

# 2018数理計画法 情報工学科

- 「自分の名前と学生証番号のある解答用紙」  
「演習問題1の解答用紙(返却)」  
をとり、席についてください。
- 「自分の名前と学生証番号のある解答用紙」が無い  
方は「名前・学生証番号が空欄の解答用紙」を  
岡野から受け取ってください。
- 返却した解答用紙は前回授業のもので  
裏面に解説があります。
- 練習問題の解答提出を出席記録とします。

# 2018数理計画法

## 第2回：線形計画問題の標準形

# 復習

数理計画法 = 数理計画問題 - 問題 + 法

## 数理計画問題

maximize  $z = f(x_1, \dots, x_n)$   
subject to  $g(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (x_1, \dots, x_n)^T \in X$

与えられた制約式のもとである関数を最大化する問題

## 線形計画問題

$f(x_1, \dots, x_n)$  や  $g(x_1, \dots, x_n)$  が線形な場合

線形計画法 = 線形計画問題 - 問題 + 法

グラフを利用した解法  
グラフの交点を総当たりする解法

# 復習

前回授業内容の復習

# 復習

## 線形計画問題の素朴な解法

### グラフを用いた解法

1. 制約式に対応するグラフを描き
2. グラフを境界とする実行可能領域を求める
3. 目的関数に対応するグラフを描き
4. 目的関数値を増やす(減らす)方向を調べる
5. 実行可能領域の端点から最適解を選ぶ

### 交点を総当たりする解法

1. 制約式に対応するグラフの方程式を全て求める
2. 方程式の組合せで定まる交点を全て求める
3. 全ての交点の実行可能性を調べる
4. 実行可能な交点の目的関数値を求め最適解を選ぶ

# 復習：練習問題1

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

上記の最適化問題について、  
課題1：maximize ... subject to ... の形式で  
線形計画問題を表現しなさい。

課題2：グラフを用いる解法・交点を総当たりする解法  
で最適解を求めなさい。

課題3：授業の感想・意見があれば書いてください。

# 復習：練習問題1

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

まず変数を定義、  
問題の表現と自然  
に対応し、誤り難い  
選択をする  
「求められている値  
=生産量」

珈琲飲料の1日当り生産量を  $x_1 \times 100$ [g] とする  
珈琲牛乳の1日当り生産量を  $x_2 \times 100$ [g] とする

# 復習：練習問題1

A4用紙を横に使う、左上に名前・学年・学籍番号を記入

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

次に制約式を導出、  
問題に示された制限を定義した変数で表現する  
例：「珈琲原液の最大供給量制限」

珈琲飲料の1日当り生産量を  $x_1 \times 100$  [g] とする  
珈琲牛乳の1日当り生産量を  $x_2 \times 100$  [g] とする

↑の生産に要する珈琲原液の1日当り消費量

$$= x_1 \times 15 \text{ [g]} + x_2 \times 11 \text{ [g]}$$

∴制約式は、

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

同様にして

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$



# 復習：練習問題1

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

問題に明示されない制限に注意する

例：「負の生産量  
はありえない」

珈琲飲料の1日当り生産量を  $x_1 \times 100$ [g] とする  
珈琲牛乳の1日当り生産量を  $x_2 \times 100$ [g] とする

原材料供給制限  
にもとづく制約式

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\leq 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 &\leq 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 &\leq 1800 \times 10^3 \end{aligned}$$

生産量は正なので  $x_1, x_2 \geq 0$

# 復習：練習問題1

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

最適化(最大化 or 最小化)する関数を定義する

最大/最小化の別や関数値の単位を明確にする

珈琲飲料の1日当り生産量を  $x_1 \times 100$ [g] とする

珈琲牛乳の1日当り生産量を  $x_2 \times 100$ [g] とする

原材料供給制限  
にもとづく制約式

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\leq 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 &\leq 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 &\leq 1800 \times 10^3 \end{aligned}$$

生産量は正なので  $x_1, x_2 \geq 0$

目的関数=利益  $5x_1 + 4x_2$  [円] を最大化する

数理計画問題の自然な表現が得られた

# 復習：練習問題1

A4用紙を横に使う、左上に名前・学年・学籍番号を記入

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

表現の形式を  
整える

maximize/  
minimize  
subject to  
の表現を使う

珈琲飲料の1日当り生産量を  $x_1 \times 100$ [g] とする  
珈琲牛乳の1日当り生産量を  $x_2 \times 100$ [g] とする

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && 5x_1 + 4x_2 \\ & \text{subject to} && 15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3 \\ & && 10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3 \\ & && 9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3 \\ & && x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

数理計画問題の自然な表現が得られた

# 課題1 解答例

珈琲飲料の1日当り生産量を  $x_1 \times 100$ [g] とする

珈琲牛乳の1日当り生産量を  $x_2 \times 100$ [g] とする

$$\text{maximize } 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{subject to } 15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

変数の定義は  
残しておく

# 復習：演習問題1

A4用紙を横に使って、左上に名前・学年・学籍番号を記入

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

上記の最適化問題について、  
課題1：maximize ... subject to ... の形式で  
線形計画問題を表現しなさい。

課題2：グラフを用いる解法・交点を総当たりする解法  
で最適解を求めなさい。

課題3：授業の感想・意見があれば書いてください。

# 課題2 グラフを利用した解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$x_2$  珈琲牛乳

2変数なので、  
2次元のグラフ  
を描く

珈琲飲料

$x_1$

# 課題2 グラフを利用した解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

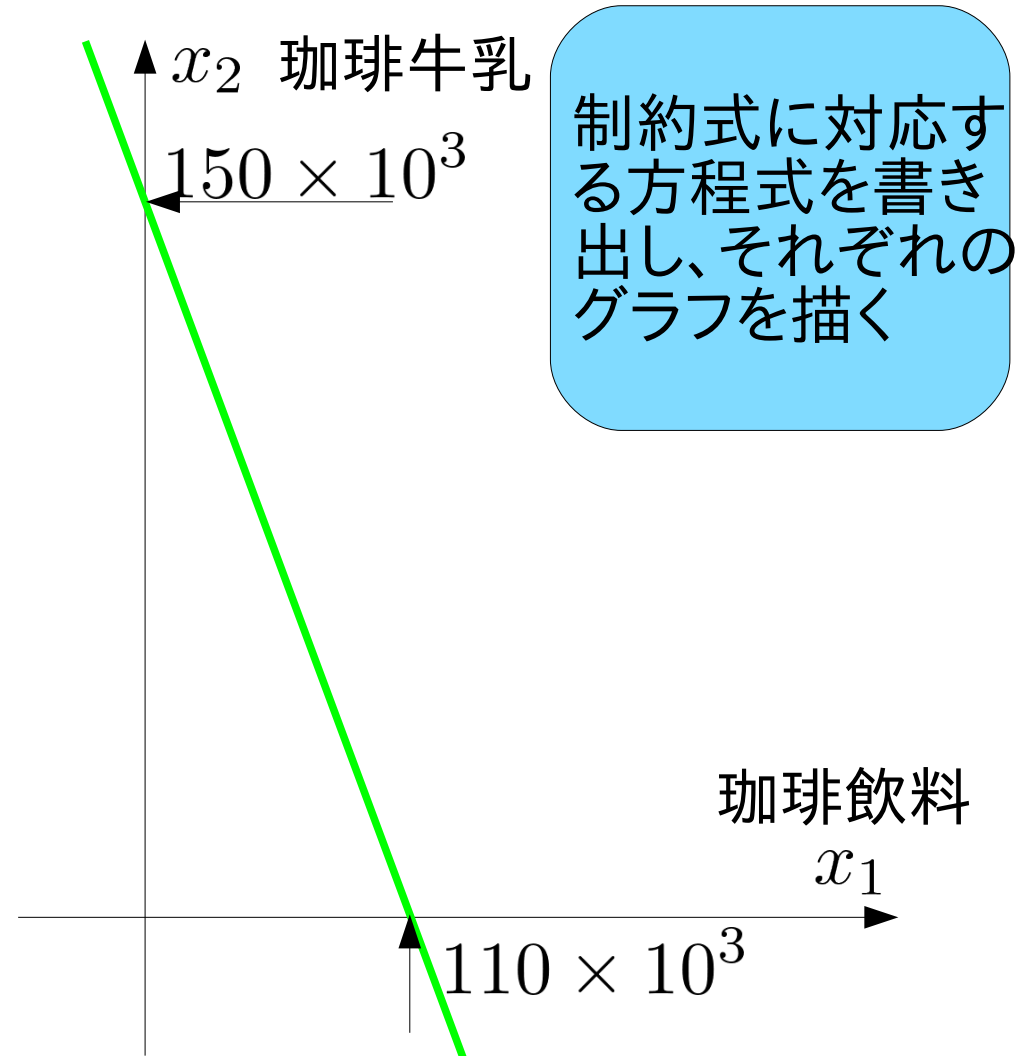
$$\textcircled{1} 15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$$

