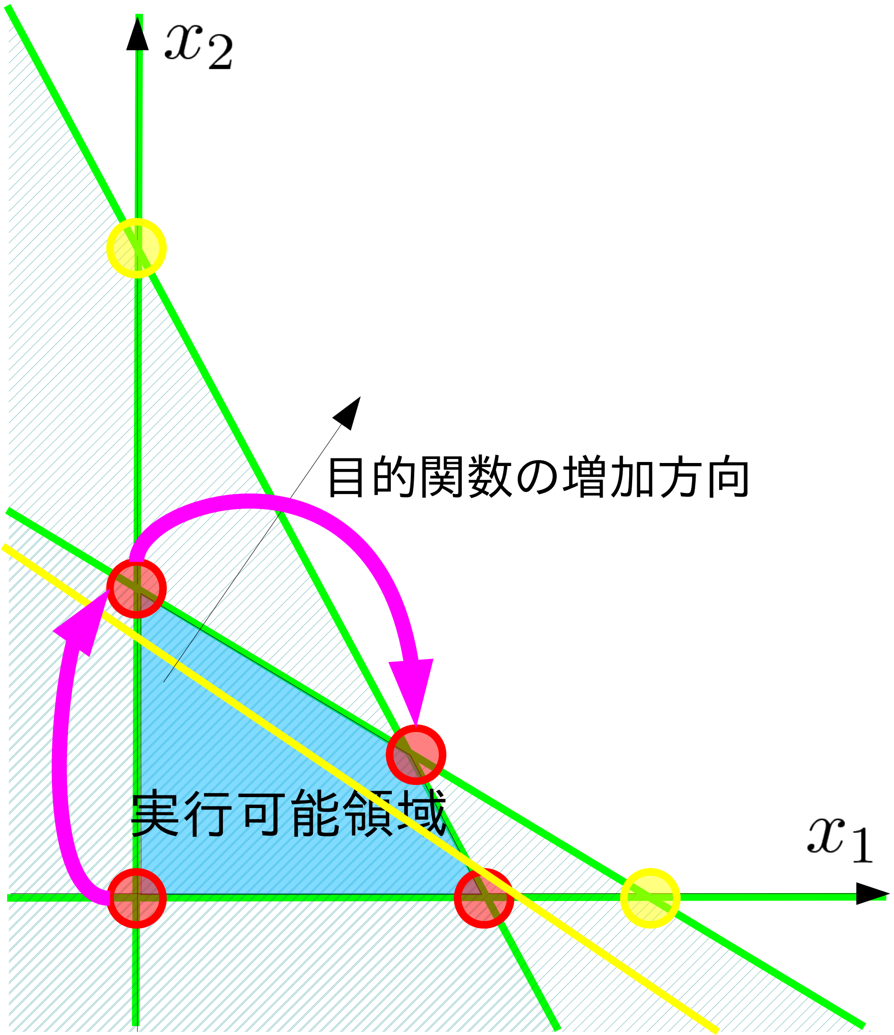
前回（第5回）授業と演習問題の復習

復習：単体法の2段解法による初期基本解の決定



原点が実行可能領域に有る場合

maximize
$$600x_1 + 500x_2$$
subject to
$$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

全変数がゼロ⇒制約式を満たす

⇕

原点が実行可能領域にある

※別の言い方をすれば、
連立不等式に自明解＝ゼロがある

復習：単体法の2段解法による初期基本解の決定

制約式だけを見ると、

不等式制約では

```
maximize
```
$$600x_1 + 500x_2$$
```
subject to
```
$$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

「全変数がゼロ」で制約式を満たすことが判り易い

⇕

連立不等式に自明解＝ゼロがあることを判断できる

等式標準形にすると、

```
minimize
```
$$-600x_1 - 500x_2$$
```
subject to
```
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

