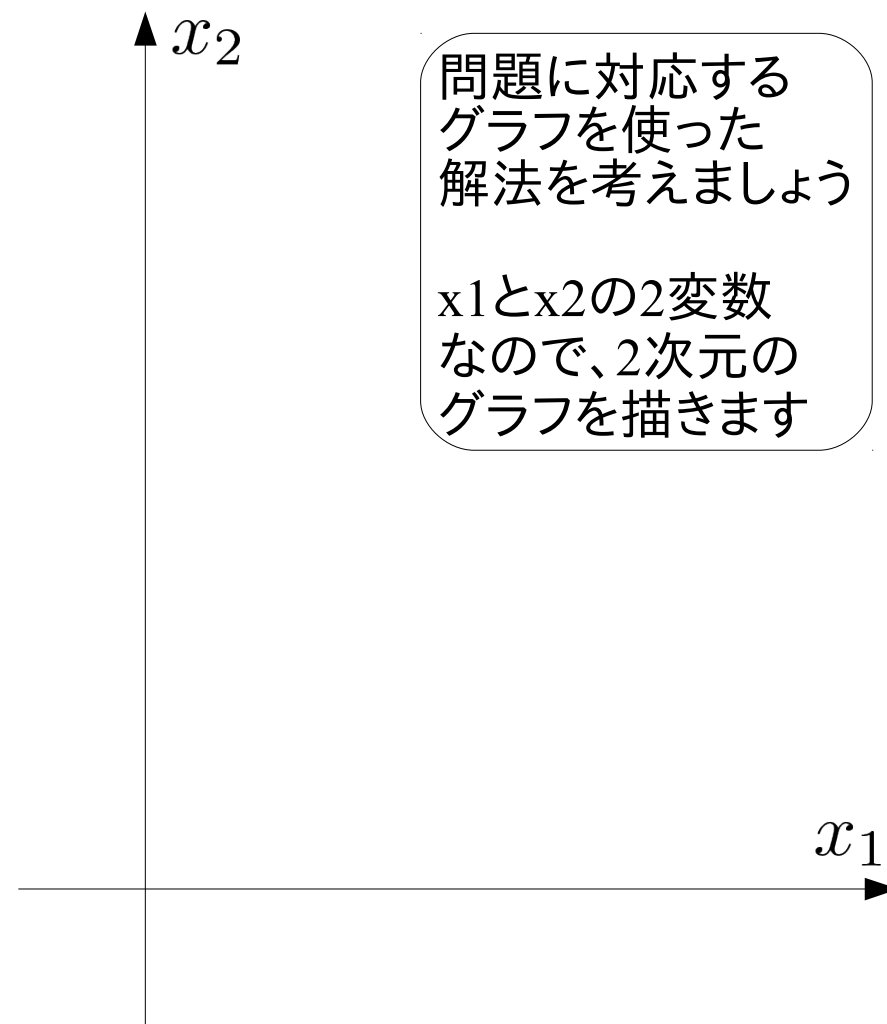
subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