$$\textcircled{2} 10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$$

$$\textcircled{3} 9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$$

$$\textcircled{4} x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} x_2 = 0$$



# 課題2 グラフを利用した解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

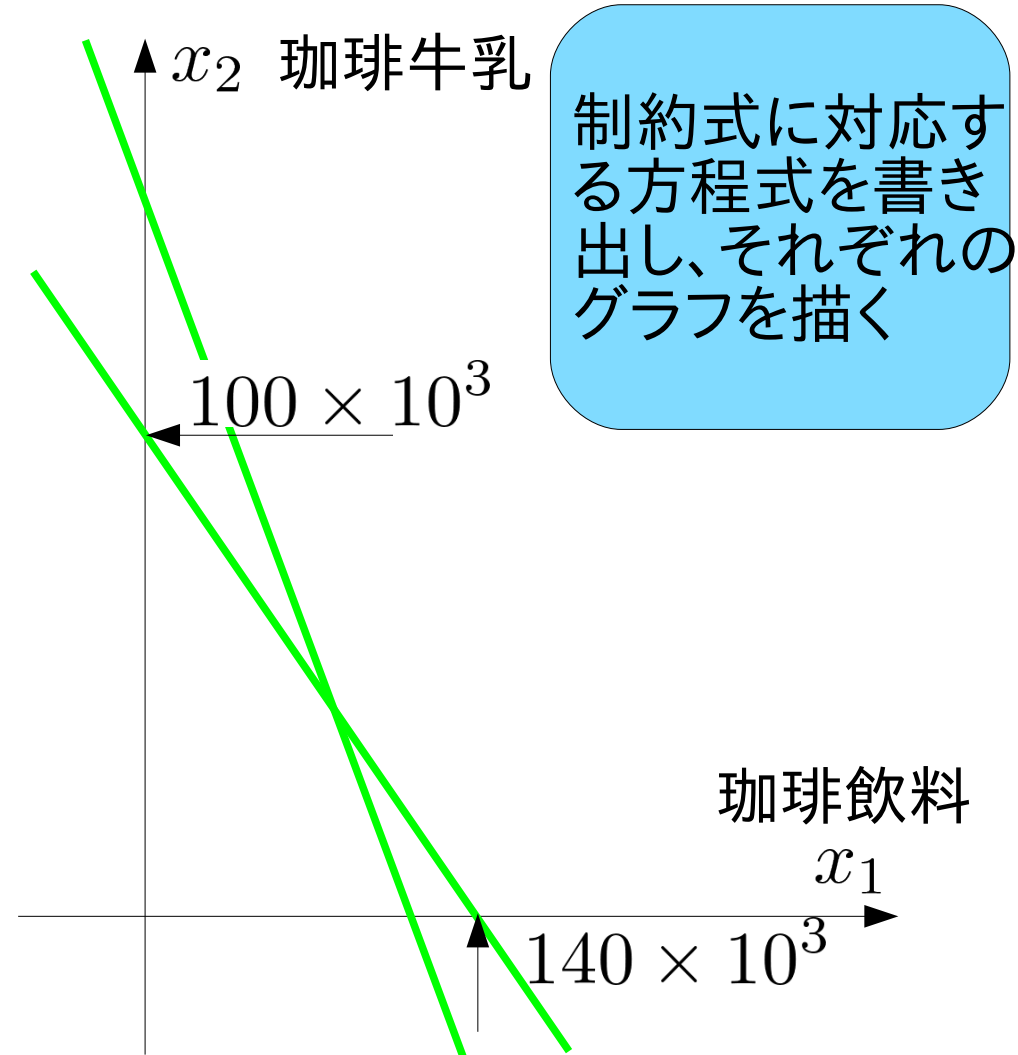
$$\textcircled{1} 15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$$

$$\textcircled{2} 10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$$

$$\textcircled{3} 9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$$

$$\textcircled{4} x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} x_2 = 0$$





