数理計画法

第12回：内点法2

復習:演習問題11

課題1：次の線形計画問題を書換えて自己双対型線形計画問題を導きなさい。

minimize $z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$
\begin{aligned}
& x_1 + x_2 \geq 4 \\
& x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

課題2：元の問題の最適解が求めた自己双対型線形計画問題の実行可能解になっていることを確認してください。

復習:演習問題11

主問題は2変数

minimize

$z = x_1 + 2x_2$

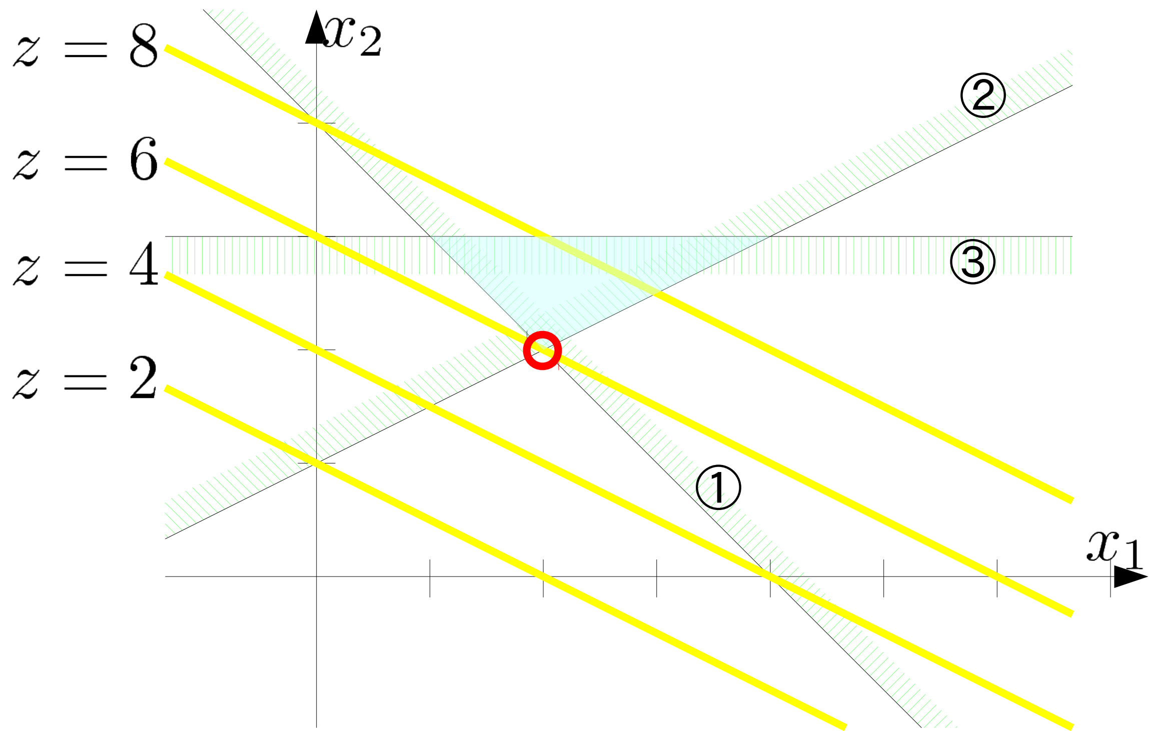
subject to

① $x_1 + x_2 \geq 4$

② $x_2 - 2x_2 + 2 \leq 0$

③ $x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$



最適解:

$$z = 6, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 1, x_1 = 2, x_2 = 2$$

