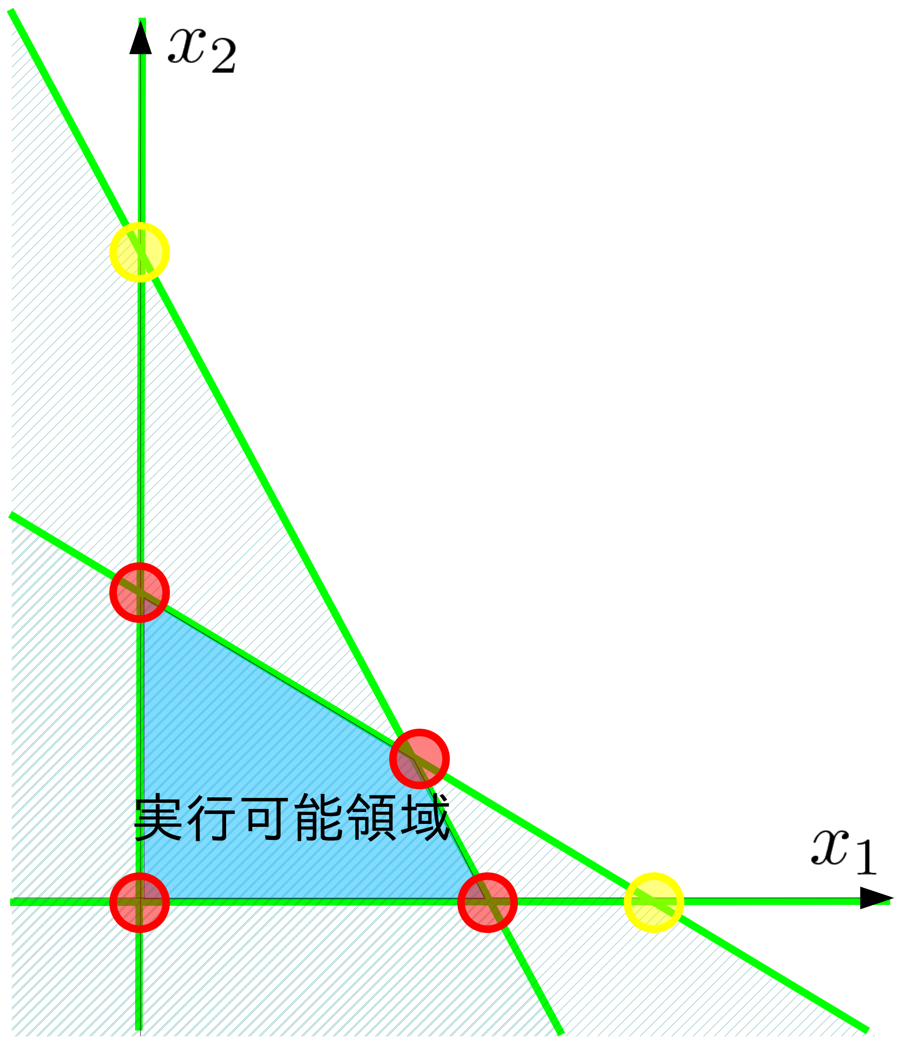
数理計画法

第4回：単体法の実践

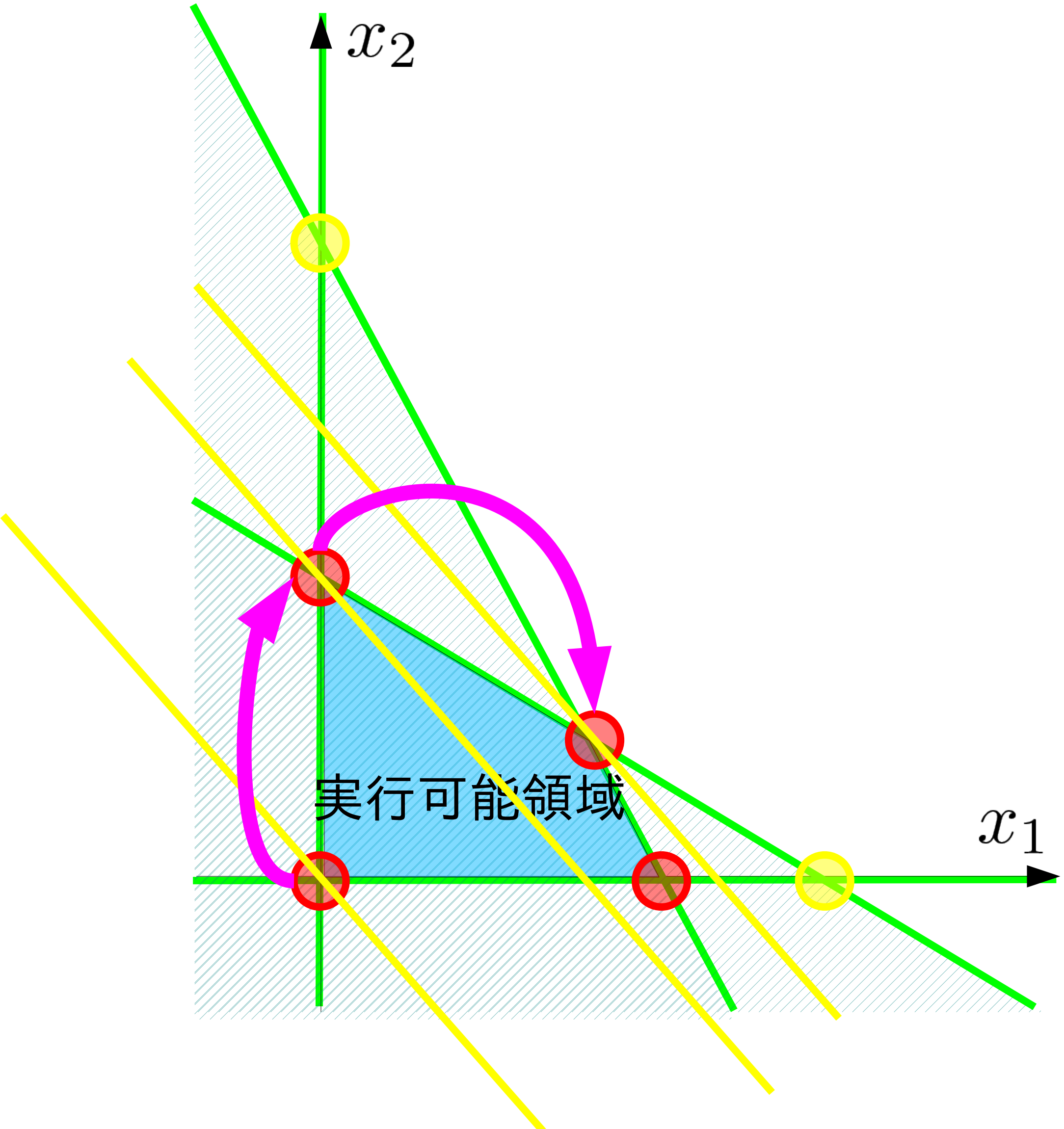
等式標準形の総当たり解法の問題点



- 全ての交点を求める際に不必要な連立方程式も解く必要がある
- 最適解は実行可能領域の端点に存在する
- 実行可能領域の端点だけを求めれば十分