# 課題2 グラフを利用した解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

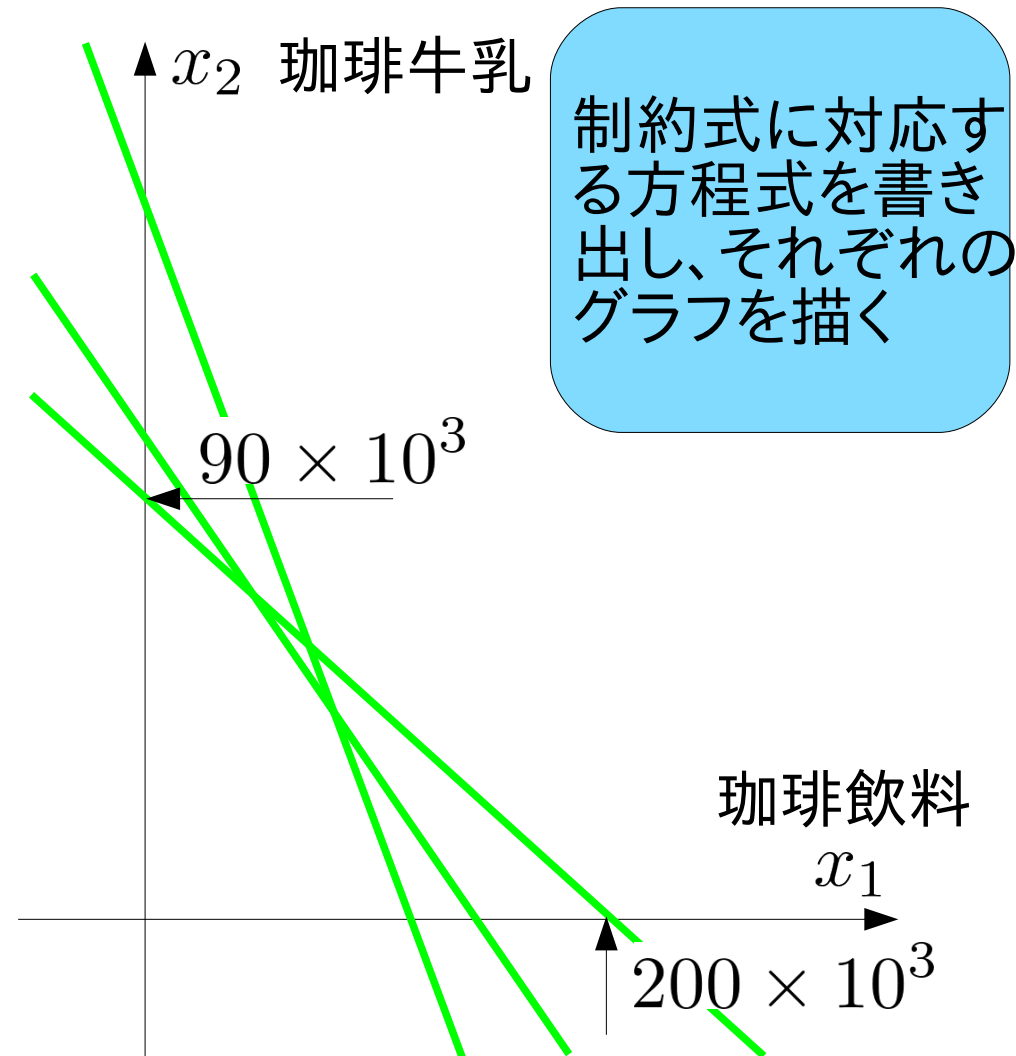
$$\textcircled{1} 15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$$

$$\textcircled{2} 10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$$

$$\textcircled{3} 9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$$

$$\textcircled{4} x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} x_2 = 0$$



# 課題2 グラフを利用した解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

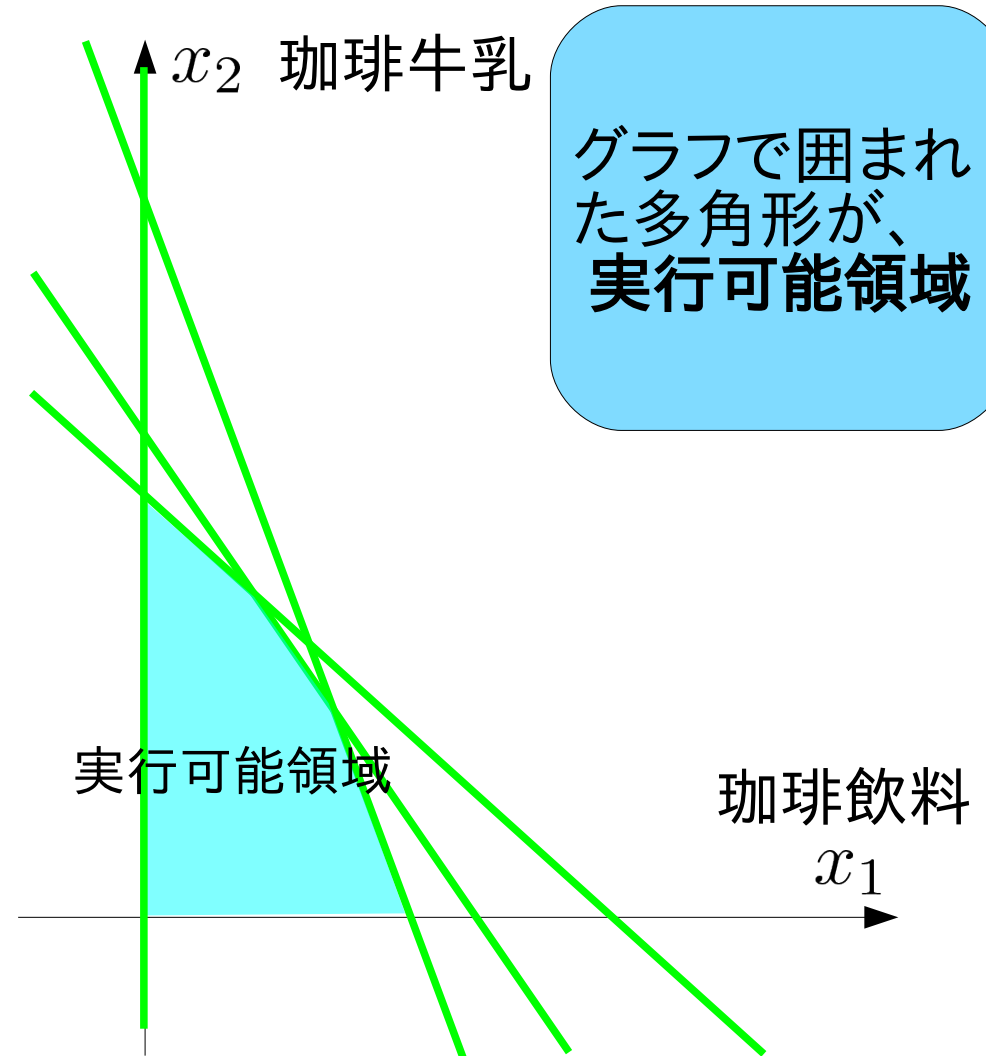
$$\textcircled{1} 15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$$

$$\textcircled{2} 10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$$

$$\textcircled{3} 9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$$

$$\textcircled{4} x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} x_2 = 0$$



