

数理計画法

第7回：線形計画問題の行列表現と単体法

復習：演習問題7

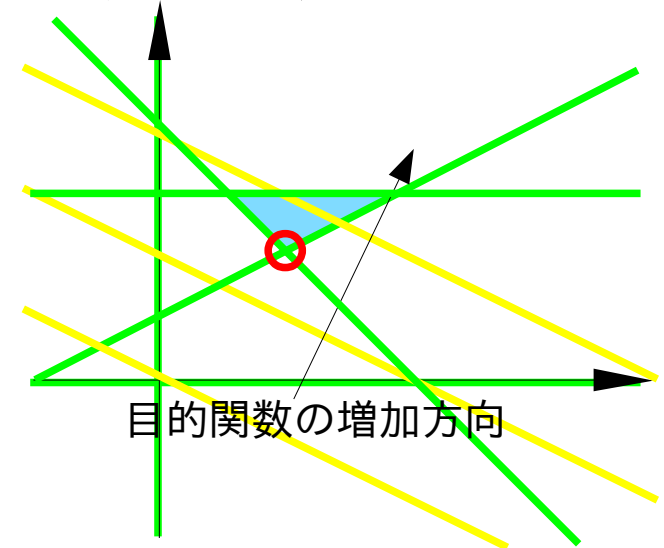
課題：次の線形計画問題を罰則付単体法を用いて解く

$$\text{maximize } x_1 + 2x_2$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 4, \quad x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0$$

$$x_2 \leq 3, \quad x_1, x_2 \geq 0$$



注意：原点は実行可能領域ではありません

ヒント：

$$\begin{array}{ll} \min. & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min. & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

復習：演習問題7

課題：次の線形計画問題を罰則付単体法を用いて解く

$$\text{minimize } z(= -x_1 - 2x_2)$$

subject to

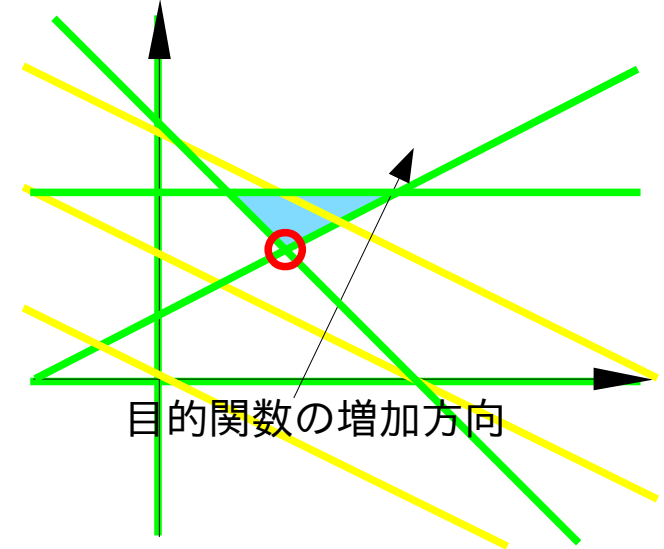
$$x_1 + x_2 - x_3 = 4$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_4 = 2$$

$$x_2 + x_5 = 3$$

$$z + x_1 + 2x_2 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$



ヒント：

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

復習: 2段階単体法と罰則付単体法

- 2段階単体法

まず、 z^* を最小化する

$z^*=0$ を得られたら

z を最小化して

元の問題の最適解を得る

minimize $z^* \rightarrow 0 \Rightarrow$ minimize z
subject to

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2$$

$$x_2 + x_5 = 3$$

$$z + x_1 + 2x_2 = 0$$

$$z^* + 3x_2 - x_3 - x_4 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

- 罰則付単体法

十分大きな M により、

$z + Mz^*$ の最小化で、

$z^*=0$, z の最小化が

同時に実現する

minimize $\tilde{z} = z + Mz^*$

subject to

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2$$

$$x_2 + x_5 = 3$$

$$\tilde{z} + x_1 + (3M+2)x_2 - Mx_3 - Mx_4 = 6M$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

復習: 2段階単体法と罰則付単体法

- 2段階単体法

まず、 z^* を最小化する

$z^*=0$ を得られたら

z を最小化して

元の問題の最適解を得る

minimize $z^* \rightarrow 0 \Rightarrow$ minimize z
subject to

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2$$

$$x_2 + x_5 = 3$$

$$z + x_1 + 2x_2 = 0$$

$$z^* + 3x_2 - x_3 - x_4 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

z, z^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	定数
	1	1	-1			1		4
	-1	2		-1			1	2
		1			1			3
1	1	2						0
1		3	-1	-1				6

復習: 2段階単体法と罰則付単体法

z, z^*	x1 非	x2 非	x3 非	x4 非	x5	x6	x7	定数
	1	1	-1			1		4
	-1	2		-1			1	2
		1			1			3
1		3	-1	-1				6
1	1	2						0

人工問題の最初のsimplex表
最下段は元の問題の目的関数

復習: 2段階単体法と罰則付単体法

z, z^*	x1 非	x2 非	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数
	1	1	-1			1		4 / 1 = 4
	-1	2		-1			1	2 / 2 = 1
		1			1			3 / 1 = 3
1		3	-1	-1				6
1	1	2						0
z, z^*	x1	x2	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数
			0					
			1					
			0					
			0					
			0					

交換する基底/非基底変数を
決め、連立方程式を解く

復習: 2段階単体法と罰則付単体法

z, z^*	x1 非	x2 非	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数		
X-1	1/2	1	-1	1/2			1	-1/2	-1	4/1=4
X1/2	-1/2	1	2	-1/2			1/2	1	2	2 /2=1
X-1	1/2	-1	1	1/2		1	-1/2	-1	3	3/1=3
X-3	1	3/2	-3	3/2	-1		-3/2	-3	6	
X-2	1	1	1	-2	2		1	-1	-2	0
z, z^*	x1 非	x2	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数		
	3/2		0	-1	1/2		1	-1/2	3	
	-1/2		1		-1/2			1/2	1	
	1/2		0		1/2	1		-1/2	2	
1	3/2		0	-1	1/2			-3/2	3	
1	2		0		1			-1	-2	