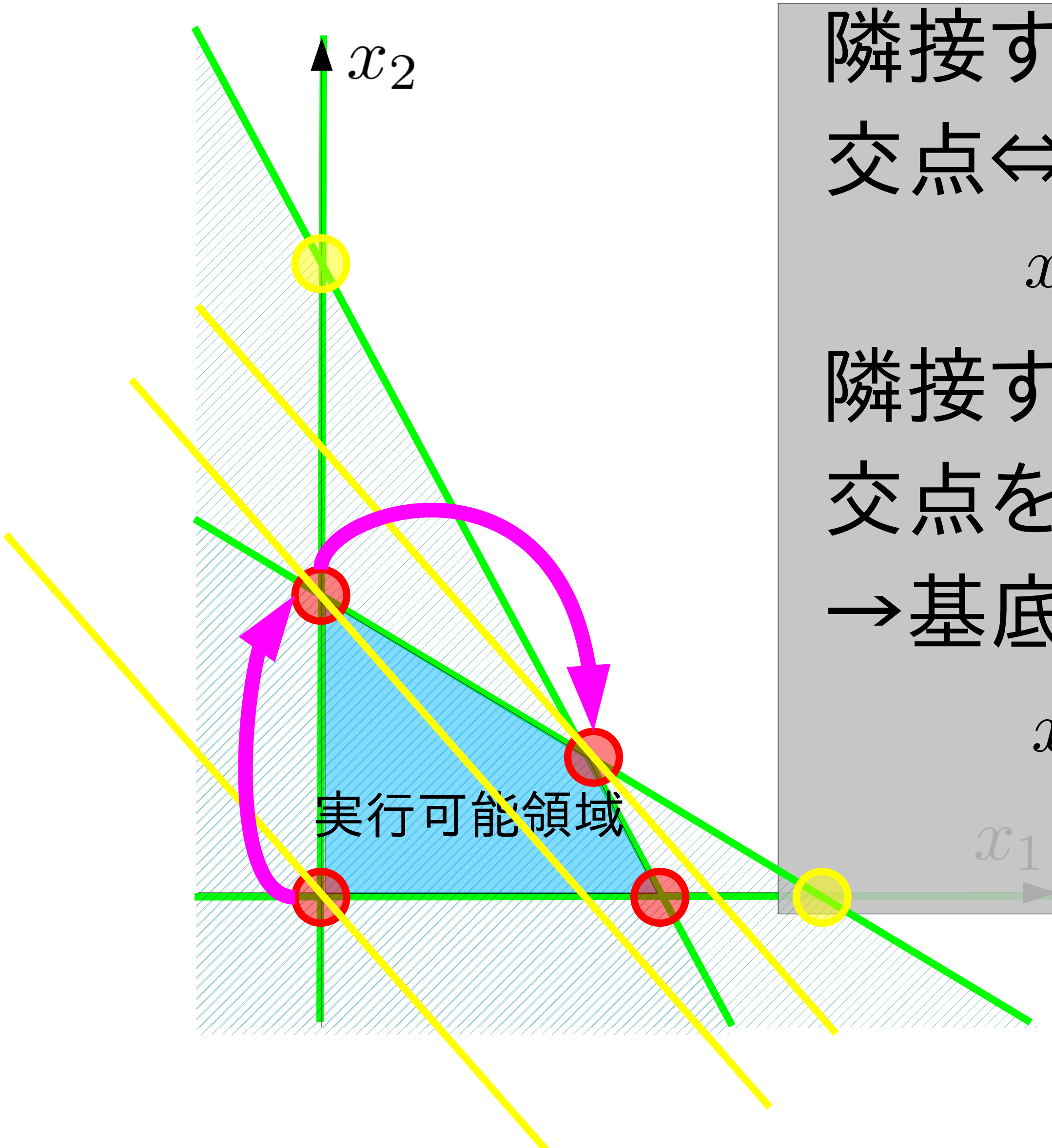
※実行可能解の端点だけを調べて最適解を探す方法→**単体法**

単体法の基本的なアイディア



- 実行可能領域の端点のうち、一つがあらかじめ分かっているものとし、これを最初の交点とする
- 隣接する端点のうち、目的関数を改善するものを選び、交点を更新する
- 最適点に辿りつくまで更新を繰り返す