# 課題2 グラフを利用した解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

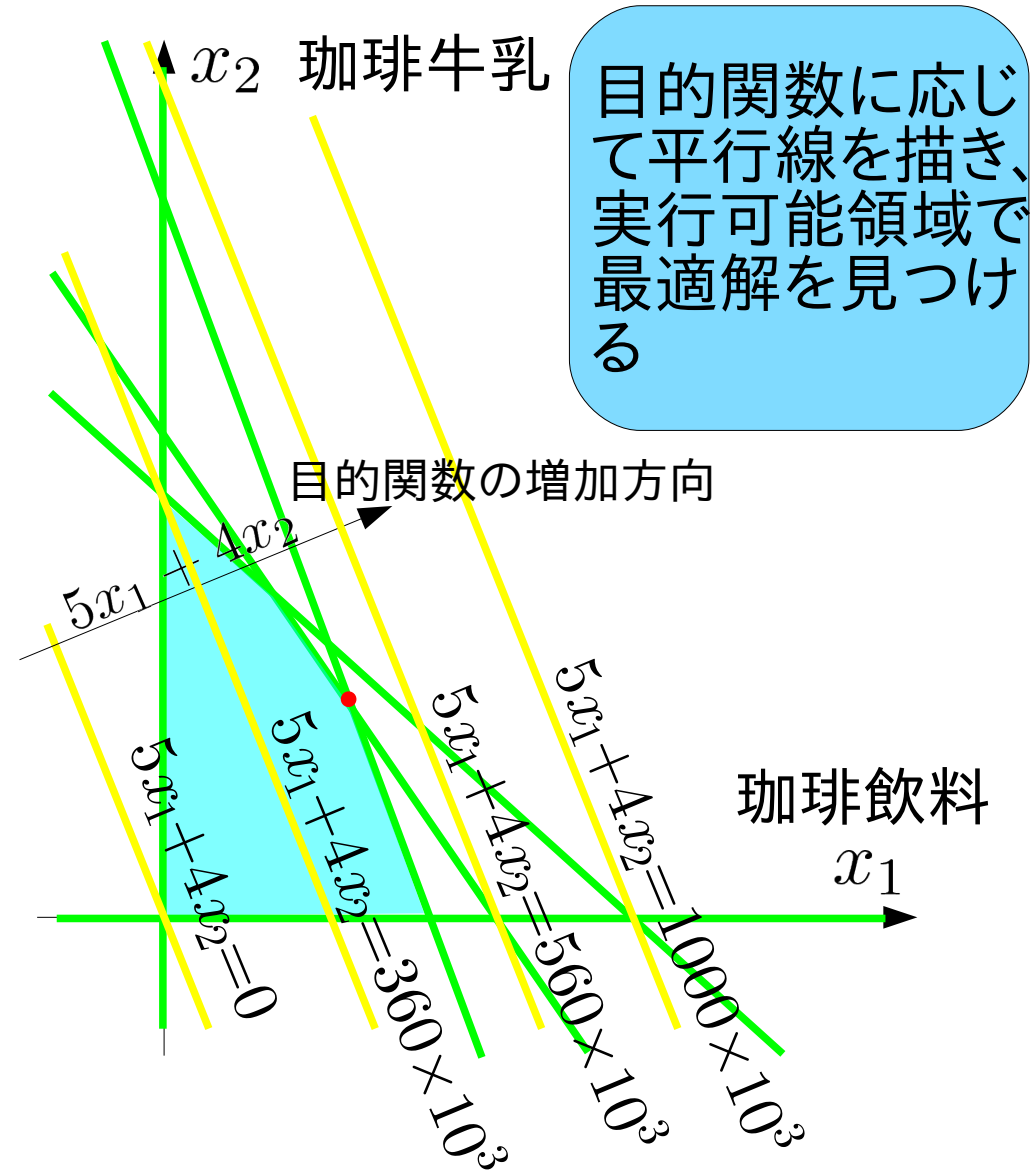
①  $15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$

②  $10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$

③  $9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$

④  $x_1 = 0$

⑤  $x_2 = 0$



# 課題2 グラフを利用した解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

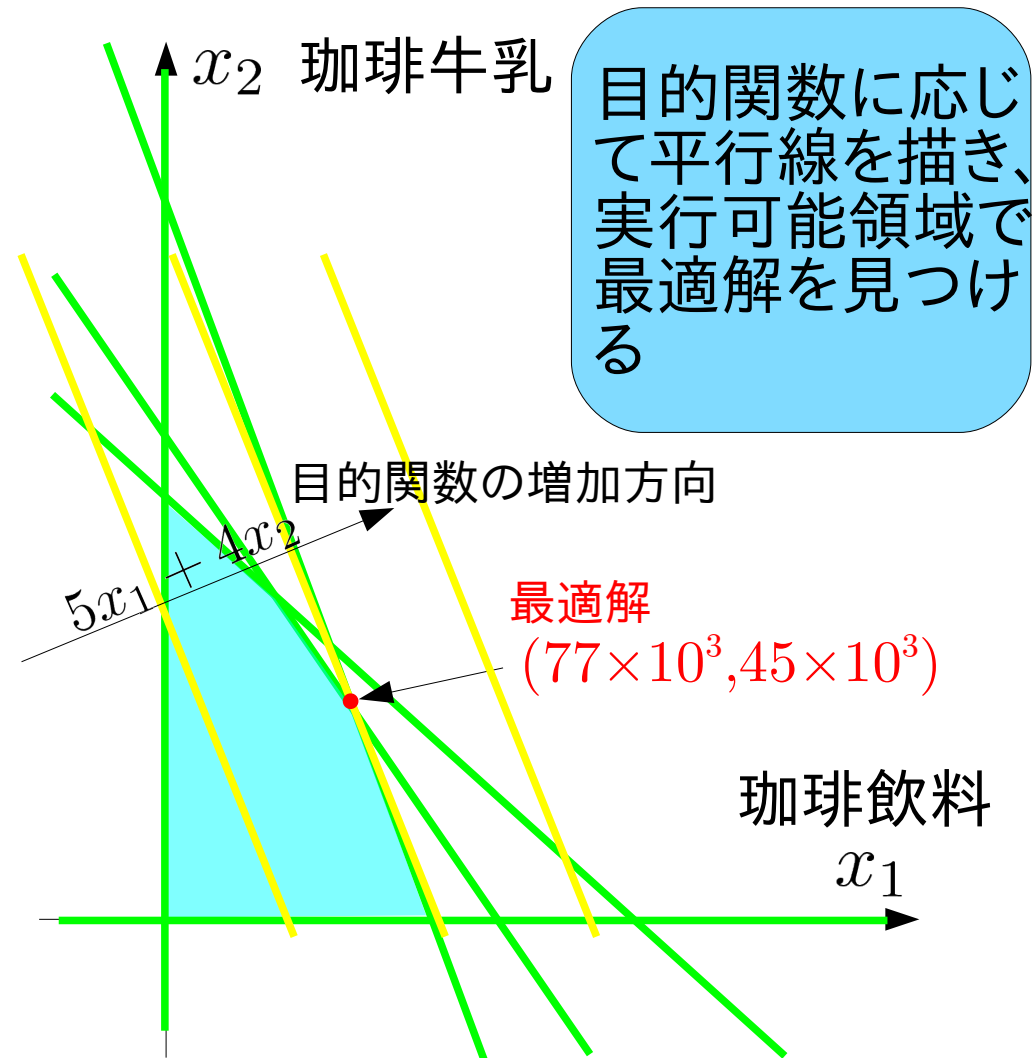
$$\textcircled{1} 15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$$

$$\textcircled{2} 10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$$

$$\textcircled{3} 9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$$

$$\textcircled{4} x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} x_2 = 0$$