交点 $x_1=0, x_2=1$ へ移動

$z^*=3 \Rightarrow$ 元の問題の実行可能領域ではない

復習: 2段階単体法と罰則付単体法

z, z^*	x1 非	x2 非	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数			
X-1	1/2	1	-1	1	-1	1/2	1	-1/2	-1	4	$4/1=4$
X1/2	-1/2	1	1	1	-1	1/2	1	1/2	1	1	$1/2=1$
X-1	1/2	-1	1	1	-1	1/2	1	-1/2	-1	4	$4/1=4$
X-3	1	3/2	-3	3	-1	3/2	1	-1/2	-1	4	$4/1=4$
X-2	1	1	1	-2	2	1	1	-1/2	-1	4	$4/1=4$
z, z^*	x1 非	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数			
X2/3	1	3/2	0	-2/3	1/3	2/3	-1/3	2	$2/(3/2)=4/3$		
X1/2	1/2	-1/2	1	-1/3	1/6	1/2	-1/6	1	$1/(-1/2) < 0$		
X-1/2	-1/2	1/2	0	1/3	-1/6	1/2	1/6	-1	$2/(1/2)=4$		
X-3/2	-3/2	3/2	0	1	-1	-1/2	1/2	-3	3		
X-2	1	-2	2	0	4/3	-2/3	1	-4	-2		
z, z^*	x1	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数			
		1	-2/3	1/3		2/3	-1/3	2			
		0	1	-1/3		1/3	1/3	2			
		0	1/3	1/3	1	-1/3	-1/3	1			
	1	0	0	0		-1	-1	0			
	1	0	4/3	1/3		-4/3	-1/3	-6			

2回目の交換は
 x1: 非基底 → 基底
 x6: 基底 → 非基底

復習: 2段階単体法と罰則付単体法

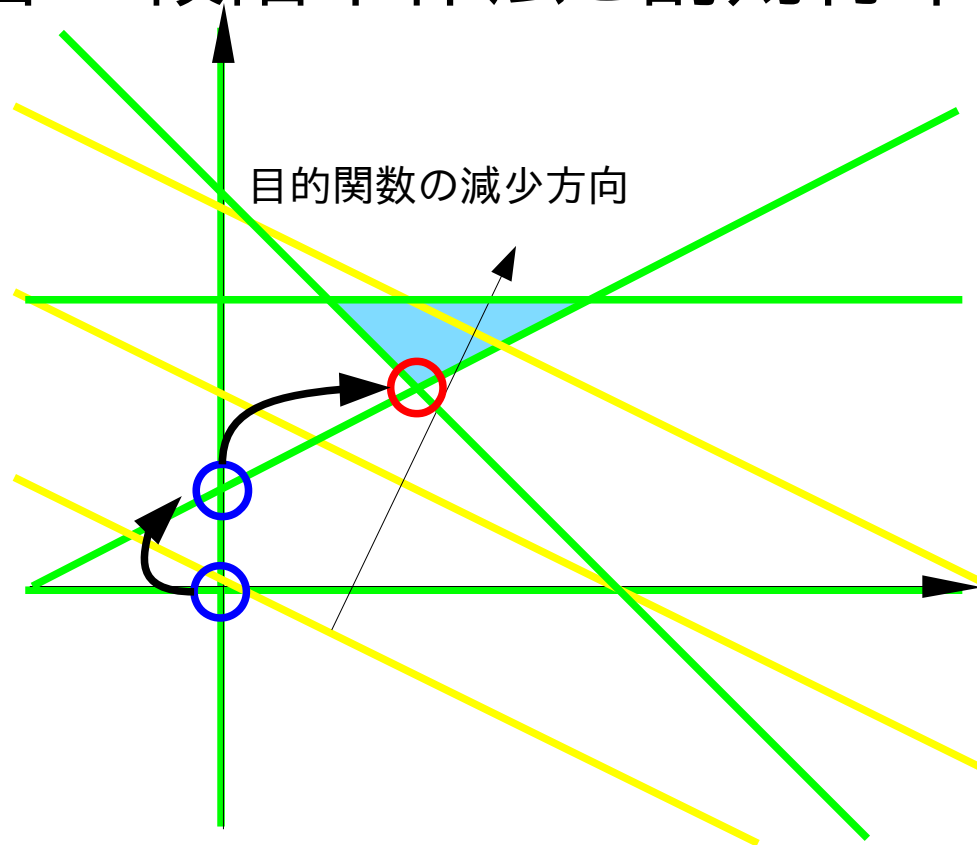
z, z^*	x_1 非	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	x_6	x_7 非	定数
$x-1$	1/2	1	-1	1	-1	1/2		1 -1/2 -1 4/1=4
$x1/2$	-1/2	1	1	1	-1/2	1	1	2 /2=1
$x-1$	1/2	-1	1	1	1/2			3/1=3
$x-3$	1	3/2	-3	3	-1	3/2		
$x-2$	1	1	1	-2	2	1		
z, z^*	x_1 非	x_2	x_3 非	x_4 非	x_5	x_6	x_7	定数
$x2/3$	1	3/2	0	-2/3	1/3			(3/2)=
$x1/2$	1/2	1/2	1	-1/3	1/6			(-1/2)<
$x-1/2$	-1/2	1/2	0	1/3	-1/6			(1/2)=
$x-3/2$	-3/2	3/2	0	1	-1	-1/2		
$x-2$	1	-2	2	0	4/3	-2/3	1	
z, z^*	x_1	x_2	x_3 非	x_4 非	x_5	x_6 非	x_7 非	定数
		1	-2/3	1/3		2/3	-1/3	2
		0	1	-1/3	-1/3	1/3	1/3	2
		0	1/3	1/3	1	-1/3	-1/3	1
1	0	0	0	0		-1	-1	0
1	0	0	4/3	1/3		-4/3	-1/3	-1