単体法の基本的なアイディア



隣接する端点を求める

交点⇔基底/非基底変数の選択

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3, x_4$$

隣接する交点＝

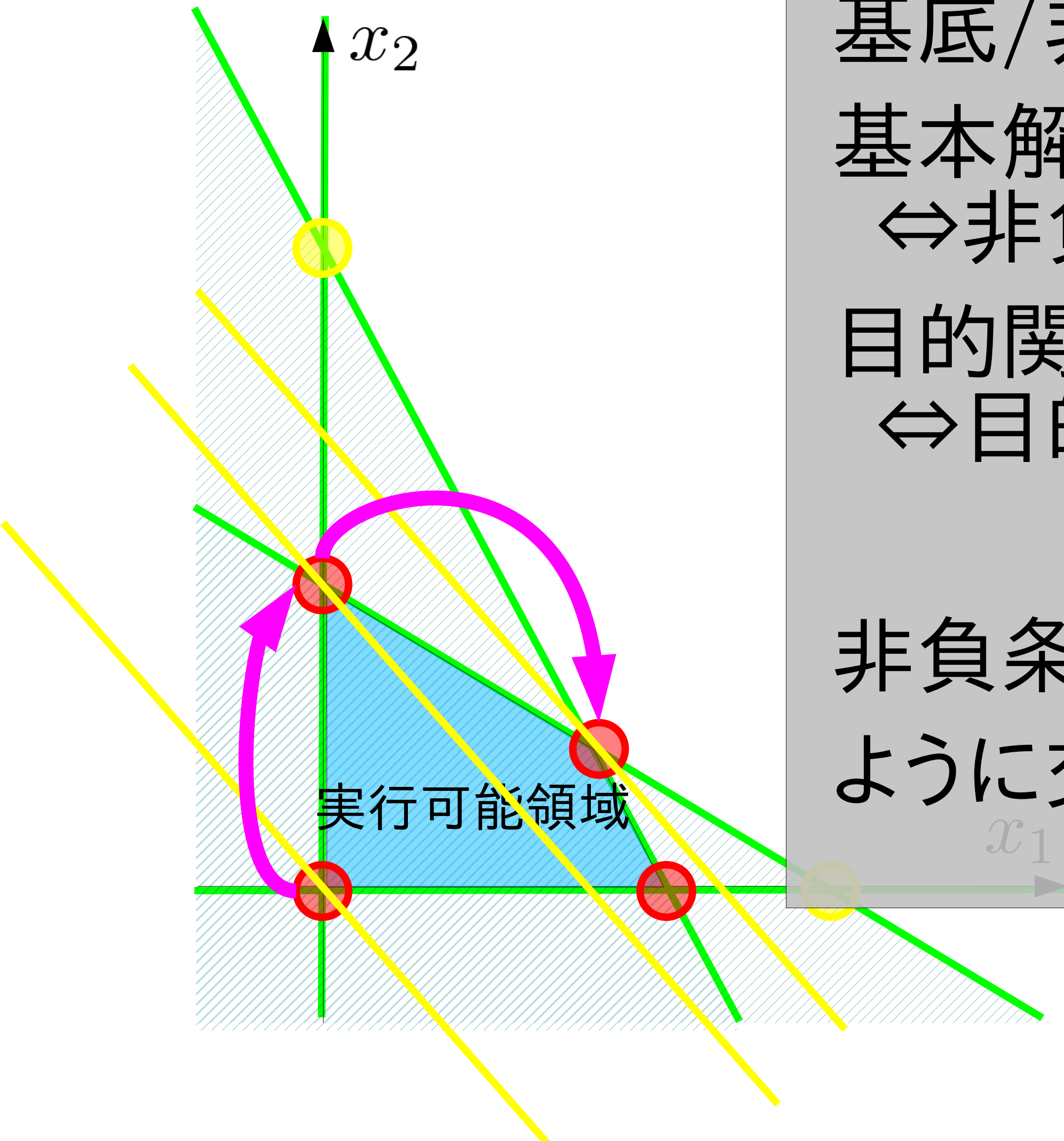
交点を成す直線が1つだけ異なる

→基底/非基底変数を1組替える

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3, x_4$$

$$\Longrightarrow x_1 = 0, x_2, x_3, x_4 = 0$$

単体法の基本的なアイディア



基底/非基底変数の交替候補

基本解が実行可能領域の端点
⇔非負条件を満たす

目的関数が改善する
⇔目的関数が減少する

非負条件を満し、目的関数が減る
ように交替させる変数を選ぶ

単体法

1. 目的関数を z として変数と見做し、制約式を追加
2. 基底変数に z を含み、基本解が非負条件を満たすように変数を選ぶ
3. 次の条件で基底/非基底変数の交替候補を選ぶ
   - 交替後も非負条件を満す
   - 交替により目的関数が改善する
4. 条件を満す候補がなくなるまで交替を繰り返す

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize } z\\
&\text{subject to}\\
&z + 600x_1 + 500x_2 = 0\\
&\quad 3x_1+1x_2+1x_3 \qquad\qquad = 45000\\
&\quad 1x_1+2x_2 \qquad\qquad +1x_4 = 40000\\
&\qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \ \geq 0
\end{aligned}
$$

非基底変数: $x_1 = 0, x_2 = 0$

基本解:

$$(z, x_3, x_4) = (0, 45000, 40000)$$

（例）

単体法

- x_1 とx_2が非基底変数

$$
\begin{array}{llllll}
 & z+\boxed{600x_1+500x_2} & & & = 0 \\
① & \quad 3x_1 \quad +1x_2 & +x_3 & & = 45000 \\
② & \quad 1x_1 \quad +2x_2 & & +x_4 & = 40000
\end{array}
$$

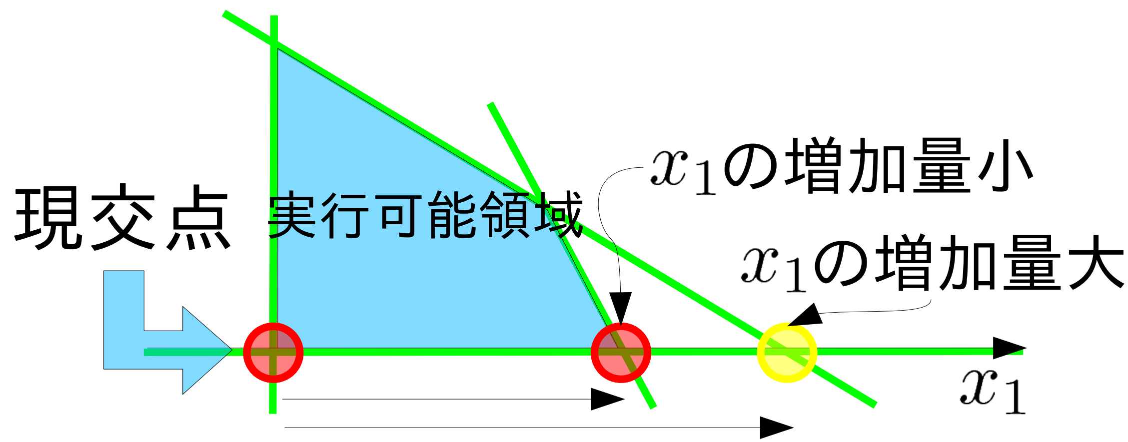
  残り部分が連立方程式

- 交替候補を非基底変数から探す

  x_1, x_2のどちらかが正になる、どちらでも z は減少

- x_1の最大増加量は①で15000,②で40000
  x_2の最大増加量は①で45000,②で20000

- 基底変数になる変数の値は増加する(0→非負)
- 非基底変数になる変数は次交点を成す直線(2次元の場合)に対応する
- 新しい基底変数の大小関係は下図の状況に対応する



シンプレックス表

- 交点の更新を表の上の操作で行う
  等式標準形からシンプレックス表を作る

例:

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize } z \\
&\text{subject to} \\
&\quad 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \qquad\quad = 45000 \\
&\quad 1x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + 1x_4 = 40000 \\
&\qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \ \geq 0 \\
&z + 600x_1 + 500x_2 = 0
\end{aligned}
$$

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	
0	1	2	0	1	40000	
1	600	500	0	0	0	

全ての等式の係数と右辺の定数を記入する

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	
0	1	2	0	1	40000	
1	600	500	0	0	0	

非基底変数
値は０(零)

基本解

全ての非負変数が非負(非基底変数はゼロ)なので、
基本解は実行可能解

- 基底変数/非基底変数の交替候補を探す
- 目的関数を含む等式(最下段)において、係数が正の非基底変数が基底変数になれば、目的関数は減少する
- 非基底変数の係数が大きいほど、目的関数は速く減少するものと考えて

ここでは x_1 を次の基底変数の候補とする

•基底変数/非基底変数の交替候補を探す
•目的関数を含む等式(最下段)において、係数が正の非基底変数が基底変数になれば、目的関数は減少する
•非基底変数の係数が大きいほど、目的関数は速く減少するものと考えて