復習：演習問題11

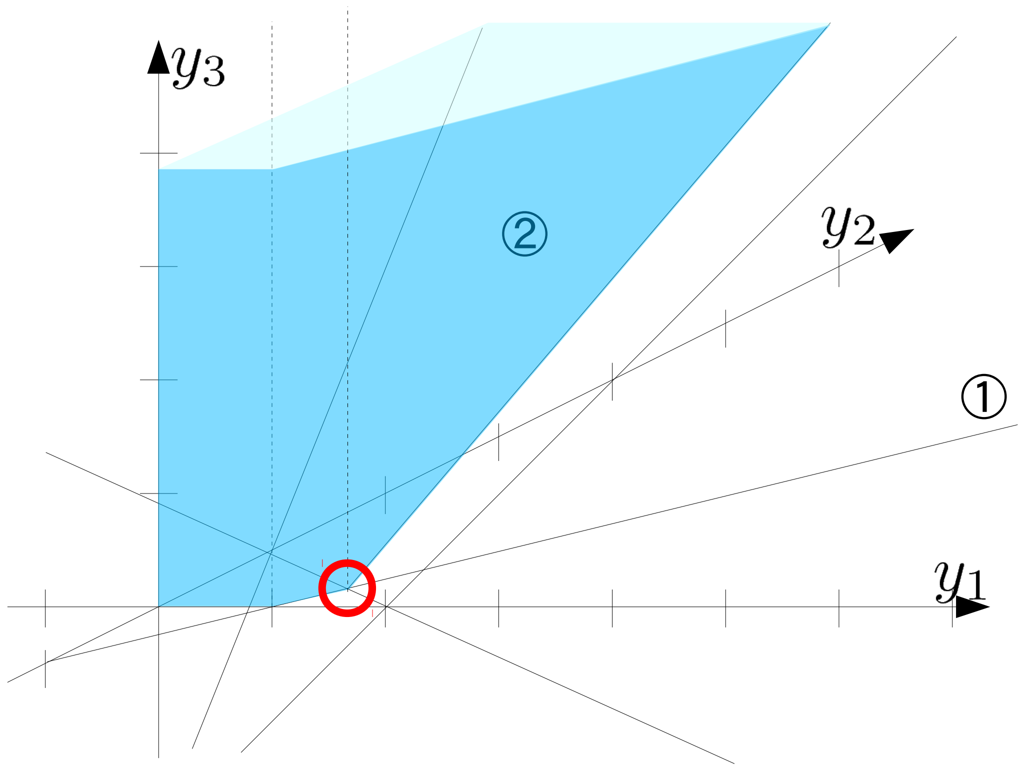
双対問題は3変数

$$\text{maximize}$$
$$w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3$$
$$\text{subject to}$$

① $y_1 - y_2 \leq 1$

② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$



最適解：

$$w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$$

復習：演習問題11

主問題・双対問題を整理すると、

minimize
$z = x_1 + 2x_2$
subject to
$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & \geq & 4 \\ -x_1 & +2x_2 & \geq & 2 \\ 0x_1 & -x_2 & \geq & -3 \end{array}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

maximize
$w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3$
subject to
$$\begin{array}{rrrcr} y_1 & -y_2 & 0y_3 & \leq & 1 \\ y_1 & +2y_2 & -y_3 & \leq & 2 \end{array}$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

等式標準形を用いれば、

minimize
$z = c^{\mathrm{T}} x$
subject to
$Ax - s = b \quad x, s \geq 0$

maximize
$w = b^{\mathrm{T}} y$
subject to
$A^{\mathrm{T}} y + t = c \quad y, t \geq 0$

ただし
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b^{\mathrm{T}} = [4\ 2\ {-3}] \quad c^{\mathrm{T}} = [12] \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

復習:演習問題11

自己双対型の問題の制約式を考える

$$\mathcal{A}=\begin{bmatrix} O & A & -b \\ A^{\mathrm{T}} & O & c \\ b^{\mathrm{T}} & -c^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

制約式を考えて、$\mathcal{A}[y^{\mathrm{T}}, x^{\mathrm{T}}, \tau]^{\mathrm{T}} \geq O$

なので、その実行可能解は元の主・双対問題の実行可能解

さらに元の最適解を考えれば、$[y^{\mathrm{T}}, x^{\mathrm{T}}] = [4/3, 1/3, 0, 2, 2]$

となり、自己双対型問題の制約式を満たし、$\tau=1$において

$\mathcal{A}[y^{\mathrm{T}}, x^{\mathrm{T}}, \tau]^{\mathrm{T}} = [s^{\mathrm{T}}, t^{\mathrm{T}}, 0]^{\mathrm{T}} \geq O$