$x_1=2, x_2=2$ へ移動
 非基底変数の係数が非正となり、人工問題の最適解を得た。
 x_6, x_7 は非基底変数なので、
 $x^*=x_6+x_7=0 \Rightarrow$
 元の問題の実行可能解を得た

$x_1=2$
 $x_2=2$

実行可能領域

復習：2段階単体法と罰則付単体法

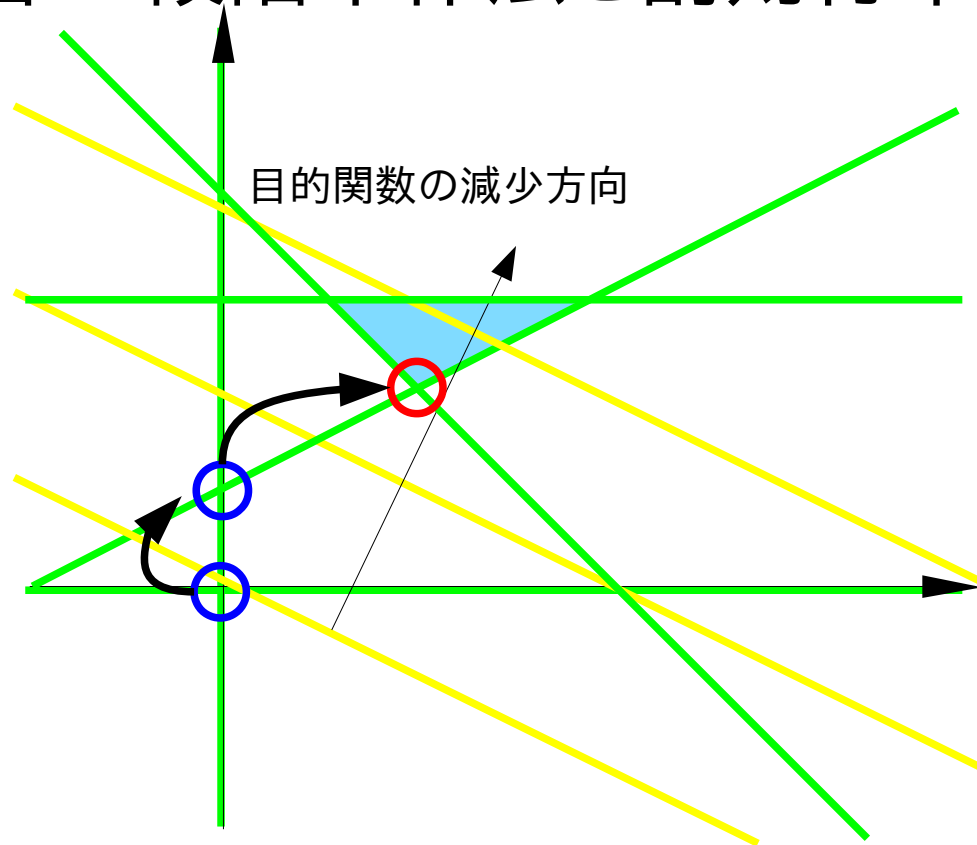


z, z^*	x_1	x_2	x_3 非	x_4 非	x_5	x_6 非	x_7 非	定数
		1	$-2/3$	$1/3$		$2/3$	$-1/3$	2
			1	$-1/3$	$-1/3$	$1/3$	$1/3$	2
			$1/3$	$1/3$	1	$-1/3$	$-1/3$	1
1						-1	-1	0
1			$4/3$	$1/3$		$-4/3$	$-1/3$	-6