# 課題2 グラフを利用した解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

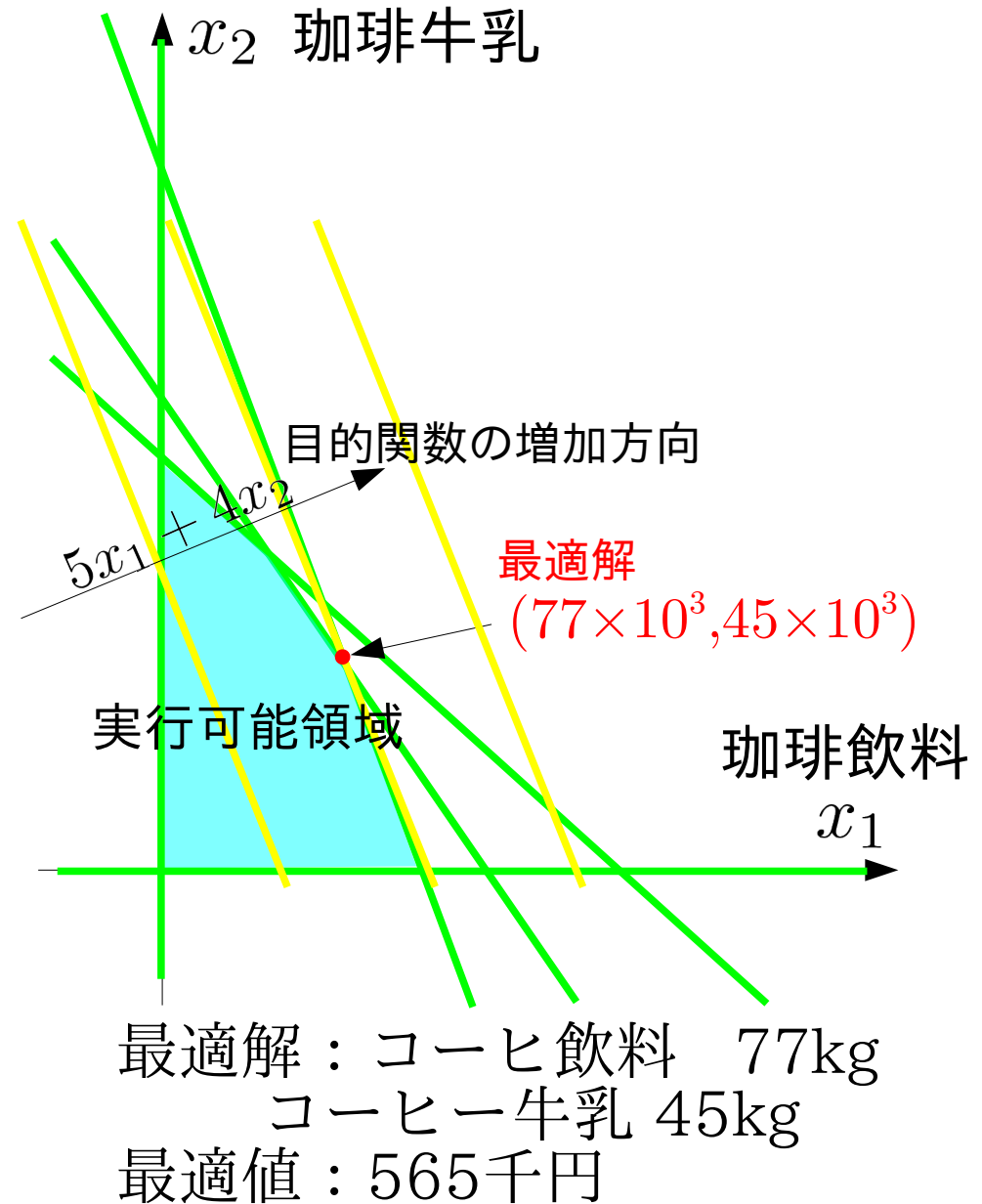
①  $15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$

②  $10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$

③  $9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$

④  $x_1 = 0$

⑤  $x_2 = 0$



# 課題2 グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

$$\textcircled{1} 15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$$

$$\textcircled{2} 10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$$

$$\textcircled{3} 9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$$

$$\textcircled{4} \quad \quad \quad x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} \quad \quad \quad x_2 = 0$$

方程式			実行可能?	目的関数値
①②				
①③				
①④				
①⑤				
②③				
②④				
②⑤				
③④				
③⑤				
④⑤				

制約式に対応する方程式を書き出し、交点を与える組合せを全て求める

# 課題2 グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

$$\textcircled{1} 15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$$

$$\textcircled{2} 10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$$

$$\textcircled{3} 9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$$

$$\textcircled{4} \quad \quad \quad x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} \quad \quad \quad x_2 = 0$$

方程式	$x_1$	$x_2$	実行可能?	目的関数値
①②	$77 \times 10^3$	$45 \times 10^3$		
①③	$65.6 \times 10^3$	$60.4 \times 10^3$		
①④	0	$150 \times 10^3$		
①⑤	$110 \times 10^3$	0		
②③	$37.8 \times 10^3$	$73.0 \times 10^3$		
②④	0	$100 \times 10^3$		
②⑤	$140 \times 10^3$	0		
③④	0	$90 \times 10^3$		
③⑤	$200 \times 10^3$	0		
④⑤	0	0		

連立方程式を解き、全ての交点を  
求める

# 課題2 グラフの交点を総当たりする解法

$$\begin{aligned}
 &\text{maximize} \\
 &\quad 5x_1 + 4x_2 \\
 &\text{subject to} \\
 &\quad 15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3 \\
 &\quad 10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3 \\
 &\quad 9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3 \\
 &\quad x_1 \geq 0 \\
 &\quad x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

グラフを与える方程式

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad &15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3 \\
 \textcircled{2} \quad &10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3 \\
 \textcircled{3} \quad &9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3 \\
 \textcircled{4} \quad &x_1 = 0 \\
 \textcircled{5} \quad &x_2 = 0
 \end{aligned}$$

方程式	$x_1$	$x_2$	実行可能?	目的関数値
①②	$77 \times 10^3$	$45 \times 10^3$	○	
①③	$65.6 \times 10^3$	$60.4 \times 10^3$	×	
①④	0	$150 \times 10^3$	×	
①⑤	$110 \times 10^3$	0	○	
②③	$37.8 \times 10^3$	$73.0 \times 10^3$	○	
②④	0	$100 \times 10^3$	×	
②⑤	$140 \times 10^3$	0	×	
③④	0	$90 \times 10^3$	○	
③⑤	$200 \times 10^3$	0	×	
④⑤	0	0	○	

交点を制約式に代入し、全ての交点の実行可能性を調べる



# 課題2 グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

$$\textcircled{1} 15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$$

$$\textcircled{2} 10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$$

$$\textcircled{3} 9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$$

$$\textcircled{4} x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} x_2 = 0$$

方程式	$x_1$	$x_2$	実行可能?	目的関数値
①②	$77 \times 10^3$	$45 \times 10^3$	○	$565 \times 10^3$
①③	$65.6 \times 10^3$	$60.4 \times 10^3$	×	
①④	0	$150 \times 10^3$	×	
①⑤	$110 \times 10^3$	0	○	$550 \times 10^3$
②③	$37.8 \times 10^3$	$73.0 \times 10^3$	○	$481 \times 10^3$
②④	0	$100 \times 10^3$	×	
②⑤	$140 \times 10^3$	0	×	
③④	0	$90 \times 10^3$	○	$360 \times 10^3$
③⑤	$200 \times 10^3$	0	×	
④⑤	0	0	○	0

実行可能な交点における目的関数値を求める

# 課題2 グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

グラフを与える方程式

$$\textcircled{1} 15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$$

$$\textcircled{2} 10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$$

$$\textcircled{3} 9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$$

$$\textcircled{4} x_1 = 0$$

$$\textcircled{5} x_2 = 0$$

方程式	$x_1$	$x_2$	実行可能?	目的関数値
$\textcircled{1}\textcircled{2}$	$77 \times 10^3$	$45 \times 10^3$	○	$565 \times 10^3$
$\textcircled{1}\textcircled{3}$	$65.6 \times 10^3$	$60.4 \times 10^3$	×	
$\textcircled{1}\textcircled{4}$	0	$150 \times 10^3$	×	
$\textcircled{1}\textcircled{5}$	$110 \times 10^3$	0	○	$550 \times 10^3$
$\textcircled{2}\textcircled{3}$	$37.8 \times 10^3$	$73.0 \times 10^3$	○	$481 \times 10^3$
$\textcircled{2}\textcircled{4}$	0	$100 \times 10^3$	×	
$\textcircled{2}\textcircled{5}$	$140 \times 10^3$	0	×	
$\textcircled{3}\textcircled{4}$	0	$90 \times 10^3$	○	$360 \times 10^3$
$\textcircled{3}\textcircled{5}$	$200 \times 10^3$	0	×	
$\textcircled{4}\textcircled{5}$	0	0	○	0