復習:内点法の原理

不等式標準形

minimize

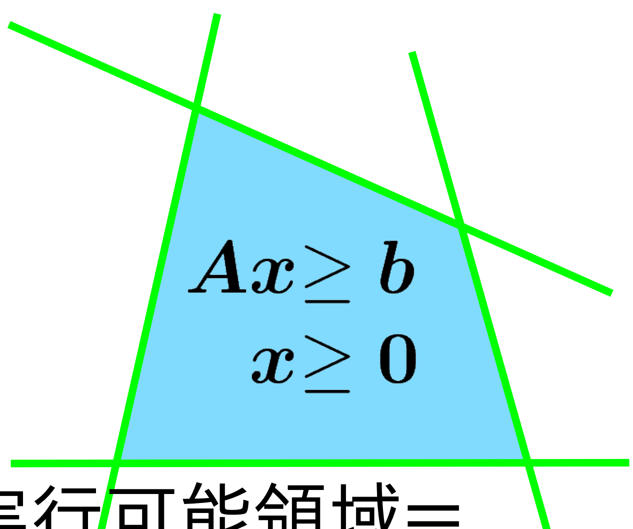
$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

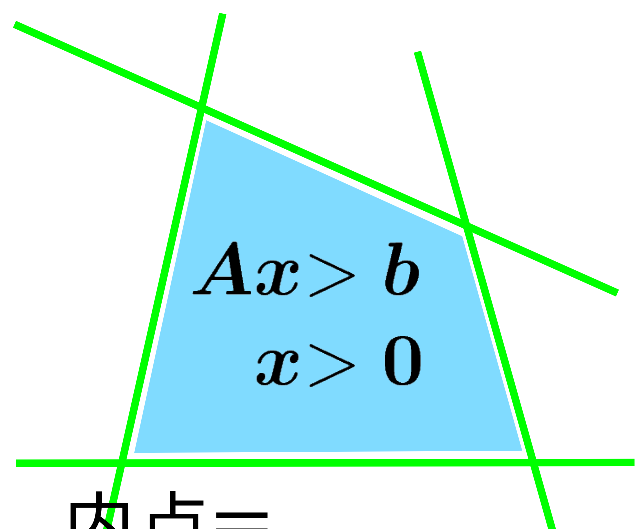
内点:

不等式標準形の制約式から等号を除いた条件を満たす点を内点と呼ぶ



実行可能領域＝

$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$



内点＝

$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}\}$$

復習:内点法の原理

不等式標準形

minimize

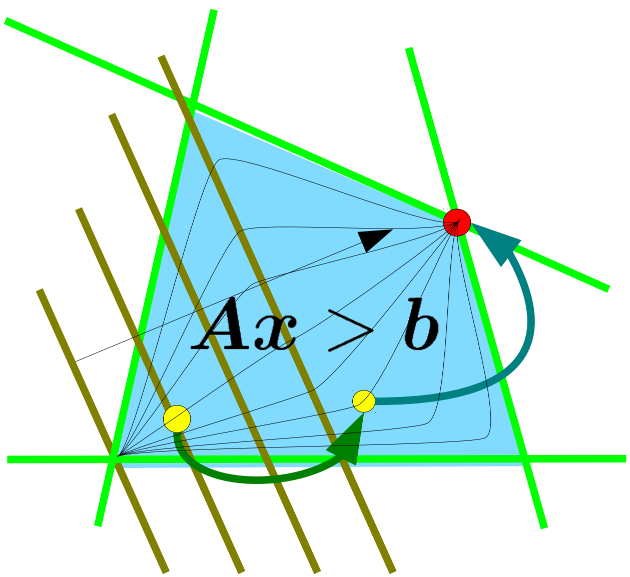
$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}$$