$x_1=2$

$x_2=2$

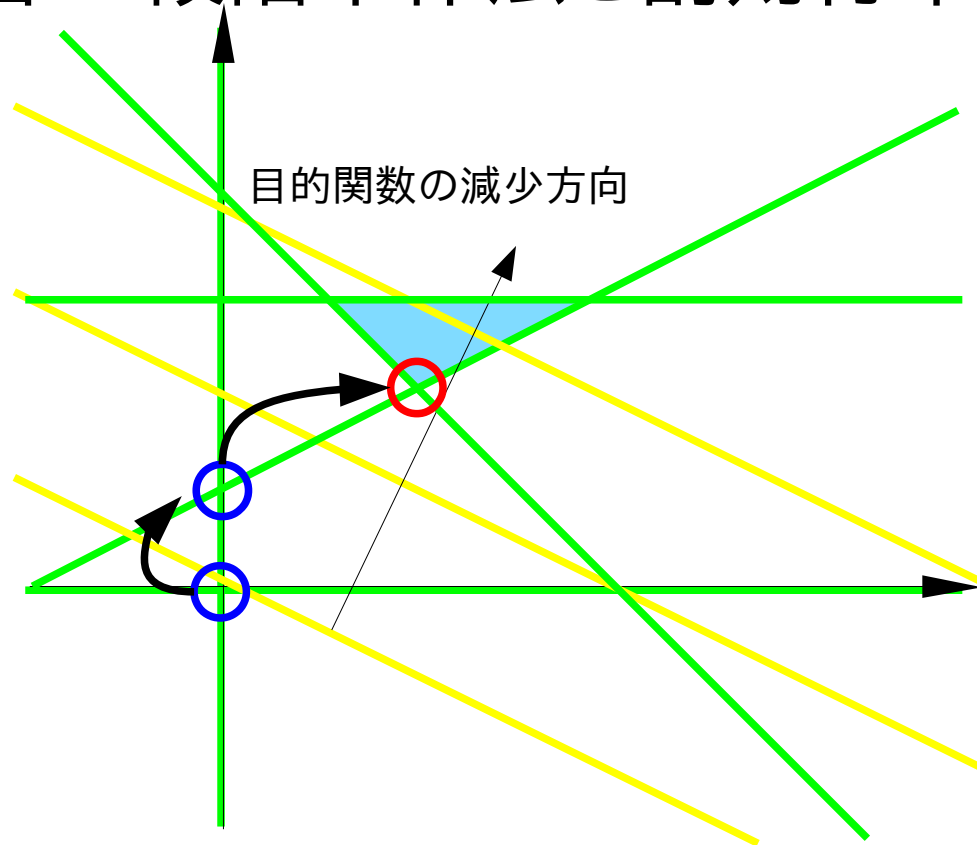
復習：2段階単体法と罰則付単体法



z, z^*	x_1	x_2	x_3 非	x_4 非	x_5	x_6 非	x_7 非	定数
	1		$-2/3$	$1/3$		$2/3$	$-1/3$	2
		1	$-1/3$	$-1/3$		$1/3$	$1/3$	2
			$1/3$	$1/3$	1	$-1/3$	$-1/3$	1
1						-1	-1	0
1			$4/3$	$1/3$		$-4/3$	$-1/3$	-6

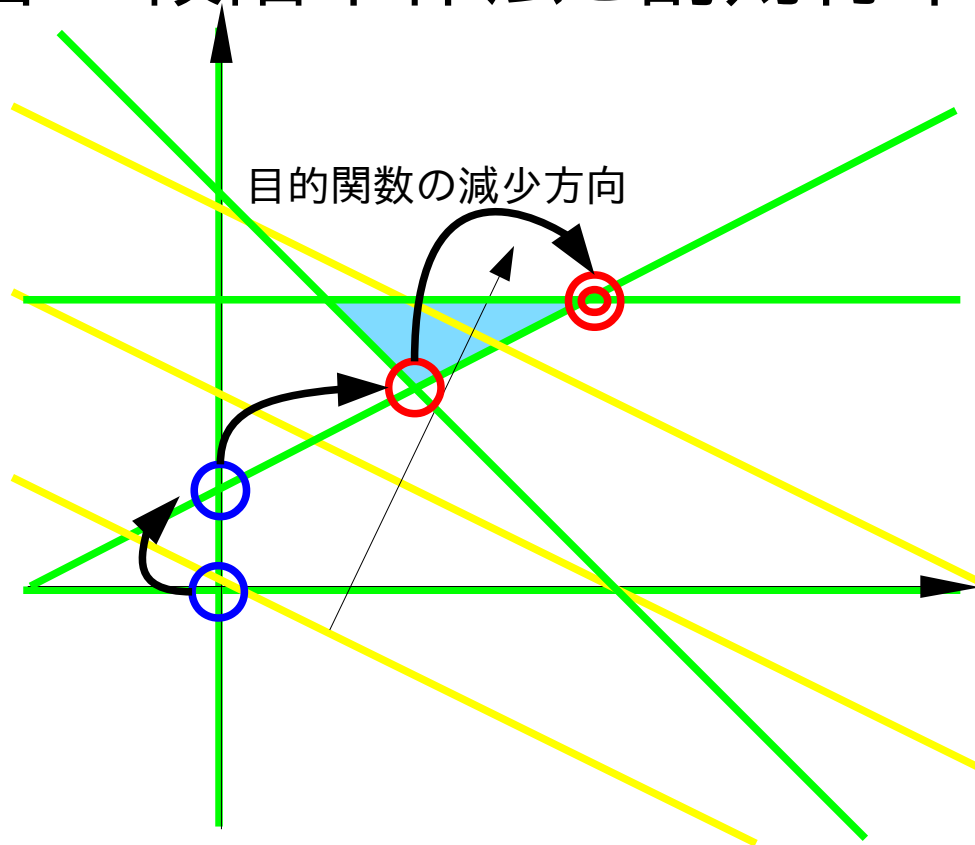
$x_1=2$
 $x_2=2$

復習: 2段階単体法と罰則付単体法



z, z^*	x_1	x_2	x_3 ※	x_4 非	x_5 非			定数
$\times 2/3$		1	$2/3$	$2/3$	$1/3$			2 2
$\times 1/3$			$1/3$	$1/3$	$1/3$	1		1 2
$\times 3$			1	$1/3$	1	$1/3$	3	1 $1/(1/3)=3$
$\times -4/3$			$-4/3$	$4/3$	$-4/3$	$1/3$	-4	-4 -6

復習：2段階単体法と罰則付単体法



z, z^*	x_1	x_2	x_3	x_4 非	x_5 非			定数
	1		0	1				4
		1	0		1			3
			1	1	4			3
1			0	-1	-4			-10

$x_1=4$

$x_2=3$

最適解

復習: 2段階単体法と罰則付単体法

- 罰則付単体法

十分大きな M により、
 $z + Mz^*$ の最小化で、
 $z^*=0$, z の最小化が
 同時に実現する

$$\text{minimize } \tilde{z} = z + Mz^*$$

subject to

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2$$

$$x_2 + x_5 = 3$$

$$\tilde{z} + x_1 + (3M+2)x_2 - Mx_3 - Mx_4 = 6M$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

z^{\sim}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	定数
		1	1	-1			1	4
		-1	2		-1			2
			1			1		3
1		$13M+2$		$-M$	$-M$			$6M$