問題に対応する
グラフを使った
解法を考えましょう

x_1 と x_2 の2変数
なので、2次元の
グラフを描きます

グラフを利用した解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$

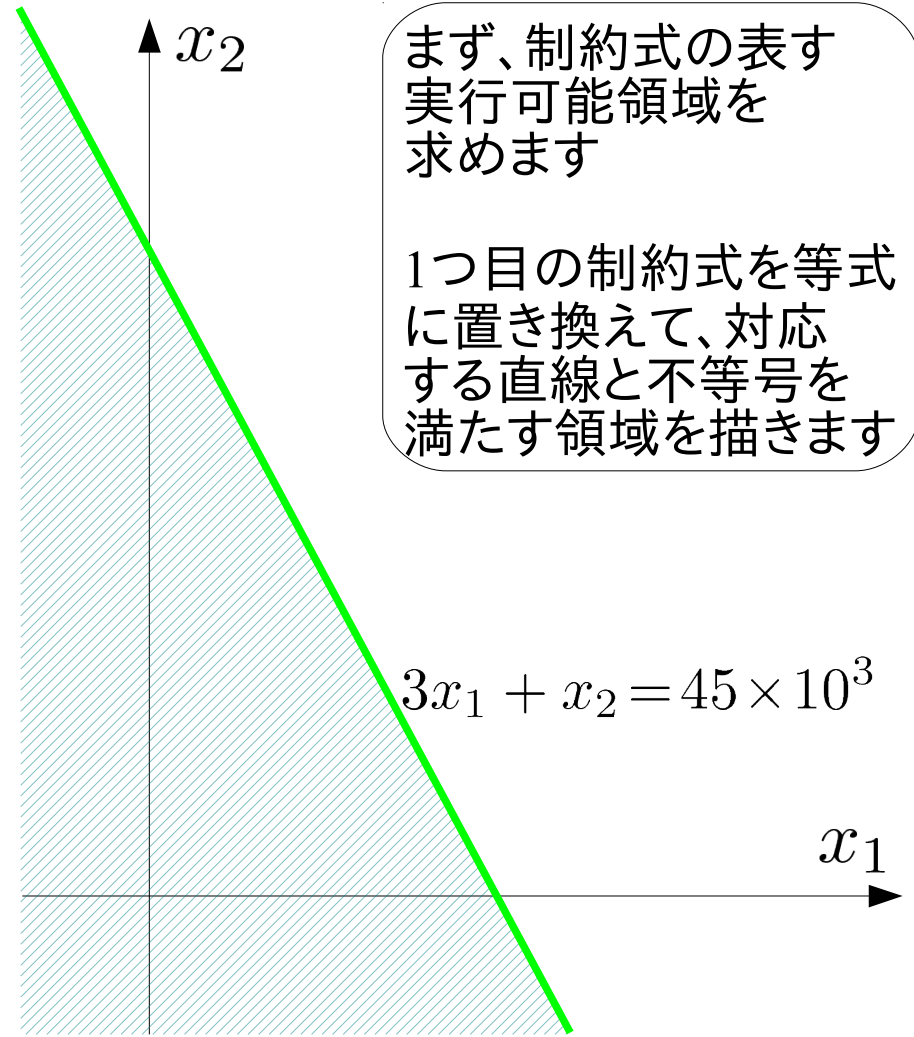
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$$



グラフを利用した解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$

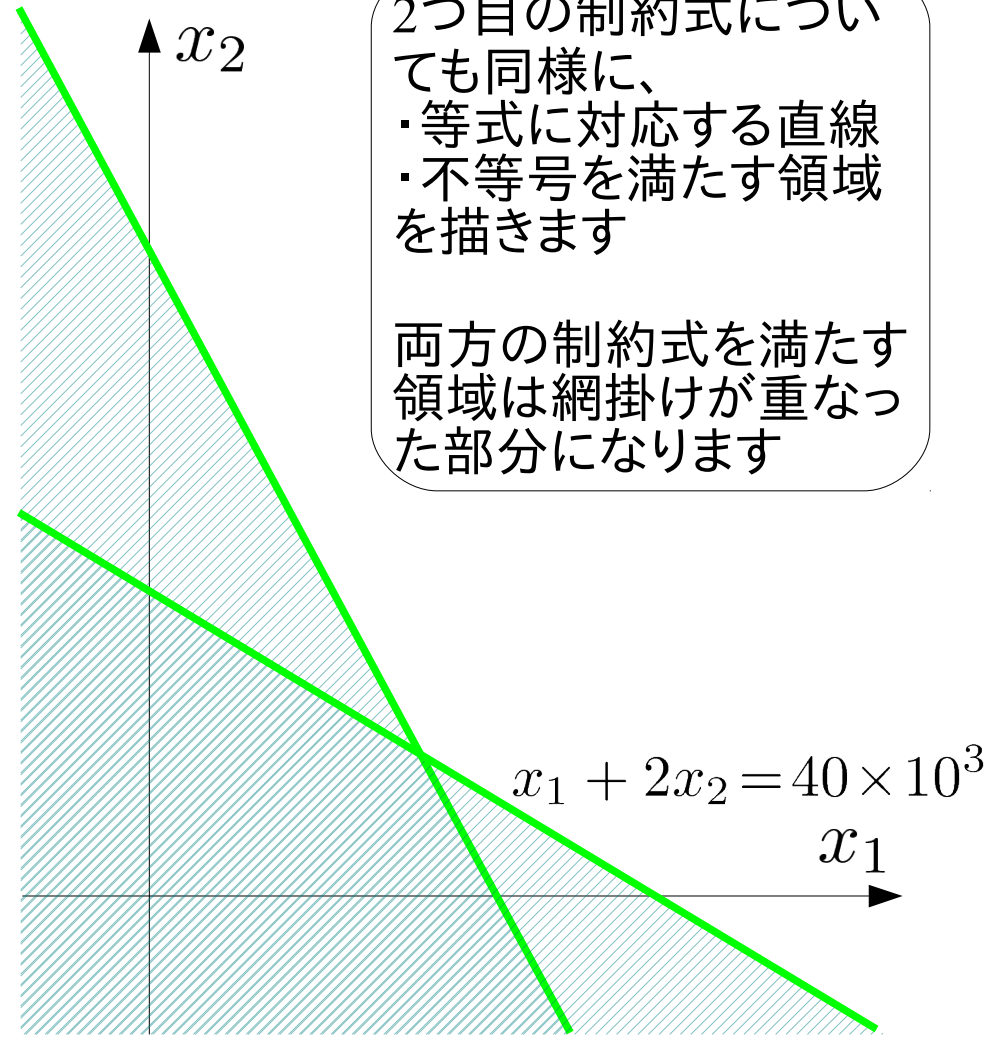
$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$$