ここでは x_1を次の基底変数の候補とする

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量	
0	3	1	1	0	45000	15000	$= 45000/3$
0	1	2	0	1	40000	40000	$= 40000/1$
1	600	500	0	0	0		

•各制約式の定数を x_1 の係数で割って最大増加量を求める
•最小の最大増加量を与える制約式の基底変数を次の非基底変数の候補とする

ここでは x_3を次の非基底変数の候補とする

ここでは x_1を次の基底変数の候補とする

ここでは x_3を次の基底変数の候補とする

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	
0	1	2	0	1	40000	
1	600	500	0	0	0	

$\times 1/3$

新しい基底変数に関して連立方程式を解く

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	1	2	0	1	40000	
1	600	500	0	0	0	

$- \times 1$

$- \times 600$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	5/3	-1/3	1	25000	
1	0	300	-200	0	-9E6	

新しい基底変数に関して連立方程式を解く

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	5/3	-1/3	1	25000	
1	0	300	-200	0	-9E6	

基本解

全ての非負変数が非負なので、基本解は実行可能解

目的関数の式に正の係数を持つ非基底変数は唯一つ

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	45000 $= 15000/(1/3)$
0	0	5/3	-1/3	1	25000	15000 $= 25000/(5/3)$
1	0	300	-200	0	-9E6	

新しい基底変数に関して連立方程式を解く

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	5/3	-1/3	1	25000	
1	0	300	-200	0	-9E6	

$\times 3/5$

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	1	-1/5	3/5	15000	
1	0	300	-200	0	-9E6	

$- \times 1/3$

$- \times 300$

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	0	2/5	-1/5	10000	
0	0	1	-1/5	3/5	15000	
1	0	0	-140	-180	-135E5	

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	基本解 定数	最大増加量
0	1	0	2/5	-1/5	10000	
0	0	1	-1/5	3/5	15000	
1	0	0	-140	-180	-135E5	

全ての非負変数が非負なので、基本解は実行可能解

目的関数の式に正の係数を持つ非基底変数は無いので、これ以上の改善はできない。

この時点で最適解が基本解として得られている

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 10000 \\
x_2 &= 15000 \\
x_3 &= 0 \\
x_4 &= 0 \\
z &= -13,500,000
\end{aligned}
$$

単体法(simplex method)
最も基本的な単体法の手順

1. 目的関数を変数として含む制約式を構成する
2. 基本解が実行可能解となる基底/非基底変数を選ぶ
3. 目的関数を減少する新しい基底変数を選ぶ
4. 基底変数の最大増加量を小さくする非基底変数を選ぶ、
5. 基底変数･非基底変数の交換で得た連立方程式を解く
6. 目的関数を増加できる限り変数の交換を繰り返す
7. 目的関数を改善できなくなったら最適解が求まっている

問題点
　最初の基本解撰択法、改善の停止と最適性の対応

次回：単体法の実践
次々回：単体法の二段階解法

演習問題3

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g	珈琲牛乳(100g	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

上記の最適化問題について、
課題1： 単体法を用いて最適解を求めなさい

課題2：グラフを描き、課題1で辿った端点を示しなさい

課題3：授業の感想・意見があれば書いてください

等式標準形

minimize z

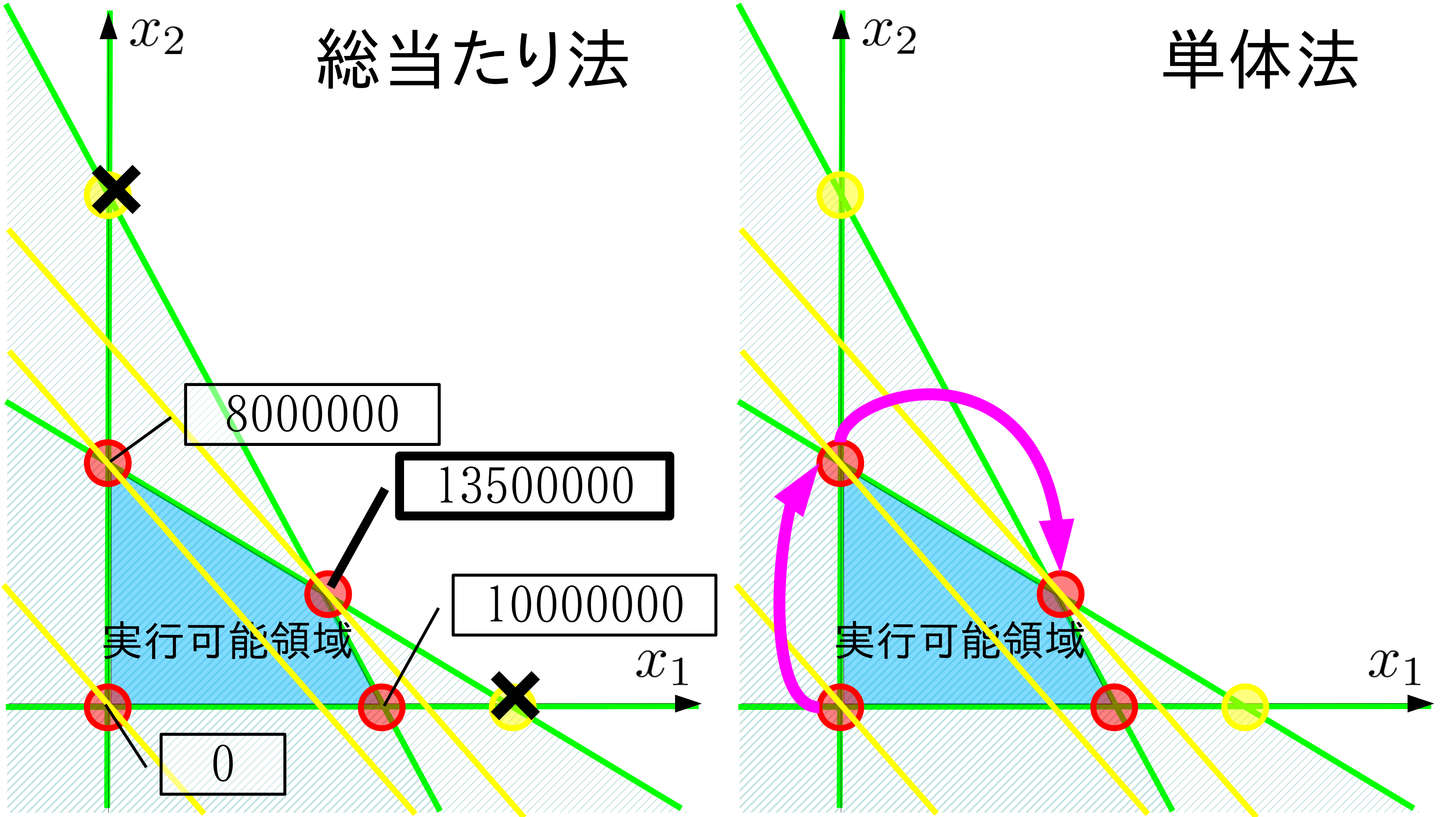
subjecto to

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650000 \\ 10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400000 \\ 9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800000 \\ z + 5x_1 + \ \ 4x_2 \qquad\quad &= 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

simplex 表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺
0	15	11	1	0	0	1650000
0	10	14	0	1	0	1400000
0	9	20	0	0	1	1800000
1	5	4	0	0	0	0

復習:単体法



x_2
総当たり法
8000000
13500000
10000000
0
実行可能領域
x_1
x_2
単体法
実行可能領域
x_1

復習:演習問題

コーヒードリンクの生産に必要な原料とその利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

最大の利益を与えるコーヒードリンクの生産量は?