復習: 2段階単体法と罰則付単体法

- 罰則付単体法

十分大きな M により、
 $z + Mz^*$ の最小化で、
 $z^*=0$, z の最小化が
 同時に実現する

$$\text{minimize } \tilde{z} = z + Mz^*$$

subject to

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2$$

$$x_2 + x_5 = 3$$

$$\tilde{z} + x_1 + (3M+2)x_2 - Mx_3 - Mx_4 = 6M$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

z^{\sim}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	定数
		1	1	-1			1	4
		-1	2		-1			2
			1			1		3
1	1	302	-100	-100				600

z, z^*	x1 非	x2 非	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数
	1	1	-1			1		4 / 1 = 4
	-1	2		-1			1	2 / 2 = 1
		1			1			3 / 1 = 3
1	1	302	-100	-100				600

z, z^*	x1 非	x2	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数
	1	1	-1			1		4
$\times 1/2$	-1/2	-1	2	-1/2	-1		1/2	1 1 2
		1			1			3
1	1	302	-100	-100				600

z, z^*	x1 非	x2 非	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数
$\times -1$	1/2	1	-1	1/2		1	-1/2	-1 4
	-1/2	1	1	-1/2	1		1/2	1 1 2
$\times -1$	1/2	-1	1	1/2	1		-1/2	-1 3
$\times -302$	1	151	1	302	-100	-100	-151	600
		-302		151			-302	

z, z^*	x1 非	x2	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数
	3/2	0	-1	1/2		1	-1/2	3
	-1/2	1		-1/2			1/2	1
	1/2	0		1/2	1		-1/2	2
1	152	0	-100	51			-151	298

z, z^*	x1 非	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数
	3/2	0	-1	1/2		1	-1/2	3 / (3/2) = 2
	-1/2	1		-1/2			1/2	1 / (-1/2) < 0
	1/2	0		1/2	1		-1/2	2 / (1/2) = 4
1	152	0	-100	51			-151	298

z, z^*	x1 非	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数
$\times 2/3$	1 3/2	0	-2/3	1/3		2/3	-1/3	2 3
	-1/2	1		-1/2			1/2	1
	1/2	0		1/2	1		-1/2	2
1	152	0	-100	51			-151	298

z, z^*	x1 非	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数	
	1 3/2	0	-2/3	1/3		2/3	-1/3	2 3	
$\times 1/2$	1/2	1/2	1	-1/3	1/6	1/3	-1/6	1 1	
$\times -1/2$	-1/2	1/2	0	1/3	-1/6	1	-1/3	1/6	-1 2
$\times -152$	1 152	0	-100	51			-151	298	

z, z^*	x1	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数	
		1	-2/3	1/3		2/3	-1/3	2	
		0	1	-1/3	-1/3	1/3	1/3	2	
		0		1/3	1/3	1	-1/3	-1/3	1
1		0		4/3	1/3		-304/3	-301/3	-6

z, z^*	x_1	x_2	x_3 非	x_4 非	x_5 非	x_6 非	x_7 非	定数
	1		-2/3	1/3		2/3	-1/3	2
	0	1	-1/3	-1/3		1/3	1/3	2
	0		1/3	1/3	1	-1/3	-1/3	$1/(1/3)=3$
1	0		4/3	1/3		-304/3	-301/3	-6

z, z^*	x_1	x_2	x_3 非	x_4 非	x_5 非	x_6 非	x_7 非	定数
	1		-2/3	1/3		2/3	-1/3	2
	0	1	-1/3	-1/3		1/3	1/3	2
$\times 3$	0		1 1/3	1 1/3	3	1 -1/3	-1 -1/3	3 1
1	0		4/3	1/3		-304/3	-301/3	-6

z, z^*	x_1	x_2	x_3 非	x_4 非	x_5 非	x_6 非	x_7 非	定数
$\times 2/3$	1		2/3 2/3	2/3 2/3	2	-2/3	2/3 -2/3	-1/3 2
$\times 1/3$	0	1	1/3 1/3	1/3 1/3	1	-1/3	1/3 -1/3	1/3 1
	0		1 1/3	1 1/3	3	-1/3	-1 -1/3	3 1
$\times -4/3$	1	0	4/3	1/3		-304/3	-301/3	-6
			-4/3	-4/3	-4	4/3	4/3	-4

z, z^*	x_1	x_2	x_3 非	x_4	x_5 非	x_6 非	x_7 非	定数
	1		0	1	2	0	-1	4
	0	1	0	0	1	0	0	3
	0		1	1	3	-1	-1	3
1	0		0	-1	-4	-100	-99	-10

$x_1=4$

$x_2=3$

最適解

復習: 2段階単体法と罰則付単体法

z, z^*	x_1 非	x_2 *	x_3 非	x_4 非	x_5	x_6	x_7 非	定数			
$\times -1$	$1/2$	1	-1	1	-1	$1/2$		1	$-1/2$	-1	$4/1=4$
$\times 1/2$	$-1/2$	$\times 1$	$\times 2$		$-1/2$	$\times 1$		$1/2$	$\times 1$	1	$\times 2/2=1$
$\times -1$	$1/2$	-1	1		$1/2$		1	$-1/2$	-1	3	$3/1=3$
$\times -3M+2$	$3M/2$	$-3M$	$3M$	$-M$	$3M/2-M$			$-3M/2$	$-3M$	$6M$	
	-1	$+2$	-1		-1			$+1$	$+2$		

- 非常に大きい数 M を記号で残した場合、
 - シンプレックス表には M の係数と定数の両方を記録しなければならない
 - 連立方程式の解法では M の係数と定数の両方を掃き出さなければならない
- 結局、2段階単体法で z^* と同時に z の式を扱うのと同じことになる

復習: 2段階単体法と罰則付単体法

- 2段階法における人工(補助)問題と元の問題の関係
 - まず z^* を最小化して、次に z を最小化する
- 人工問題を同時に解く方法=罰則付単体法
 - z の最小化と人工変数=0 が成立すれば良い
 - z, z^* を同時($z^*=0$ 優先)に最適化=罰則付単体法
 - $z + M \times z^*$ (M は大きな数) を最小化する
 M の影響が大きいため z^* の最小化 $\rightarrow z^*=0$ が優先的に実現される
- 安全な罰則(M)を決める方法が無い
 - M を任意の数よりも大きい数として扱う
 - 2段階法と同じ手間になる

線形計画問題の行列表現(等式標準形)

minimize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2$$

\vdots

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

minimize

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

subject to

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}^T = (c_1, c_2, \dots, c_m)$$

定義: ベクトルの不等式

$$\mathbf{p} \leq \mathbf{q} \Leftrightarrow p_j \leq q_j, \quad j = 1, \dots,$$

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{q} \Leftrightarrow p_j \geq q_j, \quad j = 1, \dots,$$