$$x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$$



グラフを利用した解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

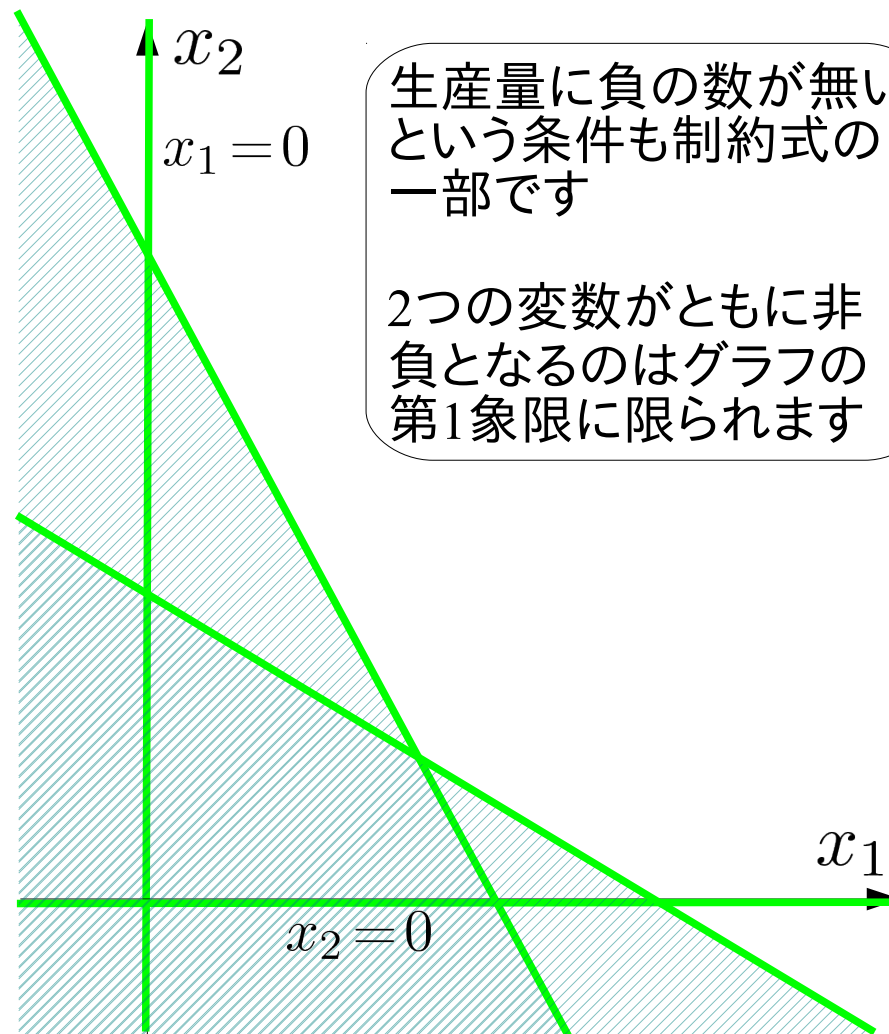
制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$$