1. 等式標準形を求め、simplex表を作りなさい

～ここまで～

2. 単体法を用いて最適解を求めなさい
3. グラフを描き、1で辿った端点の経路を示しなさい

コーヒードリンクの生産に必要な原料とその利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

変数の定義を決める

$x_1 \times 100[\mathrm{g}]$ $x_2 \times 100[\mathrm{g}]$ 珈琲飲料、珈琲牛乳の生産量

問題に対応する標準形を書き出す

線形計画問題

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subjecto to

$$
\begin{aligned}
15x_1 + 11x_2 &\le 1650000 \\
10x_1 + 14x_2 &\le 1400000 \\
9x_1 + 20x_2 &\le 1800000 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

等式標準形

minimize

$$z = -5x_1 - 4x_2$$

subjecto to

$$
\begin{aligned}
15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650000 \\
10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400000 \\
9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800000 \\
z + 5x_1 + 4x_2 &= 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0
\end{aligned}
$$

等式標準形

minimize

$$z = -5x_1 - 4x_2$$

subjecto to

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650000 \\ 10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400000 \\ 9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800000 \\ z + 5x_1 + \ \ 4x_2 \qquad\quad &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

等式標準形をもとにして、最初の simplex 表を作る

Z	X1	X2	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

simplex表の操作により単体法を実行する。

Z	X1	X2	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

係数が1になっている変数のうち、目的関数と合せて制約条件と同数の変数を基底変数とする。今回の例では、
後から追加した x_3, x_4, x_5

simplex表の操作により単体法を実行する。

基底変数　基底変数　基底変数　基底変数

Z	X1	X2	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

係数が1になっている変数のうち、目的関数と合せて制約条件と同数の変数を基底変数とする。今回の例では、後から追加した x_3, x_4, x_5

simplex表の操作により単体法を実行する。

非基底変数 非基底変数

Z	X1	X2	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

基底変数ではない変数が
非基底変数になる、
今回の例では、
元々の変数 x_1, x_2

simplex表の操作により単体法を実行する。

基底変数 非基底変数 非基底変数 基底変数 基底変数 基底変数

Z	X1	X2	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

基底変数ではない変数が
非基底変数になる、
今回の例では、
元々の変数 x_1, x_2

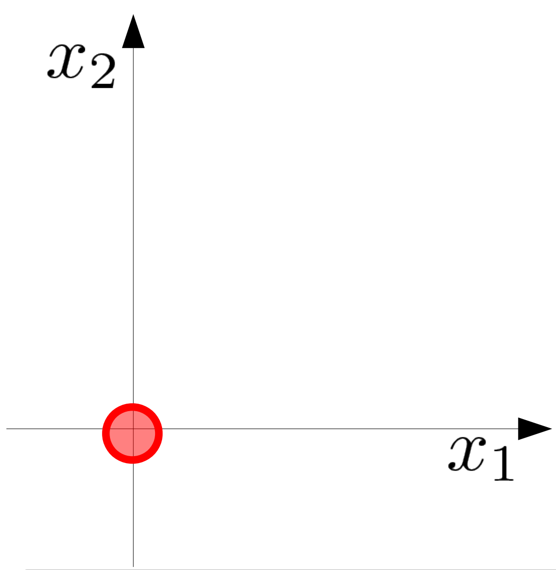
simplex表の操作により単体法を実行する。

Z　　基	X1　　非	X2　　非	X3　　基	X4　　基	X5　　基	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

基底変数・非基底変数の区別を判り易く示す。
どちらか片方だけでも十分。

simplex表の操作により単体法を実行する。

Z　基	X1　非	X2　非	X3　基	X4　基	X5　基	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	



$$
\begin{aligned}
15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650000 \\
10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400000 \\
9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800000 \\
z + 5x_1 + 4x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\
= (0, 0, 0, 16500000, 1400000, 1800000)
$$

非基底変数はゼロ、残りの変数は非負でなければならない。今回はOK

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1　非	X2　非	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

非基底変数にだけシルシを付ける。
実際の作業では、これが最初の段階になる。
以降、基底変数⇔非基底変数の交換を進める。

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 非	X2 非	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

1.交換により目的関数が改善(減少)する。

$$z = 0 \rightarrow z + 5x_1 = 0 \text{ or } z + 4x_2 = 0$$

- 係数が正ならば目的関数は改善(減少)する。

まず、非基底変数の中から基底変数に換えるものを決める。
入れ換えで目的関数が改善するものを選ばなくてはならない、
例では x_1, x_2 を基底変数とした場合の目的関数値を考える。
目的関数の定義式より係数が正の変数を選べば良い。

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

1.交換により目的関数が改善(減少)する。

$$z = 0 \longrightarrow z + 5x_1 = 0 \text{ or } z + 4x_2 = 0$$

- 係数が正ならば目的関数は改善(減少)する。

今回は x_1, x_2 のいずれとも係数が正なので、どちらでもOK。
とりあえず、目的関数が速く減るように大きい方を選ぶことにして、x_1 の方を非基底変数→基底変数とする。

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

1.交換により目的関数が改善(減少)する

次に、x_1 との交換の相手を基底変数の x_3, x_4, x_5 から見つける。
交換後に全ての変数が非負条件を満たすものを選ぶ。
例えば、x_3 が非基底変数になると現れる等式を考える。

2.交換後も非負条件を満す。

$$x_3 = 1650000 \rightarrow 15x_1 = 1650000$$

- 定数項を係数で割り最大増加量を求める。
- 最小の最大増加量を与える非基底変数を選ぶ。

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
	10	14		1		1400000	$/10 = 140000$
	9	20			1	1800000	$/9 = 200000$
1	5	4				0	

1. 交換により目的関数が改善（減少）する

同様に x_3, x_4, x_5 非基底変数となった場合を考え、x_1の増加量を比較して、最小の増加量を与える交換を採用する。

2.交換後も非負条件を満す。

$$x_3 = 1650000 \rightarrow 15x_1 = 1650000$$

- 定数項を係数で割り最大増加量を求める。
- 最小の最大増加量を与える非基底変数を選ぶ。

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
	10	14		1		1400000	$/10 = 140000$
	9	20			1	1800000	$/9 = 200000$
1	5	4				0	