線形計画問題の行列表現(不等式標準形)

minimize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \geq b_2$$

\vdots

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \geq b_n$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0$$

minimize

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

subject to

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

線形計画問題の行列表現(単体法)

minimize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2$$

\vdots

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0$$

minimize

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

subject to

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

基底変数 : $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\} \subset \{x_1, \dots, x_m\} \quad (n \leq m)$

非基底変数 : $\{x_{j_{n+1}}, \dots, x_{j_m}\} = \{x_1, \dots, x_m\} \setminus \{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\}$

$$\mathbf{x}_B^T = (x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) \quad \mathbf{x}_N^T = (x_{j_{n+1}}, \dots, x_{j_m})$$

$$\{c_{j_1}, \dots, c_{j_m}\} = \{c_1, \dots, c_m\} \quad \mathbf{c}_B^T = (c_{j_1}, \dots, c_{j_n}) \quad \mathbf{c}_N^T = (c_{j_{n+1}}, \dots, c_{j_m})$$

$$\{a_{kj_1}, \dots, a_{kj_m}\} = \{a_{k1}, \dots, a_{km}\} \quad k = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & \cdots & a_{nj_n} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} a_{1j_{n+1}} & \cdots & a_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nj_{n+1}} & \cdots & a_{nj_m} \end{pmatrix}$$

線形計画問題の行列表現

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} \\
 & z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 &\text{subject to} \\
 & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} \quad \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B \quad + \quad \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\
 & z = \boxed{c_{j_1} x_{j_1} + \cdots + c_{j_n} x_{j_n}} + \boxed{c_{j_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m} x_{j_m}} \\
 &\text{subject to} \\
 & \begin{array}{l}
 \boxed{a_{1j_1} x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n} x_{j_n}} + \boxed{a_{1j_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m} x_{j_m}} = b_1 \\
 \boxed{a_{2j_1} x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n} x_{j_n}} + \boxed{a_{2j_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m} x_{j_m}} = b_2 \\
 \qquad \qquad \qquad \mathbf{A}_B \qquad \qquad \qquad \mathbf{A}_N \\
 \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \boxed{a_{nj_1} x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n} x_{j_n}} + \boxed{a_{nj_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m} x_{j_m}} = b_n
 \end{array} \\
 & \qquad \qquad \mathbf{x}_B \qquad \qquad \mathbf{x}_N \\
 & \boxed{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}}, \boxed{x_{j_{n+1}}, \dots, x_{j_m}} \geq 0
 \end{aligned}$$

線形計画問題の行列表現

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} \\
 &z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\
 &\text{subject to} \\
 &\quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\
 &\quad \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

単体法の各段階での操作は
 z が減少するように
 $\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N, \mathbf{A}_B, \mathbf{A}_N,$ を更新
 するものになる。

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} \quad \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B \quad \quad \quad \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\
 &z = \boxed{c_{j_1} x_{j_1} + \cdots + c_{j_n} x_{j_n}} + \boxed{c_{j_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m} x_{j_m}} \\
 &\text{subject to} \\
 &\quad \begin{matrix} a_{1j_1} x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n} x_{j_n} & + & a_{1j_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m} x_{j_m} & = & b_1 \\ a_{2j_1} x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n} x_{j_n} & + & a_{2j_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m} x_{j_m} & = & b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{nj_1} x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n} x_{j_n} & + & a_{nj_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m} x_{j_m} & = & b_n \end{matrix} \\
 &\quad \quad \quad \mathbf{A}_B \quad \quad \quad \mathbf{A}_N \\
 &\quad \quad \quad \mathbf{x}_B \quad \quad \quad \mathbf{x}_N \\
 &\quad \boxed{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}}, \boxed{x_{j_{n+1}}, \dots, x_{j_m}} \geq 0
 \end{aligned}$$

線形計画問題の行列表現(単体法)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \\ z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} & \\ \text{subject to} & \\ \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} & \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \\ z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} & \\ \text{subject to} & \\ \mathbf{Ax} - \mathbf{Ix}' = \mathbf{b} & \\ \mathbf{x}, \mathbf{x}' \geq \mathbf{0} & \end{array}$$

原点を実行可能領域に持つ線形計画問題の不等式標準形を考える。

スラック変数 $\mathbf{x}'^T = (x_1, \dots, x_n)$ を導入して等式標準形とsimplex表を得る。

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

線形計画問題の行列表現(単体法)

$$\begin{aligned} -I\mathbf{x}' + A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ z - \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= 0 \end{aligned}$$

最初のsimplex表

$A_B = I, A_N = A$
基底変数の連立方程式とその解は
 $A_B \mathbf{x}_B = -I\mathbf{x}' = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x}_B = -\mathbf{x}' = \mathbf{b}$
非基底変数はゼロなので、
目的関数値もゼロ
 $\mathbf{x}_N = \mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} A_B \mathbf{x}_B + A_N \mathbf{x}_N &= \mathbf{b} \\ z - \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B - \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N &= 0 \end{aligned}$$

更新されたsimplex表

単体法の操作により各行列要素が更新されるが $A_B = I$ と $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ は保たれるので基底解は常に $\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ と $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ 終了時の $\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ が最適解となる。

※更新される必要があるのは非基底変数の選択時に必要な $\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_N^T$ と基底変数の選択時に必要な A_N と \mathbf{b} だけ。

※単体法の操作で繰り返される $A_B = I$ を維持するピボット変換により誤差が蓄積する(誤差を含む係数行列を元に計算が繰り返される。)

線形計画問題の行列表現 (改訂単体法)

$$-I\mathbf{x}' + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$z - \mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0$$