$$x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$



グラフを利用した解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

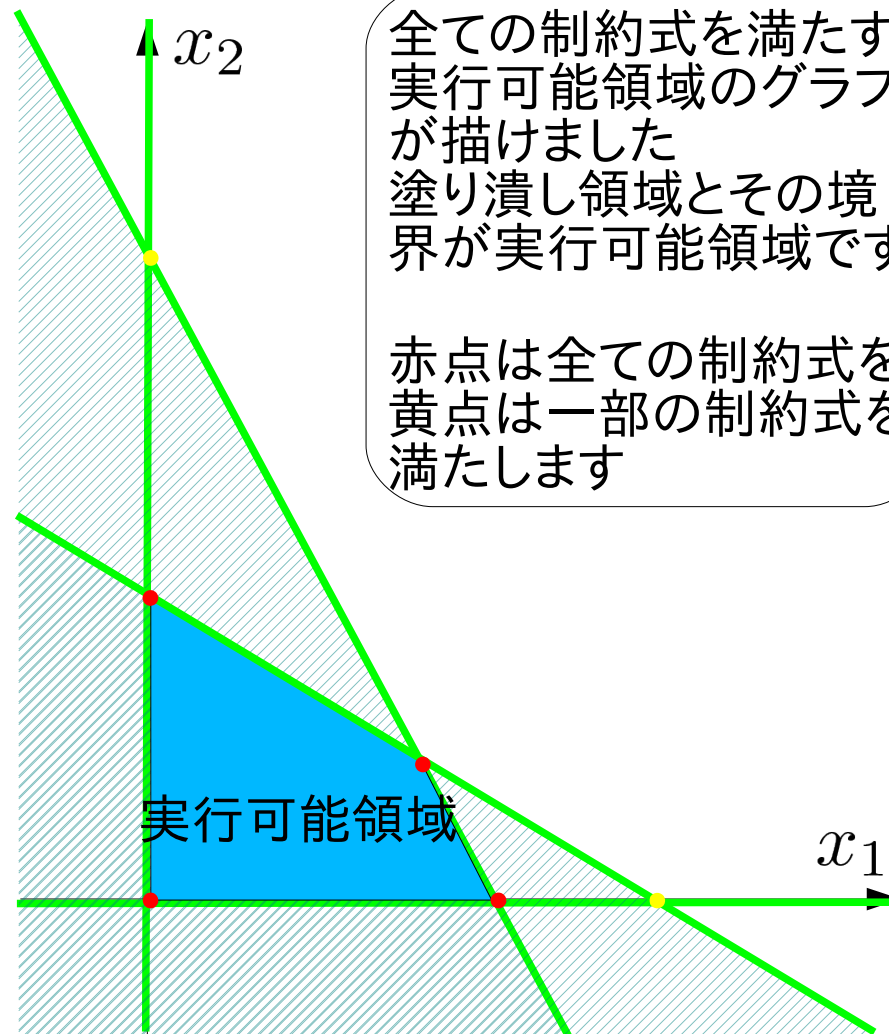
制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$$