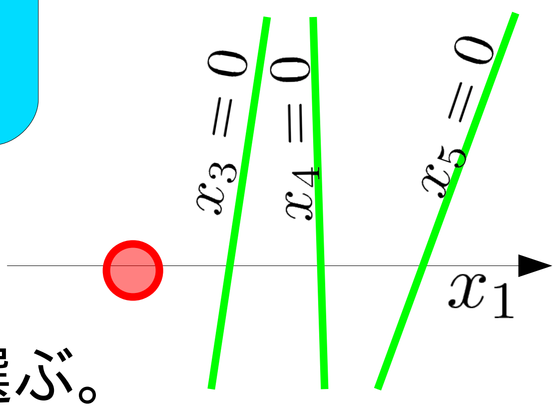
1.交換により目的関数が改善（減少）する

最小の増加量を与える交換により、新しい
交点が実行可能領域外に出ないようにする

2.交換後も非負条件を満たす。

$$x_3 = 1650000 \rightarrow 15x_1 = 1650000$$

- 定数項を係数で割り最大増加量を求める。
- 最小の最大増加量を与える非基底変数を選ぶ。



基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
	10	14		1		1400000	$/10 = 140000$
	9	20			1	1800000	$/9 = 200000$
1	5	4				0	

ここまでの作業でsimplex表は上のようになる。
この状態に対応する連立方程式は

$$
\begin{aligned}
15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650000 \\
10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400000 \\
9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800000 \\
z + 5x_1 + 4x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

なので、これを解く必要がある。

交換後の連立方程式を解く

$\times\frac{1}{15}$

Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	~~15~~ 1	~~11~~ 11/15	~~1~~ 1/15			~~1650000~~ 110000	/15 = 110000
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

基底変数に関する連立方程式を解き基本解を得る

$$\boxed{x_1 = 110000}$$

$$\cancel{15x_1 = 1650000}$$

$$10x_1 + x_4 = 1400000$$

$$9x_1 + x_5 = 1800000$$

$$z + 5x_1 = 0$$

新たに基底変数となり、ゼロから正に値の変わる
x_1 の値を求めるために、x_1 の係数で両辺を割る
simplex表では、対応する段の係数を全て割る

交換後の連立方程式を解く

	Z	X1	~~非~~	X2	非	X3	非	X4	X5	定数	最大増加量
$\times\frac{1}{15}$		~~15~~ 1		~~11~~ 11/15		~~1~~ 1/15				~~1650000~~ 110000	/15 = 110000
$-\times 10$		~~10~~ 0		~~14~~ 20/3		−2/3		1		~~1400000~~ 300000	/10 = 140000
$-\times 9$		~~9~~ 0		~~20~~ 67/5		−3/5			1	~~1800000~~ 810000	/9 = 200000
$-\times 5$	1	~~5~~ 0		~~4~~ 1/3		−1/3				~~0~~ −550000	

基底変数に関する連立方程式を解き基本解を得る

$$x_4 = 300000$$
$$x_5 = 810000$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 110000 \\ \cancel{10x_1 \qquad + x_4} &\cancel{= 1400000} \\ \cancel{9x_1 \qquad + x_5} &\cancel{= 1800000} \\ z + 5x_1 \qquad\qquad &= 0 \\ \boxed{z \qquad\qquad} &\boxed{= -550000} \end{aligned}$$

前段で得た関係式
$x_1+(11/15)x_2+(11/15)x_3=110000$
を使って他の方程式から x_1 を消去する

交換後の連立方程式を解く

	Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
$\times\frac{1}{15}$		$\cancel{15}$ 1	$\cancel{11}$ 11/15	$\cancel{1}$ 1/15			~~1650000~~ 110000	/15 = 110000
$-\times 10$		$\cancel{10}$ 0	$\cancel{14}$ 20/3	−2/3	1		~~1400000~~ 300000	/10 = 140000
$-\times 9$		$\cancel{9}$ 0	$\cancel{20}$ 67/5	−3/5		1	~~1800000~~ 810000	/9 = 200000
$-\times 5$	1	$\cancel{5}$ 0	$\cancel{4}$ 1/3	−1/3			$\cancel{0}$ −550000	

基底変数に関する連立方程式を解き基本解を得る

$$
\begin{aligned}
x_1 + 11x_2 + x_3 &= 110000 \\
+ 14x_2 \quad\quad x_4 &= 300000 \\
+ 20x_2 \quad\quad x_5 &= 810000 \\
z \quad + 4x_2 \quad\quad &= -550000
\end{aligned}
$$

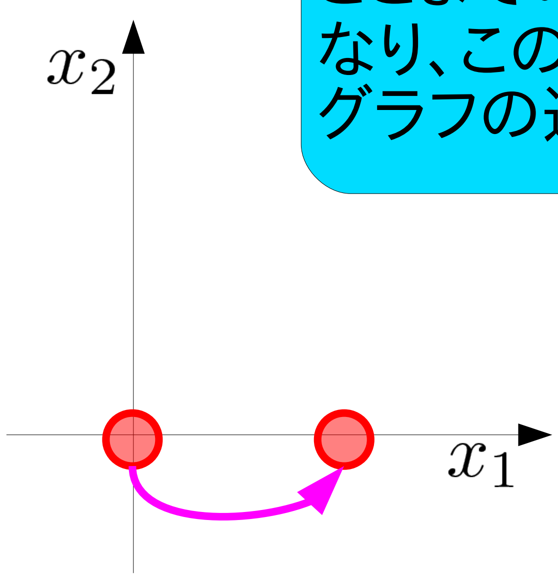
$$(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-550000, 110000, 0, 0, 300000, 810000)$$

simplex表の定数欄に現われた基本解は非負条件を満たす

交換後の連立方程式を解く

	Z	X1 ~~非~~	X2　非	X3　非	X4	X5	定数	最大増加量
$\times \frac{1}{15}$		~~15~~ 1	~~11~~ 11/15	~~1~~ 1/15			~~1650000~~ 110000	$/15 = 110000$
$-\times 10$		~~10~~ 0	~~14~~ 20/3	$-2/3$	1		~~1400000~~ 300000	$/10 = 140000$
$-\times 9$		~~9~~ 0	~~20~~ 67/5	$-3/5$		1	~~1800000~~ 810000	$/9 = 200000$
$-\times 5$	1	~~5~~ 0	~~4~~ 1/3	$-1/3$			~~0~~ -550000	

ここまでの作業で、simplex表は上のようになり、このときまでの基本解の移動は左下のグラフの通り



$$(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$
$$= (-550000, 110000, 0, 0, 300000, 810000)$$