最初のsimplex表

単体法の操作では基底部分と非基底部分の分類が変更されるだけと考え、行列のデータはそのまま、変数の基底・非基底の区別だけを更新する。

$$\text{minimize } \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N$$

$$z = c_{j_1} x_{j_1} + \cdots + c_{j_n} x_{j_n} + c_{j_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m} x_{j_m}$$

subject to

$$\begin{array}{l} a_{1j_1} x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n} x_{j_n} + a_{1j_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m} x_{j_m} = b_1 \\ a_{2j_1} x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n} x_{j_n} + a_{2j_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m} x_{j_m} = b_2 \\ \vdots \\ a_{nj_1} x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n} x_{j_n} + a_{nj_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m} x_{j_m} = b_n \end{array}$$

$$\mathbf{A}_B \qquad \mathbf{A}_N$$

$$\mathbf{x}_B \qquad \mathbf{x}_N$$

$$x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, x_{j_{n+1}}, \dots, x_{j_m} \geq 0$$

線形計画問題の行列表現 (改訂単体法)

$$\begin{aligned} -I\mathbf{x}' + \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ z - \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= 0 \end{aligned}$$

最初のsimplex表

単体法の操作では基底部分と非基底部分の分類が変更されるだけと考え、行列のデータはそのまま、変数の基底・非基底の区別だけを更新する。

minimize

$$z = c_{j_1} x_{j_1} + \cdots + c_{j_n} x_{j_n} + c_{j_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m} x_{j_m}$$

subject to

$$\begin{aligned} a_{1j_1} x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n} x_{j_n} + a_{1j_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m} x_{j_m} &= b_1 \\ a_{2j_1} x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n} x_{j_n} + a_{2j_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m} x_{j_m} &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{nj_1} x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n} x_{j_n} + a_{nj_{n+1}} x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m} x_{j_m} &= b_n \end{aligned}$$

$$x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, x_{j_{n+1}}, \dots, x_{j_m} \geq 0$$

線形計画問題の行列表現(改訂単体法)

$$\begin{aligned} -I\mathbf{x}' + \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ z - \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= 0 \end{aligned}$$

最初のsimplex表

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N &= \mathbf{b} \\ z - \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B - \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N &= 0 \end{aligned}$$

更新されたsimplex表

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{I}, \mathbf{A}_N = \mathbf{A}$$

基底変数の連立方程式とその解は

$$\mathbf{A}_B \mathbf{x}_B = -I\mathbf{x}' = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x}_B = -I\mathbf{x}' = \mathbf{b}$$

非基底変数はゼロなので、
目的関数値もゼロ

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{0} \Rightarrow z = 0$$

\mathbf{A}_B が正則なら変数の交換に必要な情報は計算で求まる。

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N$$

$$z = \mathbf{c}_B^T (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N) + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N$$

(必要なのは \mathbf{x}_N の係数:

$$-\mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N + \mathbf{c}_N^T)$$

※基底・非基底変数の分類(と \mathbf{A}_B^{-1})だけを更新する改訂単体法が考えられる。

単体法

単体法は次の行列表現に対応するsimplex表の更新により最適解を得る。

$$\mathbf{A}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b}$$

$$z - \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B - \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N = 0$$

simplex 表の更新は基底変数と非基底変数一つずつの交換に対応し z が減少するように交換する変数が選ばれる。

また、その過程で必要となる \mathbf{x}_B の値や \mathbf{x}_N の係数 \mathbf{A}_N を求めるために $\mathbf{A}_B = \mathbf{I}$ を保つピボット変換が実施される。

改訂単体法

改訂単体法は行列やベクトルの値は更新せず、代わりに基底・非基底変数

$$\mathbf{A}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b}$$

$$z - \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B - \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N = 0$$

の分類を記憶し \mathbf{A}_B や \mathbf{A}_N は変数の分類を元に制約式全体の係数行列から求める。その過程で \mathbf{A}_B が正則であれば変数の交換に必要な情報は

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N$$

$$z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N) \mathbf{x}_N$$

の式から求まる。

双対問題

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \\ & z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{subject to} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

主問題

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \\ & w = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ &\text{subject to} \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

双対問題

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

双対問題

minimize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \geq b_2$$

\vdots

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \geq b_n$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0$$

主問題

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

n 行 m 列の係数行列と m 個の変数、
 n 通りの制約式からなる主問題

maximize

$$w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_ny_n$$

subject to

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{n1}y_n \leq c_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{n2}y_n \leq c_2$$

\vdots

$$a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \cdots + a_{nm}y_n \leq c_m$$

$$y_1, y_2, \dots, y_n \geq 0$$

双対問題

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

m 行 n 列の係数行列と n 個の変数、
 m 通りの制約式からなる双対問題

双対問題

minimize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \geq b_2$$

\vdots

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \geq b_n$$

$$x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0$$

主問題

minimize

$$z = 4x_1 + 4x_2 + x_3$$

subject to

$$2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \geq 2$$

$$2x_1 + 2x_3 \geq 1$$

$$-x_1 + 4x_2 - x_3 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

maximize

$$w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_ny_n$$

subject to

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{n1}y_n \leq c_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{n2}y_n \leq c_2$$

\vdots

$$a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \cdots + a_{nm}y_n \leq c_m$$

$$y_1, y_2, \dots, y_n \geq 0$$

双対問題

maximize

$$w = 2y_1 + y_2 + y_3$$

subject to

$$2y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 4$$

$$2y_1 + 4y_3 \leq 4$$

$$-4y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

双対問題

maximize

$$z = -4x_1 - 4x_2 - x_3$$

subject to

$$-2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq -2$$

$$-2x_1 - 2x_3 \leq -1$$

$$x_1 - 4x_2 + x_3 \leq -1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

↑ と同等の問題 ⇒ の双対問題
主問題

minimize

$$w = -2y_1 - y_2 - y_3$$

subject to

$$-2y_1 - 2y_2 + y_3 \geq -4$$

$$-2y_1 - 4y_3 \geq -4$$

$$4y_1 - 2y_2 + y_3 \geq -1$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