$$x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$



グラフを利用した解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

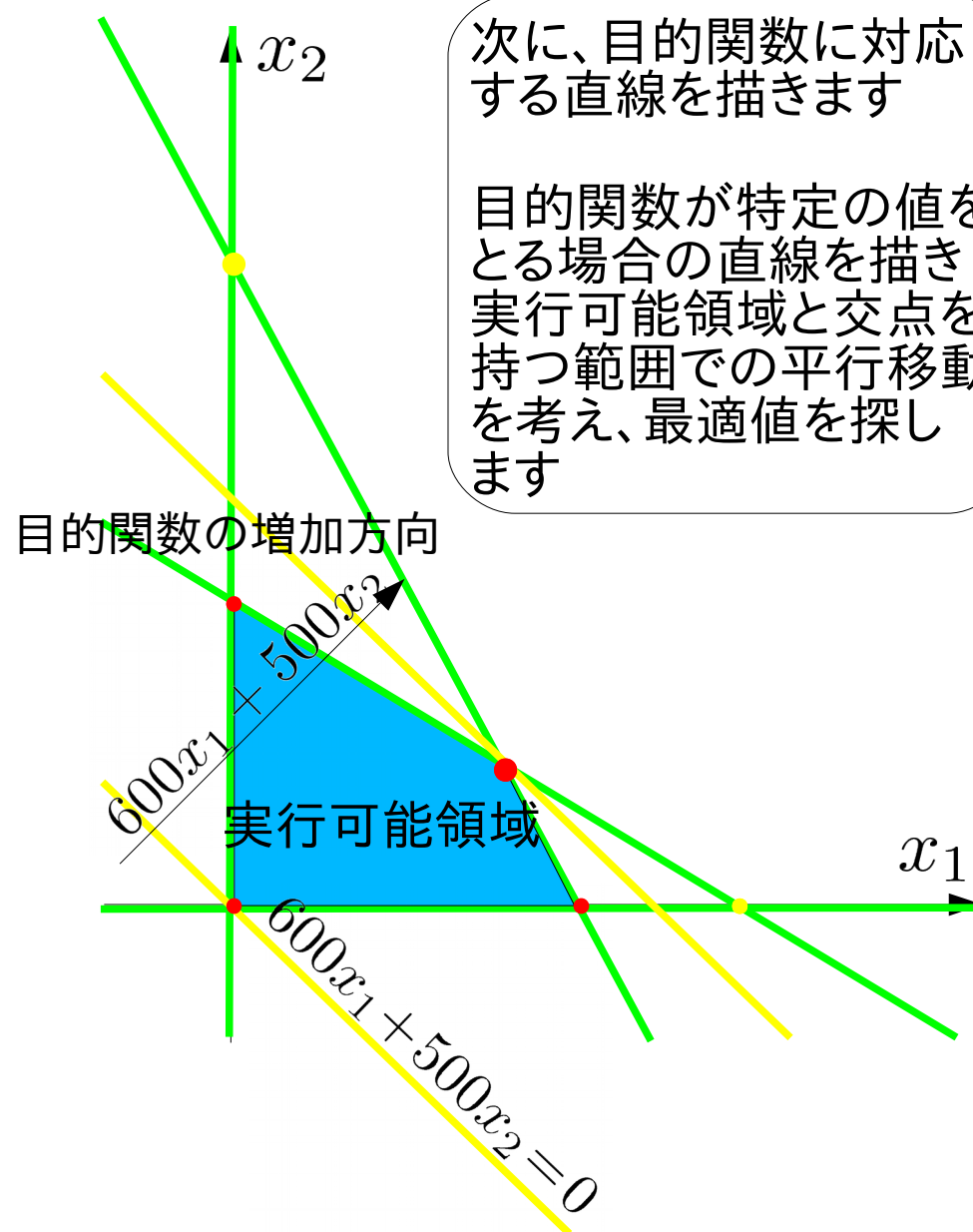
制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$$

$$x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$



次に、目的関数に対応する直線を描きます

目的関数が特定の値をとる場合の直線を描き実行可能領域と交点を持つ範囲での平行移動を考え、最適値を探します

目的関数の増加方向

実行可能領域

$600x_1 + 500x_2 = 0$

グラフを利用した解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

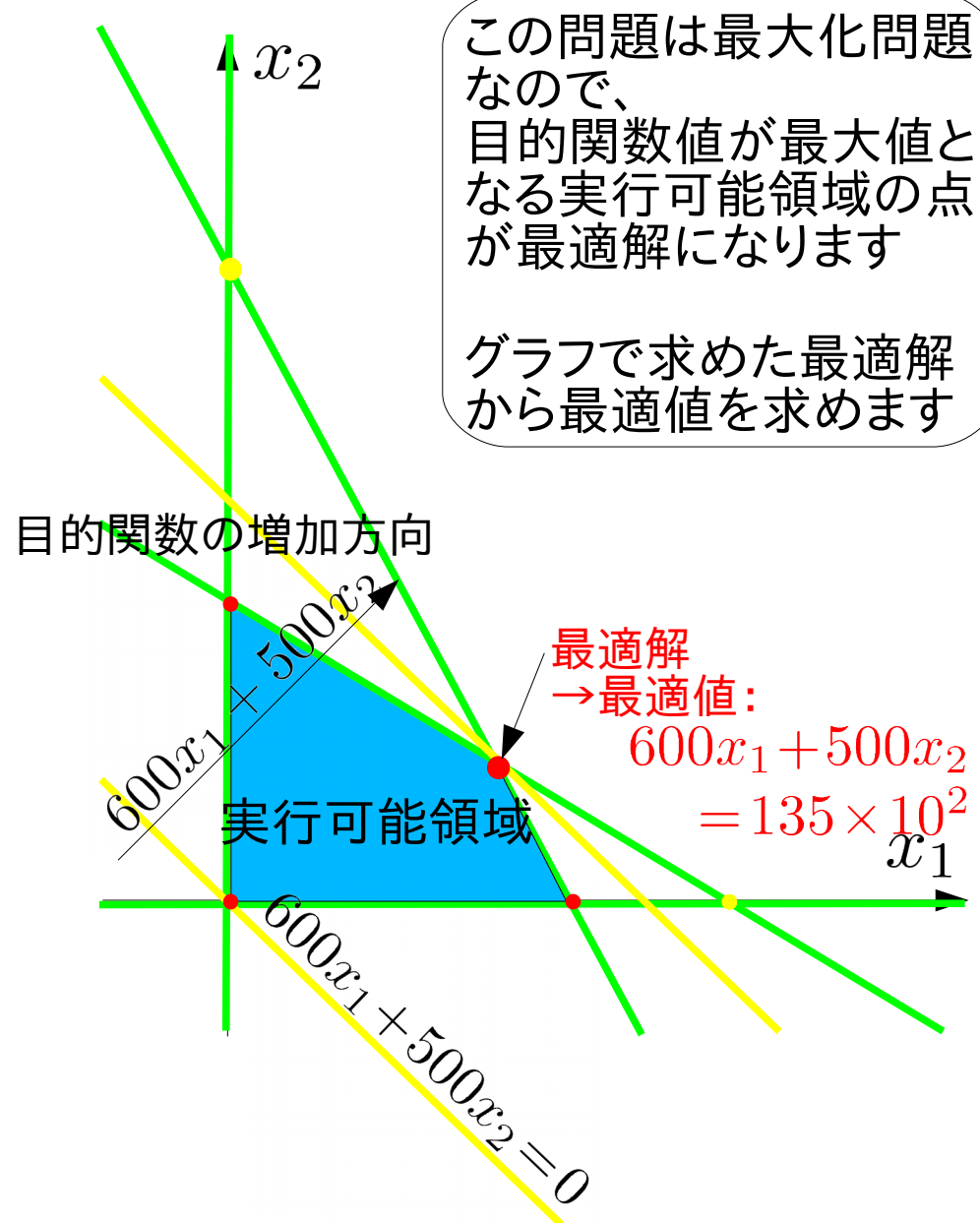
制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$$