目的関数最適化の条件に合う  
最適解を見つける

# 課題2 グラフの交点を総当たりする解法

$$\begin{aligned}
 &\text{maximize} \\
 &5x_1 + 4x_2 \\
 &\text{subject to} \\
 &15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3 \\
 &10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3 \\
 &9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3 \\
 &x_1 \geq 0 \\
 &x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

グラフを与える方程式

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} & 15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3 \\
 \textcircled{2} & 10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3 \\
 \textcircled{3} & 9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3 \\
 \textcircled{4} & x_1 = 0 \\
 \textcircled{5} & x_2 = 0
 \end{aligned}$$

方程式	$x_1$	$x_2$	実行可能?	目的関数値
①②	$77 \times 10^3$	$45 \times 10^3$	○	$565 \times 10^3$
①③	$65.6 \times 10^3$	$60.4 \times 10^3$	×	
①④	0	$150 \times 10^3$	×	
①⑤	$110 \times 10^3$	0	○	$550 \times 10^3$
②③	$37.8 \times 10^3$	$73.0 \times 10^3$	○	$481 \times 10^3$
②④	0	$100 \times 10^3$	×	
②⑤	$140 \times 10^3$	0	×	
③④	0	$90 \times 10^3$	○	$360 \times 10^3$
③⑤	$200 \times 10^3$	0	×	
④⑤	0	0	○	0

最適解： コーヒ飲料 77kg  
 コーヒー牛乳 45kg  
 最適値： 565千円

# 2018数理計画法

## 第2回：線形計画問題の標準形

# 「素朴な解法」の問題点と解決法

- グラフを用いた解法
  - 2~3変数までの問題に適用可能
  - 計算機アルゴリズムとして構成し難い
- 交点を総当たりする解法
  - 多変数の問題に適用可能
  - 交点の実行可能性を調べる手間がある
  - 変数が増えると無駄な交点計算が増える
- 単体法 (シンプレックス法、Simplex Method)  
G. B. Danzig (1947)
  - 問題を標準化し、規則にしたがって表に変換する。
  - 決められた手順で表を更新して最適解を見つける。

# 線形計画問題の標準化

- 不等式標準形
  - 目的関数は最小化される
  - 制約式は「左辺に変数と係数 $\geq$ 右辺に定数のみ」
  - 全ての変数は非負
- 等式標準形
  - 目的関数は最小化される
  - 制約式は「左辺に変数と係数 $=$ 右辺に定数のみ」
  - 全ての変数は非負
- シンプレックス表

等式標準形の制約式から左辺の係数、右辺の定数、目的関数から左辺の係数を取り表にしたもの

# 線形計画問題の不等式標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数 $\geq$ 右辺に定数のみ」
- 全ての変数は非負
- 規則にしたがって問題を書換える

元の問題と正しく  
対応するように変  
形すること

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \\ &\quad 5x_1 + 4x_2 \\ &\text{subject to} \\ &\quad 15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3 \\ &\quad 10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3 \\ &\quad 9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3 \\ &\quad x_1 \geq 0 \\ &\quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

元の問題(演習1課題1)

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \\ &\quad -5x_1 - 4x_2 \\ &\text{subject to} \\ &\quad -15x_1 - 11x_2 \geq -1650 \times 10^3 \\ &\quad -10x_1 - 14x_2 \geq -1400 \times 10^3 \\ &\quad -9x_1 - 20x_2 \geq -1800 \times 10^3 \\ &\quad x_1 \geq 0 \\ &\quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

不等式標準形

# 線形計画問題の不等式標準形

- 目的関数は最小化される  
–1倍して最小化問題に書換える  
 $\text{maximize } 5x_1 + 4x_2 \Rightarrow \text{minimize } -5x_1 - 4x_2$
- 制約式は「左辺に変数と係数 $\geq$ 右辺に定数のみ」  
両辺を–1倍し不等号の向きを揃える  
 $x_1 - x_2 \leq 1 \Rightarrow -x_1 + x_2 \geq -1$   
1つの等式制約を2つの不等式制約で置換え  
 $x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 1, -x_1 - x_2 \geq -1$
- 全ての変数は非負  
非正変数を–1倍した非負変数で置換える  
 $x_1 \leq 0 \Rightarrow x_2 \geq 0 \quad (x_2 = -x_1)$   
自由変数を2つの非負変数で置換える  
 $x \Rightarrow x_1, x_2 \geq 0 \quad (x = x_1 - x_2)$

**全ての線形計画問題を不等式標準形で表すことができる**



# 線形計画問題の等式標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数=右辺に定数のみ」
- 全ての変数は非負
- 変数を加えて不等式→等式に書換える
  - 左辺 $\leq$ 右辺→左辺に不足する分を非負変数で補う
  - 左辺 $\geq$ 右辺→左辺が過剰な分を非負変数で減らす

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 + x_3 = 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 + x_4 = 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 + x_5 = 1800 \times 10^3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

元の問題(演習1課題1)

等式標準形

# 線形計画問題の等式標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数=右辺に定数のみ」
- 全ての変数は非負
- 変数を加えて不等式→等式に書換える
  - 左辺 $\leq$ 右辺→左辺に不足する分を非負変数で補う
  - 左辺 $\geq$ 右辺→左辺が過剰な分を非負変数で減らす

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$-15x_1 - 11x_2 \geq -1650 \times 10^3$$

$$-10x_1 - 14x_2 \geq -1400 \times 10^3$$

$$-9x_1 - 20x_2 \geq -1800 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

不等式標準形

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$-15x_1 - 11x_2 - x_3 = -1650 \times 10^3$$

$$-10x_1 - 14x_2 - x_4 = -1400 \times 10^3$$

$$-9x_1 - 20x_2 - x_5 = -1800 \times 10^3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

等式標準形

# 線形計画問題の等式標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数=右辺に定数のみ」
- 全ての変数は非負
- 不等式標準形で用いた式変形に加え、
- 変数を追加して、不等式を等式と追加変数の非負条件で置換える
  - 左辺 $\leq$ 右辺 $\rightarrow$ 左辺に不足する分を非負変数で補う

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \quad 9x_1 + 20x_2 + x_3 = 1800$$
$$x_3 \geq 0$$