subject to

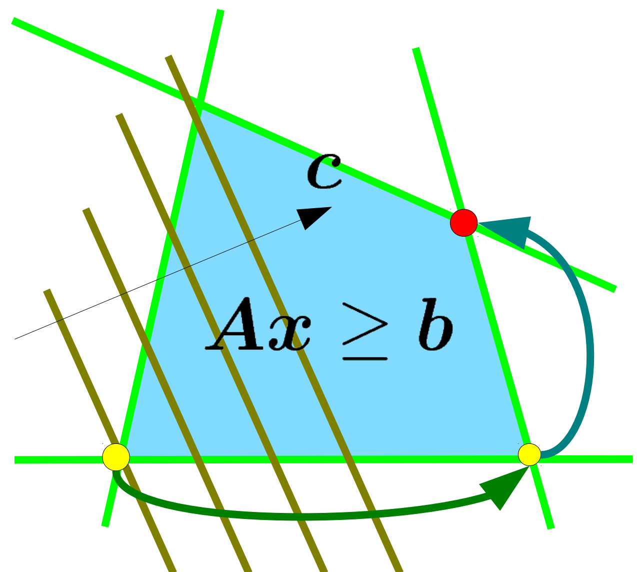
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

内点法の原理:
内点領域中に最適解へ向かうベクトル場からなるう軌跡を作り、軌跡に沿って内点領域を通る経路を近似的に求める方法。



内点法



単体法

復習:内点法の原理

内点法の原理:

ある目的関数値をとる内点

$x_k>$(ただし $Ax_k>b$)

を目的関数値を改善するように
更新して最適解を見つけたい。

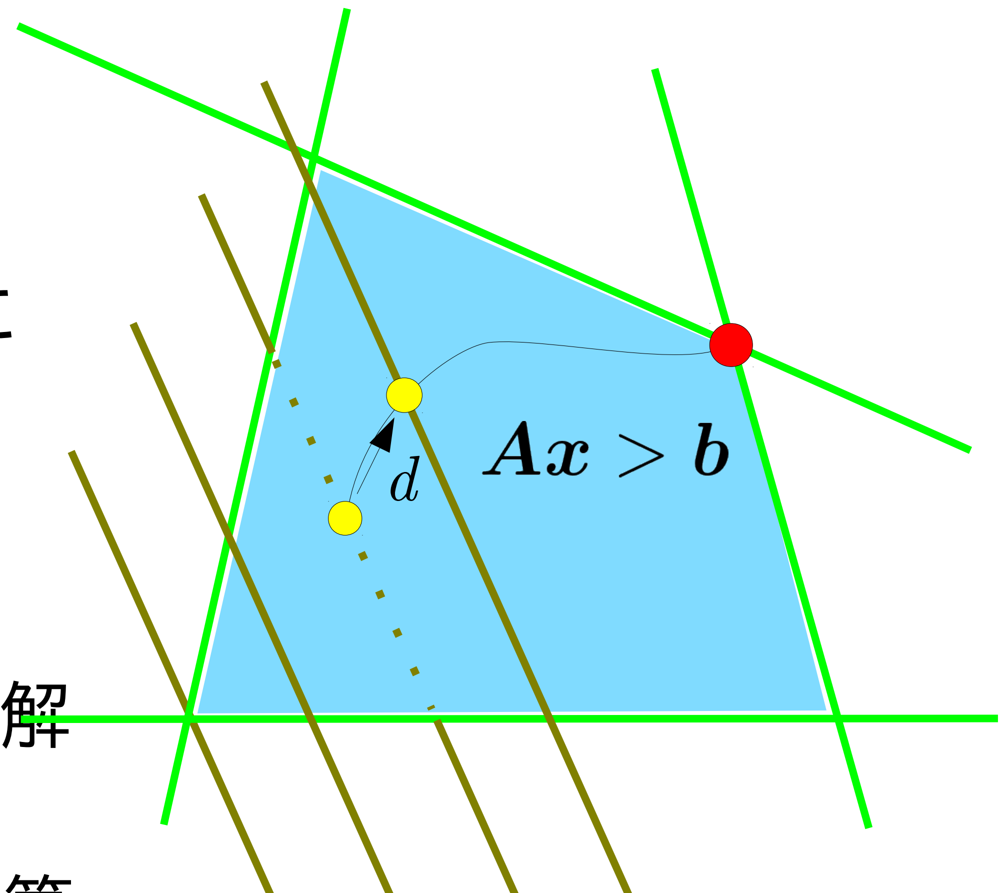
$x_{k+1}=x_k+d$(ただし$c^{\mathrm{T}}x_k>c^{\mathrm{T}}x_{k+1}$)