表を更新する

	Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
$\times\frac{1}{15}$		~~15~~ 1	~~11~~ 11/15	~~1~~ 1/15			~~1650000~~ 110000	/15 = 110000
$-\times10$		~~10~~ 0	~~14~~ 20/3	−2/3	1		~~1400000~~ 300000	/10 = 140000
$-\times9$		~~9~~ 0	~~20~~ 67/5	−3/5		1	~~1800000~~ 810000	/9 = 200000
$-\times5$	1	~~5~~ 0	~~4~~ 1/3	−1/3			~~0~~ −550000	

新しい表に書き写して作業を進める。そのまま上書きでも可。

Z	X1	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	1	11/15	1/15			110000	
		20/3	-2/3	1		300000	
		67/5	-3/5		1	810000	
1		1/3	-1/3			-550000	

新しい表で基底変数・非基底変数の交換を続ける

Z	X1	X2 ~~非~~	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	1	11/15	1/15			110000	$/(11/15) = 150000$
		20/3	-2/3	1		300000	$/(20/3) = 45000$
		67/5	-3/5		1	810000	$/(67/5) = 60447.\cdots$
1		1/3	-1/3			-550000	

非基底変数のうち、目的関数の定義式で係数が正のものを選び、基底変数に換える
今回の例では、x_2

目的関数の定義式以外の定数項をその式でのx_2 の係数で割り、結果を最大増加量の欄に記す。

新しい表で基底変数･非基底変数の交換を続ける

Z	X1	X2 ~~非~~	X3 非	X4 非	X5	定数	最大増加量
	1	11/15	1/15			110000	$/(11/15) = 150000$
		20/3	-2/3	1		300000	$/(20/3) = 45000$
		67/5	-3/5		1	810000	$/(67/5) = 60447.\cdots$
1		1/3	-1/3			-550000	

最小の増加量 45000 を与える交換を選ぶと、
非基底変数になるのは x_4 となる

新しい表で基底変数･非基底変数の交換を続ける

$\times \frac{3}{20}$

Z	X1	X2 ~~非~~	X3 非	X4 非	X5	定数	最大増加量
	1	11/15	1/15			110000	
		~~20/3~~ 1	~~2/3~~ $-1/10$	~~1~~ $3/20$		~~300000~~ 45000	
		67/5	-3/5		1	810000	
1		1/3	-1/3			-550000	

x_2 と x_4 の交換で現われた連立方程式を解く。新しい基底変数の値を定めるために2段目の式を x_2 の係数(20/3)で割る。

新しい表で基底変数･非基底変数の交換を続ける

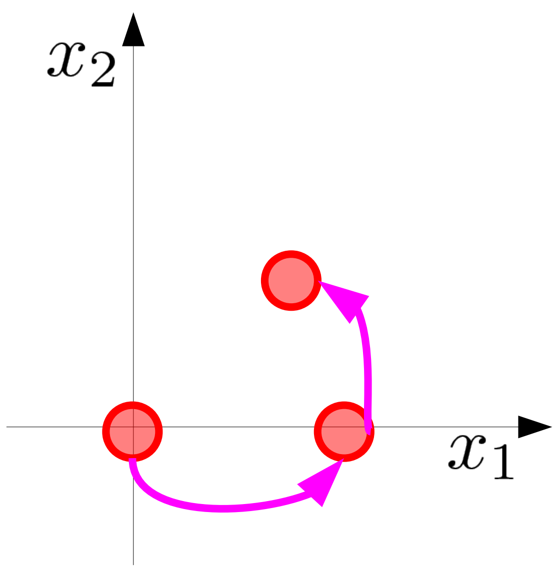
	Z	X1	X2 ~~非~~	X3 非	X4 非	X5	定数	最大増加量
$-\times\frac{11}{15}$		1	$\cancel{11/15}$ 0	$\cancel{1/15}$ $7/50$	$-\frac{11}{100}$		$\cancel{110000}$ 77000	
$\times\frac{3}{20}$			$\cancel{20/3}$ 1	$\cancel{2/3}$ $-1/10$	$\cancel{1}$ $3/20$		$\cancel{300000}$ 45000	
$-\times\frac{67}{5}$			$\cancel{67/5}$ 0	$\cancel{-3/5}$ $-37/50$	$-\frac{201}{100}$	1	$\cancel{810000}$ 207000	
$-\times\frac{1}{3}$	1		$\cancel{1/3}$ 0	$\cancel{-1/3}$ $-9/30$	$-\frac{1}{20}$		$\cancel{-550000}$ -565000	

x_2 について得た関係式を使って、他の段から x_2 を消去すると、連立方程式の解が定数欄に現われる。

新しい表で基底変数･非基底変数の交換を続ける

	Z	X1	X2 ~~非~~	X3 非	X4 非	X5	定数	最大増加量
$-\times\frac{11}{15}$		1	~~11/15~~ 0	~~1/15~~ 7/50	$-\frac{11}{100}$		~~110000~~ 77000	/(11/15) = 150000
$\times\frac{3}{20}$			~~20/3~~ 1	~~2/3~~ −1/10	~~1~~ 3/20		~~300000~~ 45000	/(20/3) = 45000
$-\times\frac{67}{5}$			~~67/5~~ 0	~~-3/5~~ −37/50	$-\frac{201}{100}$	1	~~810000~~ 207000	/(67/5) = 60447.⋯
$-\times\frac{1}{3}$	1		~~1/3~~ 0	~~-1/3~~ −9/30	$-\frac{1}{20}$		~~-550000~~ −565000	

ここまでの作業でsimplex表は上のようになり、目的関数の定義式に現われる非基底変数の係数は全て負になる。



$$(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$
$$= (-565000, 77000, 45000, 0, 0, 207000)$$

これ以上改善できないので、この時の基本解が最適解になる。

単体法のまとめ

- 最も基本的な単体法による解法
  1. 等式標準形を作り、係数を用いて simplex表を作る。
  2. slack変数surplus変数から基底変数を選ぶ
  3. 残りの変数を非基底変数とし、以下を繰り返す
     1. 次の条件を満す基底変数・非基底変数の交換を行
目的関数が改善(減少)する
交換後に基本解が非負条件を満す
     2. 基底変数の連立方程式を解き基本解を求める
  4. 改善ができなくなったら終了し、その時点の基本解を最適解とする
- 問題点
  - 最初の実行可能解を決める方法が欠けている
  - 最適解ではないのに目的関数が改善されない場合がある
  - 変数選択の候補を限定できない

演習問題4

5Lのミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題:利益を最大化するミックスジュースの生産量は?

課題1: simplex 表による単体法を用いて最適解を求めなさい。

課題2: グラフを描き、課題1で辿った端点の経路を示しなさい。

課題3:授業の感想・意見があれば書いてください

演習問題4
解答用紙左上に名前･学年･学籍番号を記入

5Lのミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題:利益を最大化するミックスジュースの生産量は?