- 左辺 $\geq$ 右辺 $\rightarrow$ 左辺が過剰な分を非負変数で減らす

$$9x_1 + 20x_2 \geq 1800 \quad 9x_1 + 20x_2 - x_4 = 1800$$
$$x_4 \geq 0$$

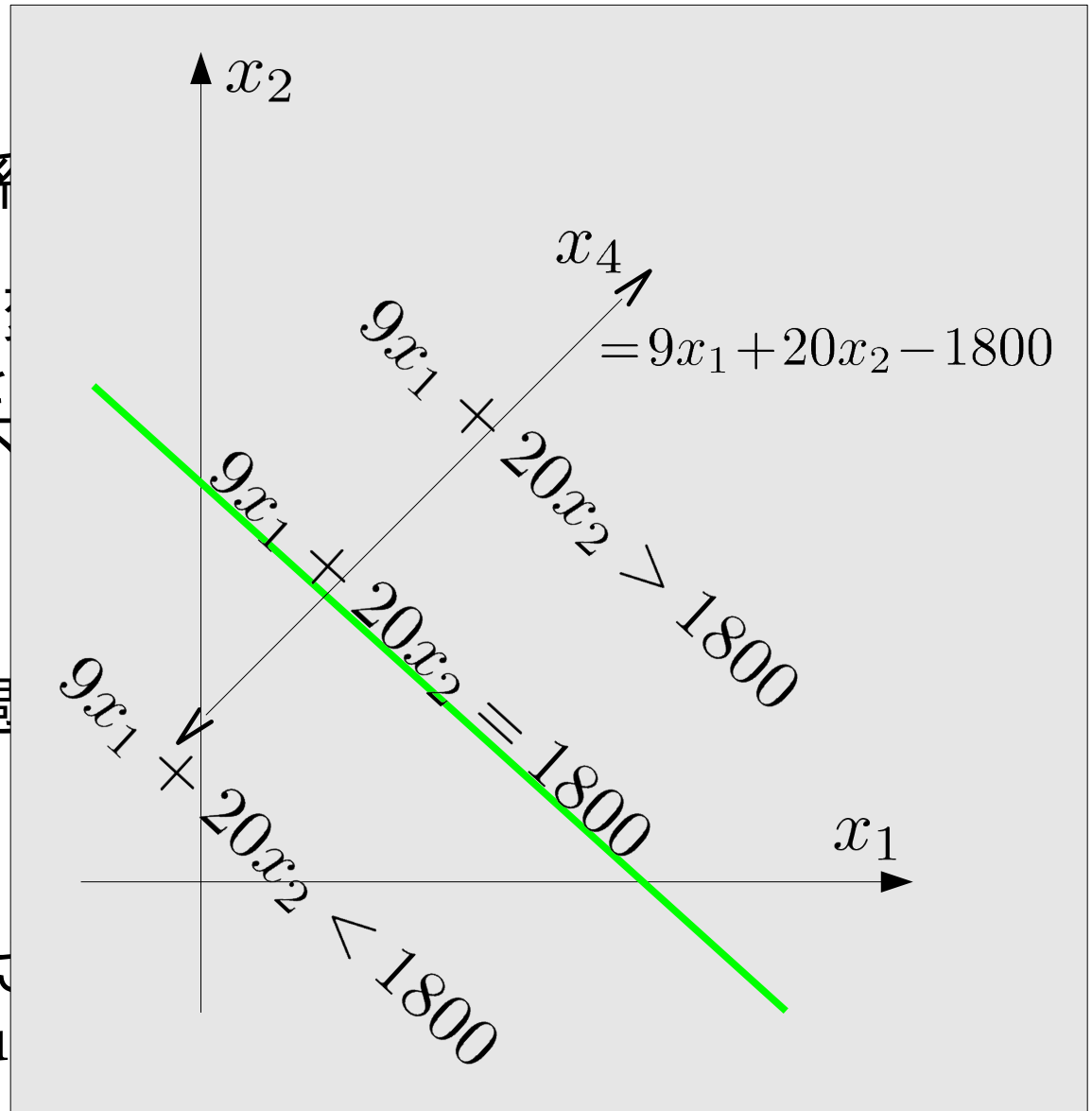
※元の不等式の成否は追加された変数の非負条件に対応する。

※  $x_3$ をslack変数、 $x_4$ をsurplus変数と呼ぶこともある。

# 線形計画問題の等式標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数」
- 全ての変数は非負
- 不等式標準形で用いた式
- 変数を追加して、不等式を
  - 左辺  $\leq$  右辺  $\rightarrow$  左辺に不  
 $9x_1 + 20x_2 \leq 1800$
  - 左辺  $\geq$  右辺  $\rightarrow$  左辺が過  
 $9x_1 + 20x_2 \geq 1800$

- ※元の不等式の成否は追加
- ※  $x_3$  をslack変数、 $x_4$  をsurplu



# 等式標準形のもとでの総当たり解法

等式標準形

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$15x_1 + 11x_2 + x_3 = 1650 \times 10^3$$

$$10x_1 + 14x_2 + x_4 = 1400 \times 10^3$$

$$9x_1 + 20x_2 + x_5 = 1800 \times 10^3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

1. 3つの方程式で定まる3変数を選ぶ。

2. 連立方程式を解き、変数値を定める。

例: ※  $x_1, x_2, x_3$ , であれば、 $x_4, x_5$  を無視して、

$$15x_1 + 11x_2 + x_3 = 1650 \times 10^3 \quad x_1 = 1400 \times 10^3 / 37$$

$$10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3 \quad x_2 = 2700 \times 10^3 / 37$$

$$9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3 \quad x_3 = 10350 \times 10^3 / 37$$

3. 全ての組合せに対して実行し、最適値・最適解を探す

# 等式標準形のもとでの総当たり解法

$x_1$ [ $\times 10^3$ ]	$x_2$ [ $\times 10^3$ ]	$x_3$ [ $\times 10^3$ ]	$x_4$ [ $\times 10^3$ ]	$x_5$ [ $\times 10^3$ ]	条件	目的関数 [ $\times 10^3$ ]
		1650	1400	1800		0
	150		-700	-1200	×	
	100	550		-200	×	
	90	660	140			-360
110			300	810		-550
140		-450		540	×	
200		-1350	-600		×	
77	45			207		-565
4400/67	4050/67		-6900/67		×	
1400/37	2700/37	10350/37				-481.08

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

※元の不等式制約には変数の非負条件が対応するので、  
 全ての変数が非負の場合だけを考えれば良い

# 線形計画問題の標準形

等式標準形にもとづく総当たりによる解法

1. 等式制約と変数の数に対応して、  
全ての組み合わせの連立方程式を解く
2. 変数の非負条件を満たす解について目的関数を求める
3. 最小(最大)の目的関数値を与える解が最適解となる。

問題点、

- ・ 連立方程式の組み合わせ数が爆発的に増加する
- ・ 不必要な連立方程式も解く必要がある

次回：単体法

次々回：巡回と最小添字規則

## 練習問題2

所定の用紙に回答を記入し提出してください。

ミックスジュース5Lの生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題:利益を最大化する2種類のミックス  
ジュースの生産量は?