さらに、

$Ax_{k+1}>b$で、かつ最終的に最適解
に収束するようにdを定める。

できれば反復回数は少なく、計算
も簡単な方が好い。

どうやって?



内点法

自己双対型問題の導出

主問題

minimize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$$

双対問題

maximize

$$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$$

minimize

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$$

制約式を整理して、

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{s} \geq 0$$

$$-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{t} \geq 0$$

より、

$$\begin{bmatrix} & \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c} \end{bmatrix}$$

自己双対型問題の導出

主問題

minimize
$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$$

双対問題

maximize
$$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$
subject to
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$$

等式標準形

minimize
$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$$

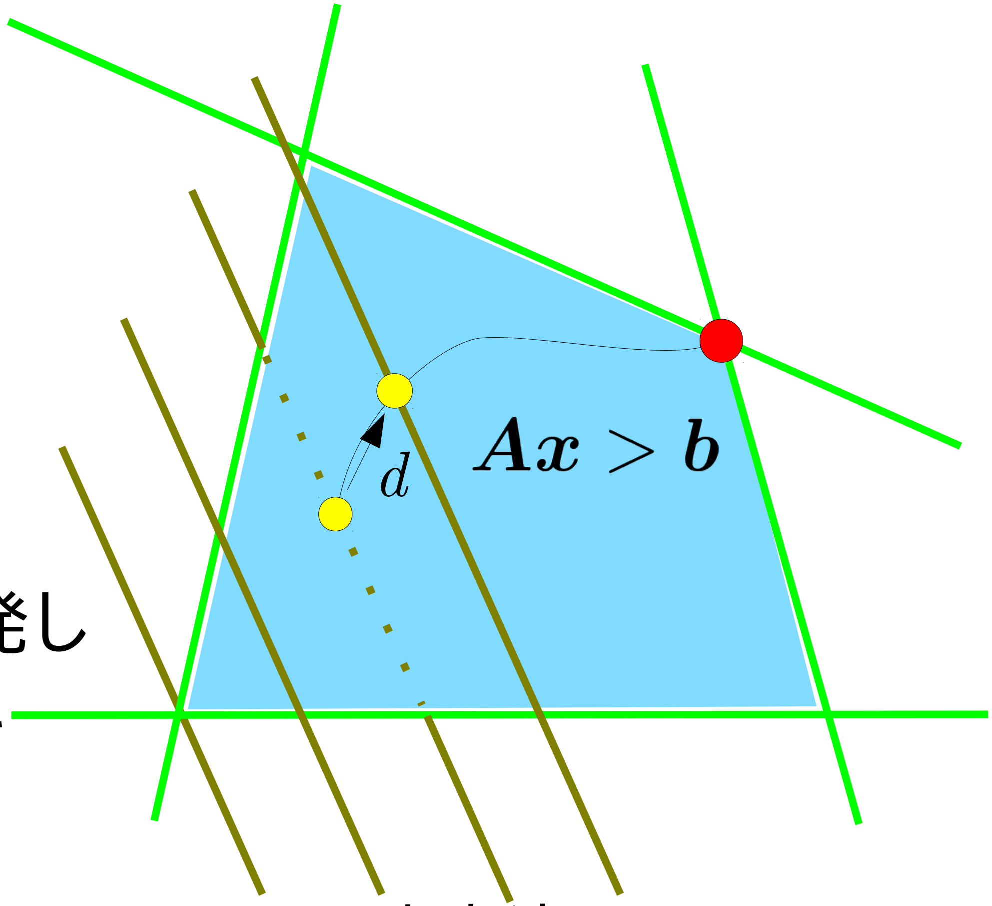
不等式標準形

minimize
$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}, -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}][\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$
subject to
$$\begin{bmatrix} O & \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c} \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$$