$$x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$



グラフを利用した解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

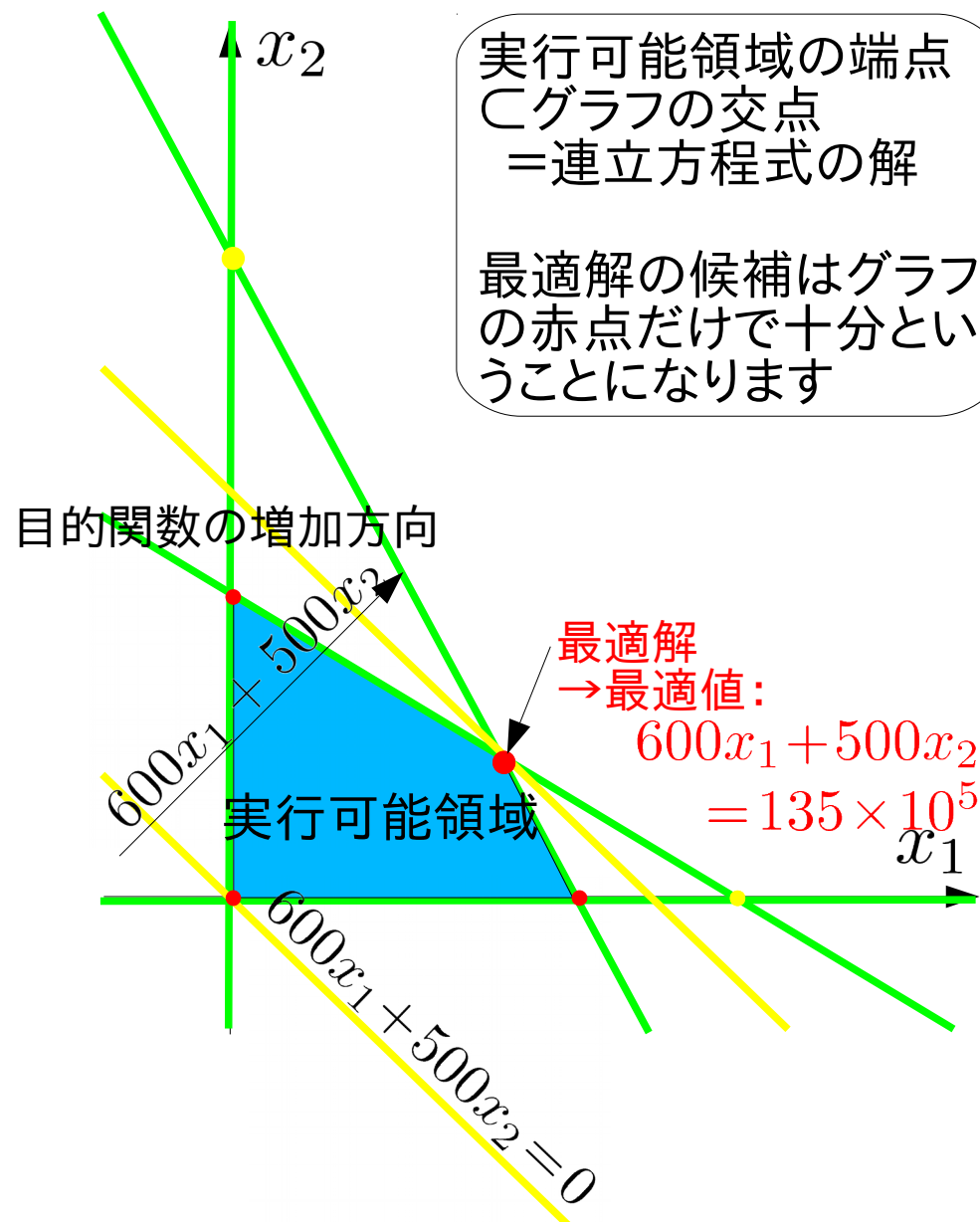
制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$$