る単体法を

題1で辿っ

見があれば

トロピカル: $x_1 \times 5[\mathrm{L}]$
フレッシュ: $x_2 \times 5[\mathrm{L}]$

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

等式標準形

minimize

$$z(= -600x_1 - 500x_2)$$

subject to

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$
$$z + 600x_1 + 500x_2 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

復習:単体法

- 等式標準形に対応する simplex 表を準備する

等式標準形
minimize
$z(= -600x_1 - 500x_2)$
subject to

$$3x_1 + \ \ x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$
$$z + 600x_1 + 500x_2 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- simplex 表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45×10^3	
0	1	2	0	1	40×10^3	
1	600	500	0	0	0	

復習:単体法

5変数、3制約式の等式標準形

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45×10^3	
0	1	2	0	1	40×10^3	
1	600	500	0	0	0	

5-3=2変数を無視すれば連立方程式を解くことができる

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 + x_3 &= 45\times10^3 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 &= 40\times10^3 \\
z + 600x_1 + 500x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

復習:単体法

5変数、3制約式の等式標準形

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45×10^3	
0	1	2	0	1	40×10^3	
1	600	500	0	0	0	

5-3=2変数を無視すれば連立方程式を解くことができる

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 &= 45\times10^3\\
x_1 + 2x_2 &= 40\times10^3\\
z + 600x_1 + 500x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

復習:単体法

5変数、3制約式の等式標準形

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45×10^3	
0	1	2	0	1	40×10^3	
1	600	500	0	0	0	

5-3=2変数を無視すれば連立方程式を解くことができる

$$\begin{aligned} 3x_1 \quad & = 45 \times 10^3 \\ x_1 \quad + x_4 & = 40 \times 10^3 \\ z + 600x_1 \quad & = 0 \end{aligned}$$

復習:単体法

5変数、3制約式の等式標準形

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45×10^3	
0	1	2	0	1	40×10^3	
1	600	500	0	0	0	

5-3=2変数を無視すれば連立方程式を解くことができる

$$+x_3 \qquad = 45\times10^3$$

$$+x_4 = 40\times10^3$$

$$z \qquad = 0$$

復習:単体法

5変数、3制約式の等式標準形

z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45×10^3	
0	1	2	0	1	40×10^3	
1	600	500	0	0	0	

5-3=2変数を無視すれば連立方程式を解くことができる

$$\begin{aligned} &+x_3 &&= 45\times10^3 \\ &&+x_4 &= 40\times10^3 \\ z &&&= 0 \end{aligned}$$

無視した変数：非基底変数、残りの変数を基底変数

基本解として x_1, x_2 を座標軸にとった原点を考える。

→ z, x_3, x_4 を基底変数、 x_1, x_2 を非基底変数とする

$$(z, x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 45\times10^3, 40\times10^3)$$

※ 基本解が実行可能(＝全ての変数が非負)であることを確認する

復習:単体法

- 実行可能領域の境界を辿り、目的関数を増加させる隣の基本解を探す

※ 隣の基本解→基底変数、非基底変数を1つずつ交換した基本解

非基底変数→基底変数とした場合に目的関数を減少させる変数を選ぶ
→目的関数の制約式において正の係数を持つ非基底変数を選ぶ

① ※ 複数の候補がある場合は?→一概には言えない
ここでは大きな係数を持つ変数を選ぶ

③

z	x_1 非	x_2 非	x_3 非	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45×10^3	$/3=15\times10^3$
0	1	2	0	1	40×10^3	$/1=40\times10^3$
1	① 600	500	0	0	0	

②

※ 非基底変数となることで、基本解における変数の値は 0 となる
→その分だけ基底変数となる変数(今回は x_1)が変化する

② ※基底変数となる変数の変化量を求める
→係数で定数欄の値を割り、最大変化量を求める
③ →最小の最大変化量を与える制約式に関わる変数を選ぶ
(基底変数→非基底変数とする)

復習:単体法

新しい基底変数からなる連立方程式を解き基本解を求める
→基底変数の係数が 1 となるように掃き出し操作をする

$\times 1/3$

z	x_1	x_2 非	x_3 非	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45×10^3	
0	1	2	0	1	40×10^3	
1	600	500	0	0	0	

$$
\begin{aligned}
3x_1 \quad +x_2+x_3 \qquad &= 45\times10^3 \\
x_1 \quad +2x_2 \qquad +x_4 &= 40\times10^3 \\
z+600x_1+500x_2 \qquad &= 0
\end{aligned}
$$

$-\times 1$

z	x_1	x_2 非	x_3 非	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15×10^3	
0	1	2	0	1	40×10^3	
1	600	500	0	0	0	

$-\times 600$

復習:単体法

新しい基底変数からなる連立方程式を解き基本解を求める
→基底変数の係数が 1 となるように掃き出し操作をする

$-\times 1$

z	x_1	x_2 非	x_3 非	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15×10^3	
0	1	2	0	1	40×10^3	
1	600	500	0	0	0	

$-\times 600$

z	x_1	x_2 非	x_3 非	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	5/3	-1/3	1	25000	
1	0	300	-200	0	-9000000	

$$\begin{aligned} x_1 \quad + \tfrac{1}{3}x_2 \quad + \tfrac{1}{3}x_3 \qquad\quad &= 15\times10^3 \\ + \tfrac{5}{3}x_2 \quad - \tfrac{1}{3}x_3 + x_4 &= 25\times10^3 \\ z \quad + 300x_2 - 200x_3 \qquad\quad &= -9\times10^6 \end{aligned}$$

※ 基本解が実行可能(＝全ての変数が非負)であることを確認する

復習:単体法

次の基底変数･非基底変数の交換を考える

z	x_1	x_2 ~~非~~	x_3 非	x_4 非	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	$/\frac{1}{3}=45\times10^3$
0	0	5/3	-1/3	1	25000	$/\frac{5}{3}=15\times10^3$
1	0	300	-200	0	-9000000	

正係数を持つ非基底変数は唯1つ→ x_2 を基底変数に変更

最小の最大増加量を与えるのは2段目→ x_4 を非基底変数に変更

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
	0	1	1/3	1/3	0	15000	
$\times3/5$	0	0	5/3	-1/3	1	25000	
	1	0	300	-200	0	-9000000	

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
$-\times\frac{1}{3}$	0	1	1/3	1/3	0	15000	
	0	0	1	-1/5	3/5	15000	
$-\times300$	1	0	300	-200	0	-9000000	

復習:単体法

基本解を求める

$-\times\frac{1}{3}$

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4 非	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	1	-1/5	3/5	15000	
1	0	300	-200	0	-9000000	

$-\times 300$

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4 非	定数	最大増加量
0	1	0	2/5	-1/5	10000	
0	0	1	-1/5	3/5	15000	
1	0	0	-140	-180	-13500000	

正係数を持つ非基底変数は存在しない→最適解