課題1: 対応する線形計画問題の不等式標準形を示しなさい。

課題2: 不等式標準形を等式標準形に書換えなさい。

課題3: 総当たりによる解法を用いて最適解を求めなさい。



## 練習問題2解答例

課題1: 対応する線形計画問題の不等式標準形を示しなさい。

$$\text{minimize } -600x_1 - 500x_2$$

$$\text{subject to } -3x_1 - 1x_2 \geq -45000$$

$$-x_1 - 2x_2 \geq -40000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

課題2: 不等式標準形を等式標準形に書換えなさい。

$$\text{minimize } -600x_1 - 500x_2$$

$$\text{subject to } 3x_1 + 1x_2 + x_3 = 45000$$

$$1x_1 + 2x_2 + x_4 = 40000$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

# 練習問

2つの方程式で定める2つの変数の  
組合せと式を全て書き出す

課題3: 総当たりによる解法を

$$\text{minimize } -600x_1 - 500x_2$$

$$\text{subject to } 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 45000$$

$$1x_1 + 2x_2 + 1x_4 = 40000 \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

①

④

②

⑤

③

⑥

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$$

組合せは6通り

# 練習問

2つの方程式で定める2つの変数の  
組合せと式を全て書き出す

課題3: 総当たりによる解法を

$$\text{minimize } -600x_1 - 500x_2$$

$$\text{subject to } \begin{array}{l} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_4 = 40000 \end{array} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$\textcircled{1} \begin{array}{l} 3x_1 + 1x_2 = 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 = 40000 \end{array}$$

④

②

⑤

③

⑥

# 練習問

2つの方程式で定める2つの変数の  
組合せと式を全て書き出す

課題3: 総当たりによる解法を

$$\text{minimize } -600x_1 - 500x_2$$

$$\text{subject to } 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 45000$$

$$1x_1 + 2x_2 + 1x_4 = 40000 \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 = 40000 \end{cases}$$

④

$$\textcircled{2} \begin{cases} 3x_1 + 1x_3 = 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 = 40000 \end{cases}$$

⑤

③

⑥

# 練習問

2つの方程式で定める2つの変数の  
組合せと式を全て書き出す

課題3: 総当たりによる解法を

$$\text{minimize } -600x_1 - 500x_2$$

$$\text{subject to } \begin{cases} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_4 = 40000 \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 = 40000 \end{cases}$$

④

$$\textcircled{2} \begin{cases} 3x_1 + 1x_3 = 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 = 40000 \end{cases}$$

⑤

$$\textcircled{3} \begin{cases} 3x_1 + 0x_4 = 45000 \\ 1x_1 + 1x_4 = 40000 \end{cases}$$

⑥

練習問 2つの方程式で定める2つの変数の  
組合せと式を全て書き出す

課題3: 総当たりによる解法を

minimize  $-600x_1 - 500x_2$

subject to  $3x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 45000$   
 $1x_1 + 2x_2 + 1x_4 = 40000$   $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

①  $3x_1 + 1x_2 = 45000$   
 $1x_1 + 2x_2 = 40000$

④  $1x_2 + 1x_3 = 45000$   
 $2x_2 + 0x_3 = 40000$

②  $3x_1 + 1x_3 = 45000$   
 $1x_1 + 0x_3 = 40000$

⑤

③  $3x_1 + 0x_4 = 45000$   
 $1x_1 + 1x_4 = 40000$

⑥

練習問 2つの方程式で定める2つの変数の  
組合せと式を全て書き出す

課題3: 総当たりによる解法を

minimize  $-600x_1 - 500x_2$

subject to 
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

① 
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \end{aligned}$$

④ 
$$\begin{aligned} 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 2x_2 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

② 
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

⑤ 
$$\begin{aligned} 1x_2 + 0x_4 &= 45000 \\ 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

③ 
$$\begin{aligned} 3x_1 + 0x_4 &= 45000 \\ 1x_1 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

⑥

練習問 2つの方程式で定める2つの変数の  
組合せと式を全て書き出す

課題3: 総当たりによる解法を

minimize  $-600x_1 - 500x_2$

subject to  $3x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 45000$   
 $1x_1 + 2x_2 + 1x_4 = 40000$   $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

①  $3x_1 + 1x_2 = 45000$   
 $1x_1 + 2x_2 = 40000$

④  $1x_2 + 1x_3 = 45000$   
 $2x_2 + 0x_3 = 40000$

②  $3x_1 + 1x_3 = 45000$   
 $1x_1 + 0x_3 = 40000$

⑤  $1x_2 + 0x_4 = 45000$   
 $2x_2 + 1x_4 = 40000$

③  $3x_1 + 0x_4 = 45000$   
 $1x_1 + 1x_4 = 40000$

⑥  $1x_3 + 0x_4 = 45000$   
 $0x_3 + 1x_4 = 40000$



練習問 2つの方程式で定める2つの変数の  
組合せと式を全て書き出す

課題3: 総当たりによる解法を

$$\text{minimize } -600x_1 - 500x_2$$

$$\text{subject to } \begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$\textcircled{1} \begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \begin{aligned} 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 2x_2 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \begin{aligned} 3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} \begin{aligned} 1x_2 + 0x_4 &= 45000 \\ 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \begin{aligned} 3x_1 + 0x_4 &= 45000 \\ 1x_1 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

$$\textcircled{6} \begin{aligned} 1x_3 + 0x_4 &= 45000 \\ 0x_3 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

# 練習問

方程式の解を求め、非負条件を満たさないものを除く

課題3: 総当たりによる解法を

$$\text{minimize } -600x_1 - 500x_2$$

$$\text{subject to } \begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

① 
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \\ x_1 &= 10000 \\ x_2 &= 15000 \end{aligned}$$

④ 
$$\begin{aligned} 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 2x_2 + 0x_3 &= 40000 \\ x_2 &= 20000 \\ x_3 &= 25000 \end{aligned}$$

② 
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 &= 40000 \\ x_1 &= 40000 \\ x_3 &= -75000 \end{aligned}$$

⑤ 
$$\begin{aligned} 1x_2 + 0x_4 &= 45000 \\ 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \\ x_2 &= 45000 \\ x_4 &= -50000 \end{aligned}$$

③ 
$$\begin{aligned} 3x_1 + 0x_4 &= 45000 \\ 1x_1 + 1x_4 &= 40000 \\ x_1 &= 15000 \\ x_4 &= 25000 \end{aligned}$$

⑥ 
$$\begin{aligned} 1x_3 + 0x_4 &= 45000 \\ 0x_3 + 1x_4 &= 40000 \\ x_3 &= 45000 \\ x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

# 練習問

非負条件を満たすものの目的関数値を求め、最適解を見つける

課題3: 総当たりによる解法を

$$\text{minimize } -600x_1 - 500x_2$$

$$\text{subject to } \begin{cases} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 & = 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 & + 1x_4 = 40000 \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

①

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 = 40000 \end{cases}$$

目的関数値  $x_1 = 10000$   
 $-13,500,000$   $x_2 = 15000$

④

$$\begin{cases} 1x_2 + 1x_3 = 45000 \\ 2x_2 + 0x_3 = 40000 \end{cases}$$

目的関数値  $x_2 = 20000$   
 $-10,000,000$   $x_3 = 25000$

②

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_3 = 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 = 40000 \end{cases}$$

$x_1 = 40000$   
 ~~$x_3 = -75000$~~

⑤

$$\begin{cases} 1x_2 + 0x_4 = 45000 \\ 2x_2 + 1x_4 = 40000 \end{cases}$$

$x_2 = 45000$   
 ~~$x_4 = -50000$~~

③

$$\begin{cases} 3x_1 + 0x_4 = 45000 \\ 1x_1 + 1x_4 = 40000 \end{cases}$$

目的関数値  $x_1 = 15000$   
 $-8,000,000$   $x_4 = 25000$

⑥

$$\begin{cases} 1x_3 + 0x_4 = 45000 \\ 0x_3 + 1x_4 = 40000 \end{cases}$$

目的関数値  $x_3 = 45000$   
 $0$   $x_4 = 40000$