$$x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$



グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

最適解が必ずグラフの
交点に含まれるなら、

グラフの交点
= 連立方程式の解

だけを調べれば十分だ
ということになります

制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$$

$$x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$600x_1$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2$$

$$x_1 + 2x_2$$

全ての交点を調べる
ために方程式に番号
を振って交点を求める
組合せを書き出します

2変数/4制約式なので
2つずつ組合せて
 $4C2=6$ 通り
の組合せ=交点となり
ます

方程式				
①②				
①③				
①④				
②③				
②④				
③④				

制約式に対応する方程式

① $3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$

② $x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$

③ $x_1 = 0$

④ $x_2 = 0$

グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

方程式	x_1 ($\times 10^3$)	x_2 ($\times 10^3$)	実行可能?
①②	10	15	○
①③	0	45	×
①④	15	0	○
②③	0	20	○
②④	40	0	×
③④	0	0	○

制約式に対応する方程式

$$\textcircled{1} \quad 3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$$

$$\textcircled{2} \quad x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$$

$$\textcircled{3} \quad x_1 = 0$$

$$\textcircled{4} \quad x_2 = 0$$

組合せた方程式をそれぞれ解いて全ての交点を求めます

交点の値を制約式に代入して全ての制約式を満たすかどうかを交点毎に調べます

グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

制約式に対応する方程式

① $3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$

② $x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$

③ $x_1 = 0$

④ $x_2 = 0$

方程式	x_1 ($\times 10^3$)	x_2	目的関数値	実行 可能?
①②	10	15	13500000	○
①③	0	45		×
①④	15	0	9000000	○
②③	0	20	10000000	○
②④	40	0		×
③④	0	0	0	○

全ての制約式を満たす交点だけを調べれば良いので実行可能な交点の目的関数値を求めます
グラフを使う方法の赤点だけを調べることとなります

目的関数値を比較して最適解・最適値を見つけます

グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

制約式に対応する方程式

① $3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$

② $x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$

③ $x_1 = 0$

④ $x_2 = 0$

方程式	x_1 ($\times 10^3$)	x_2	目的関数値	実行可能?
①②	10	15	13500000	○
①③	0	45		×
①④	15	0	9000000	○
②③	0	20	10000000	○
②④	40	0		×
③④	0	0	0	○

1. 制約式に対応する方程式と交点を定める方程式の組合せを全て書き出す
2. 交点を求め実行可能領域にあることを確認する
3. 実行可能な交点で目的関数値を求めたなかから最適値を探す

線形計画問題の素朴な解法

グラフを用いた解法

- 2~3変数までの問題に適用可能
3変数の問題ではグラフは3次元
実行可能領域は多面体
現実社会の問題は数十~数百万変数
- 計算機アルゴリズムとして構成し難い

交点を総当たりする解法

- 多変数の問題に適用可能
n変数の問題でn元連立方程式を問いて交点を求める
機械的に交点を計算するアルゴリズムが考えられる
- 交点の実行可能性を調べる手間がある
- 変数が増えると無駄な交点計算が増える

次回：線形計画問題の標準形

次々回：単体法

演習問題1

A4用紙を横に使う、左上に名前・学年・学籍番号を記入

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題:利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は?