自己双対型内点法

自己双対型線形計画問題:

minimize
$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$



初期解x_0(ただし 内点)から出発して目的関数値を改善するように更新して最適解を見つける。

$$[x_{k+1}, y_{k+1}] = [x_k, y_k] + [\delta x, \delta y]$$

ただし$c^{\mathrm{T}}x_k - b^{\mathrm{T}}y_k > c^{\mathrm{T}}x_{k+1} - b^{\mathrm{T}}y_{k+1}$

となるようにする。

自己双対型内点法

- 自己双対型線形計画問題の導出

前頁までで、最適解の存在する主・双対問題に対して、自己双対型の線形計画問題が構成できることが分かった。

すなわち、自己双対型の問題に解法を与えれば、それを一般に適用できることになる。

例えば、次の自己双対型線形計画問題を考える。

$$\text{minimize} \quad z = c^{\mathrm{T}} x \quad \text{subject to} \quad Ax \geq -c,\ x \geq 0$$

このとき、次の条件を満たす内点かつ実行可能解であるx(とs)が存在する。(教科書p.64 定理2.8)

$$Ax + c = s \ (\because s\text{は}x\text{の関数}),\ \ \mathrm{diag}(x)s = \mu e,\ x, s \geq 0$$

ただし、$\mathrm{diag}(x)$はxの各成分を対角成分に持つ正方行列, eは全ての成分が1である1ベクトル

自己双対型内点法

- 自己双対型内点法

次の自己双対型線形計画問題を考える。

$$\text{minimize} \quad z = c^{\mathrm{T}}x \quad \text{subject to} \quad Ax \geq -c,\ x \geq 0 \qquad ☆$$

内点かつ実行可能解であるx(とs)は次の条件を満たす。

$$Ax + c = s\ (\because s\text{は}x\text{の関数}),\ \ \mathrm{diag}(x)s = \mu e,\ x, s \geq 0 \qquad ★$$

このとき$\mu=0$であれば☆の問題において相補性定理が成立することを意味する、内点において相補性定理が成立するということを考えれば、このときのxが最適解であることが言える。

☆の自己双対型線形計画問題の解法を

★の条件式を$\mu=0$のもとで満たす$x, s \geq 0$を求める

ことに帰着できる。

自己双対型内点法

自己双対型線形計画問題に対応する条件式

$Ax+c=s$ ($\because s$はxの関数), $\mathrm{diag}(x)s=\mu e$, $x,s\geq 0$, $\mu=0$

を直接求めることは難しいので、ある$\mu=\mu^0>0$で$\mu=0$を除く条件を満たす解が判っている場合を考える。すなわち

$Ax^0+c=s^0$, $\mathrm{diag}(x^0)s^0=\mu^0 e$

を満たす$x^0,s^0\geq 0$, $\mu^0>0$が既知のときに$0<\mu^1<\mu^0$にμを更新し、

$Ax^1+c=s^1$, $\mathrm{diag}(x^1)s^1=\mu^1 e$

を満たすように$x^1=x^0+\mathrm{d}x$, $s^1=s^0+\mathrm{d}s\geq 0$を決めることを考える。

$\mathrm{d}x,\mathrm{d}s$を微少量と考えれば2次以上の項を無視して

$A(x^0+\mathrm{d}x)+c=s^0+\mathrm{d}s$, $\mathrm{diag}(x^0+\mathrm{d}x)(s^0+\mathrm{d}s)=\mu^1 e$ より

$-A\mathrm{d}x+\mathrm{d}s=0$, $\quad\mathrm{diag}(s^0)\mathrm{d}x+\mathrm{diag}(x^0)\mathrm{d}s=\mu^1 e-\mathrm{diag}(x^0)s^0$