↑ と同等の問題
双対問題

minimize

$$z = 4x_1 + 4x_2 + x_3$$

subject to

$$2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \geq 2$$

$$2x_1 + 2x_3 \geq 1$$

$$-x_1 + 4x_2 - x_3 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

maximize

$$w = 2y_1 + y_2 + y_3$$

subject to

$$2y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 4$$

$$2y_1 + 4y_3 \leq 4$$

$$-4y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

双対問題

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \\ & -z = -\mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{subject to} \\ & -\mathbf{A}\mathbf{x} \leq -\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

双対問題

同等の問題 

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \\ & -w = -\mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ & \text{subject to} \\ & -\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq -\mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

主問題

同等の問題 

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \\ & z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{subject to} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

主問題

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \\ & w = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ & \text{subject to} \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

双対問題

双対定理

線形計画問題とその双対問題が右のように与えられ、 $\tilde{\mathbf{x}}^T = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m)$, $\tilde{\mathbf{y}}^T = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$ 実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、最適解である。

$$\exists \tilde{\mathbf{x}}, \exists \tilde{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0} \text{ s.t. } A\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{b}, A^T\tilde{\mathbf{y}} \leq \mathbf{c}, \mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^T\tilde{\mathbf{y}}$$

$$\implies \forall \mathbf{x}, \forall \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \mathbf{b}^T\tilde{\mathbf{y}} \geq \mathbf{b}^T\mathbf{y}$$

また、一方に最適解が存在すれば、もう一方にも最適解が存在し、最適解が与える双方の目的関数値は等しい。

$$\begin{array}{l} \text{minimize} \\ z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} \\ A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

主問題

$$\begin{array}{l} \text{maximize} \\ w = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{subject to} \\ A^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

双対問題

演習問題7

次の線形計画問題の双対問題を求め、単体法等を用いてこれを解き、最適解の与える両者の目的関数値が等しいことを確認してください。

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \\ z = x_1 + x_2 & \\ \text{subject to} & \\ x_1 + 2x_2 \leq & 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq & 2 \\ x_1, x_2 \geq & 0 \end{array}$$

演習問題7

次の線形計画問題の双対問題を求め、単体法等を用いてこれを解き、最適解の与える両者の目的関数値が等しいことを確認してください。

maximize

$$z = x_1 + x_2$$

subject to

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

minimize

$$w = 2y_1 + 2y_2$$

subject to

$$y_1 + 2y_2 \geq 1$$

$$2y_1 + y_2 \geq 1$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

練習問題

解次
この
ことを

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \\ & z = [1 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ & \text{subject to} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

問題
の
両
側

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \\ & w = [2 \ 2] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ & \text{subject to} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

で
こ
う

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \\ & z = x_1 + x_2 \\ & \text{subject to} \\ & \quad x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & \quad 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

練習問題

解答
次
こと

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \\ &z = [1 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &\text{subject to} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \\ &z = x_1 + x_2 \\ &\text{subject to} \\ &x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ &2x_1 + x_2 \leq 2 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

問題
両
側

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \\ &w = [2 \ 2] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &\text{subject to} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \\ &w = 2y_1 + 2y_2 \\ &\text{subject to} \\ &y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ &2y_1 + y_2 \geq 1 \\ &y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

て
こ
う

maximize

$$z = x_1 + x_2$$

subject to

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

minimize

$$\tilde{z} (= -z = -x_1 - x_2)$$

subject to

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 2$$

$$\tilde{z} + x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

z	x1	x2	x3	x4	定数	
	1	2	1		2	/1=2
	2	1		1	2	/2=1
1	1	1			0	

z	x1	x2	x3	x4	定数	
	0	3/2	1	-1/2	1	/1=2
	1	1/2	1/4	1/4	1/2	/2=1
1	1	1		-1/2	0	

z	x1	x2	x3	x4	定数	
		3/2	1	-1/2	1	/(3/2)=2/3
	1	1/2	1/2	1/2	1	/(1/2)=2
1	1/2			-1/2	-1	

z	x1	x2	x3	x4	定数	
	0	1/2	2/3	-1/3	2/3	/(3/2)=2/3
	1	1/2	1/2	1/2	1	/(1/2)=2
1	1/2			-1/2	-1	

$$x_1 = x_2 = 2/3, \tilde{z} = -4/3 \Rightarrow z = 4/3$$

minimize

$$w = 2y_1 + 2y_2$$

subject to

$$y_1 + 2y_2 \geq 1$$

$$2y_1 + y_2 \geq 1$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

minimize

w^* , then w
subject to

$$y_1 + 2y_2 - y_3 + y_5 = 1$$

$$2y_1 + y_2 - y_4 + y_6 = 1$$

$$w - 2y_1 - 2y_2 = 0$$

$$w^* + 3y_1 + 3y_2 - y_3 - y_4 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_5, y_6 \geq 0$$

w, w^*	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	定数
$-x_1$	1	2	-1	1/2	1	-1/2	-1/2
$x_1/2$	2	1	-1	-1/2	1	1/2	1/2
$+x_2$	2	1	-1	-1	1	1	0
$-x_3$	3	3	-1	3/2	1	-3/2	-3/2

w, w^*	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	定数
		1	-2/3	1/3	2/3	-1/3	1/3
	1	0	1/3	-2/3	-1/3	2/3	1/3
1	0	-2/3	-2/3	2/3	2/3	4/3	
1	0	0	0	0	-1	-1	0

w, w^*	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	定数
$x_2/3$	0	3/2	-1	1/2	1	-1/2	1/2
$-x_1/2$	1	1/2	1/3	-1/6	-1/3	1/6	-1/6
$+x_1$	0	-1	-2/3	1/3	2/3	-1/3	1/3
$-x_3/2$	0	3/2	1	-1/2	-1	1/2	-1/2

w, w^*	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	定数
		1	-2/3	1/3	2/3	-1/3	1/3
	1	0	1/3	-2/3	-1/3	2/3	1/3
1	0	-2/3	-2/3	2/3	2/3	4/3	
1	0	0	0	0	-1	-1	0

演習問題7

次の線形計画問題の双対問題を求め、単体法等を用いてこれを解き、最適解の与える両者の目的関数値が等しいことを確認してください。