上記の最適化問題について、
課題1: maximize ... subject to ... の形式で
線形計画問題を表現しなさい。

課題2: グラフを用いる解法・交点を総当たりする解法
で最適解を求めなさい。

課題3: 授業の感想・意見があれば書いてください。

グラフを利用した解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800$$

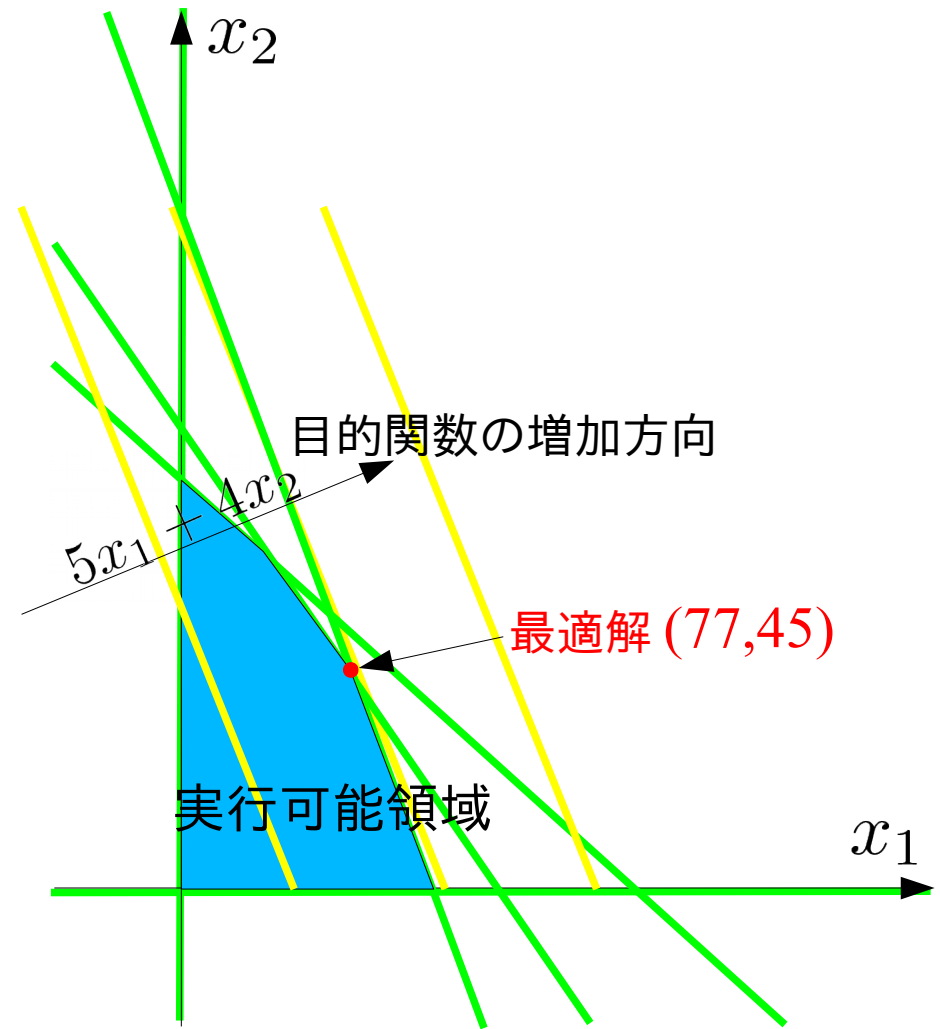
$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

最適解：コーヒ飲料 77kg

コーヒー牛乳 45kg

最適値：565千円



グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$\textcircled{1} \quad 15x_1 + 11x_2 = 1650$$

$$\textcircled{2} \quad 10x_1 + 14x_2 = 1400$$

$$\textcircled{3} \quad 9x_1 + 20x_2 = 1800$$

$$\textcircled{4} \quad x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} \quad x_2 = 0$$

方程式	x_1	x_2	目的関数値	実行可能?
①②	77	45	565	○
①③				×
①④				×
①⑤	110	0	550	○
②③	1400/37	2700/37	17800/37	○
②④				×
②⑤				×
③④	0	90	360	○
③⑤				×
④⑤	0	0	0	○

次回の予定と授業資料

- 次回：線形計画問題の標準形
今回の内容と演習課題の復習から始めます。
- ウェブサイトで授業資料を配布します。

<http://comp.cs.ehime-u.ac.jp/~okano/mathpro/>