自己双対型内点法

更新式

$-A\mathrm{d}x+\mathrm{d}s=0,\quad \mathrm{diag}(s)\mathrm{d}x+\mathrm{diag}(x)\mathrm{d}s=\mu e\text{-}\mathrm{diag}(x)s$

は未知量$\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}s$の線形の連立方程式なので、これを解くことができる。こうして得た$\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}s$を用いて$\mu^k>\mu^{k+1}>0$と更新して、

最適解を与える$\mu=0$の場合のx, sの近似を得ることができる。

さらにx, sの更新は$\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}s$をそのまま用いるだけでなく、重みをつけて

$x^{k+1}=x^k+w_x\mathrm{d}x,\ s^{k+1}=s^k+w_s\mathrm{d}s,\quad w_x,w_s>1$

と加速効果を期待することもできる。

復習:1変数Newton法のゼロ点探索

- 1変数の場合、初期点 $\widetilde{x}$ の近傍での Taylor 展開を考えて

$$f(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) + \frac{1}{2}f''(\tilde{x})(x - \tilde{x})^2 + \dots$$

- 1次(=線形)近似を得る

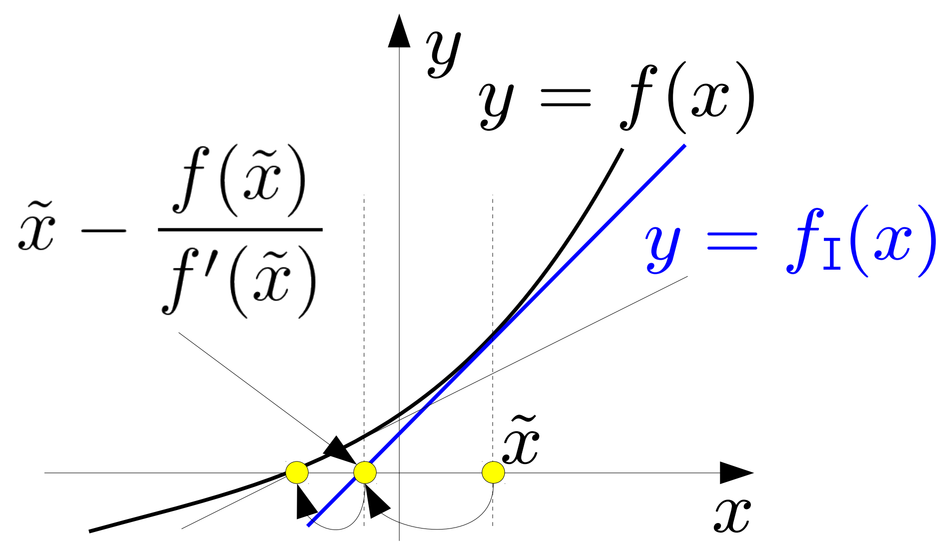
$$f(x) \sim f_{\mathrm{I}}(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x})$$

- 1次近似のゼロ点を求め

$$f_{\mathrm{I}}(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \tilde{x} - f(\tilde{x})/f'(\tilde{x})$$

- 求めた x を $\widetilde{x}$ として①に戻る
(*f*(x)がゼロに近ければ終了)



演習問題12

1. $\mathrm{d}x$,$\mathrm{d}s$以外を既知の量として、次の条件式を考える。
   $A(x^0+\mathrm{d}x)+c=s^0+\mathrm{d}s$, $\mathrm{diag}(x^0+\mathrm{d}x)(s^0+\mathrm{d}s)=\mu^1 e$
   このとき、$\mathrm{d}x$,$\mathrm{d}s$を微少量と考えて2次以上の項を無視することで次の式を導出せよ。
   $-A\mathrm{d}x+\mathrm{d}s=0,$
   $\mathrm{diag}(s^0)\mathrm{d}x+\mathrm{diag}(x^0)\mathrm{d}s=\mu^1 e$-$\mathrm{diag}(x^0)s^0$
2. 1の最後の式がベクトル$\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}s$ の連立方程式であることを示せ。