ゼロにする変数は x_3, x_4 以外

x_3, x_4；追加した変数？

※各式に1つだけの変数

元から等式だったら？

⇕

連立不等式の解が容易に求まるように選択している

復習：単体法の2段解法による初期基本解の決定

等式制約が与えられた場合、

minimize
$$-600x_1 - 500x_2$$
subject to
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45\times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40\times 10^3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

各式に1つだけの変数 x_3, x_4 以外を除いた連立方程式

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45\times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40\times 10^3$$

の解が非負条件を満たすなら

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

単体法の初期基本解となる

非負条件さえ満たせば良いが

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45\times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40\times 10^3$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45\times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40\times 10^3$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45\times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40\times 10^3$$

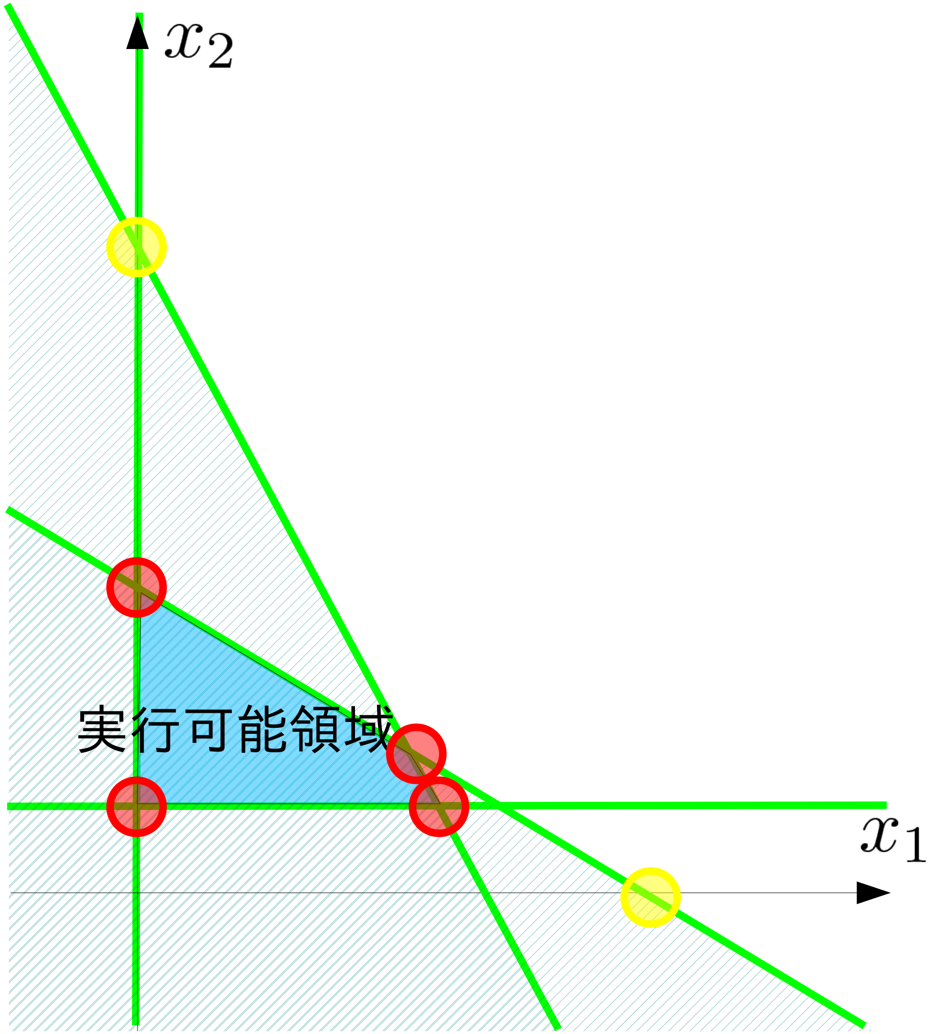
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45\times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40\times 10^3$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45\times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40\times 10^3$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45\times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40\times 10^3$$

連立方程式を解かずに済むもの（⇒原点）を選ぶ

復習：単体法の2段解法による初期基本解の決定



左図の制約式を考える

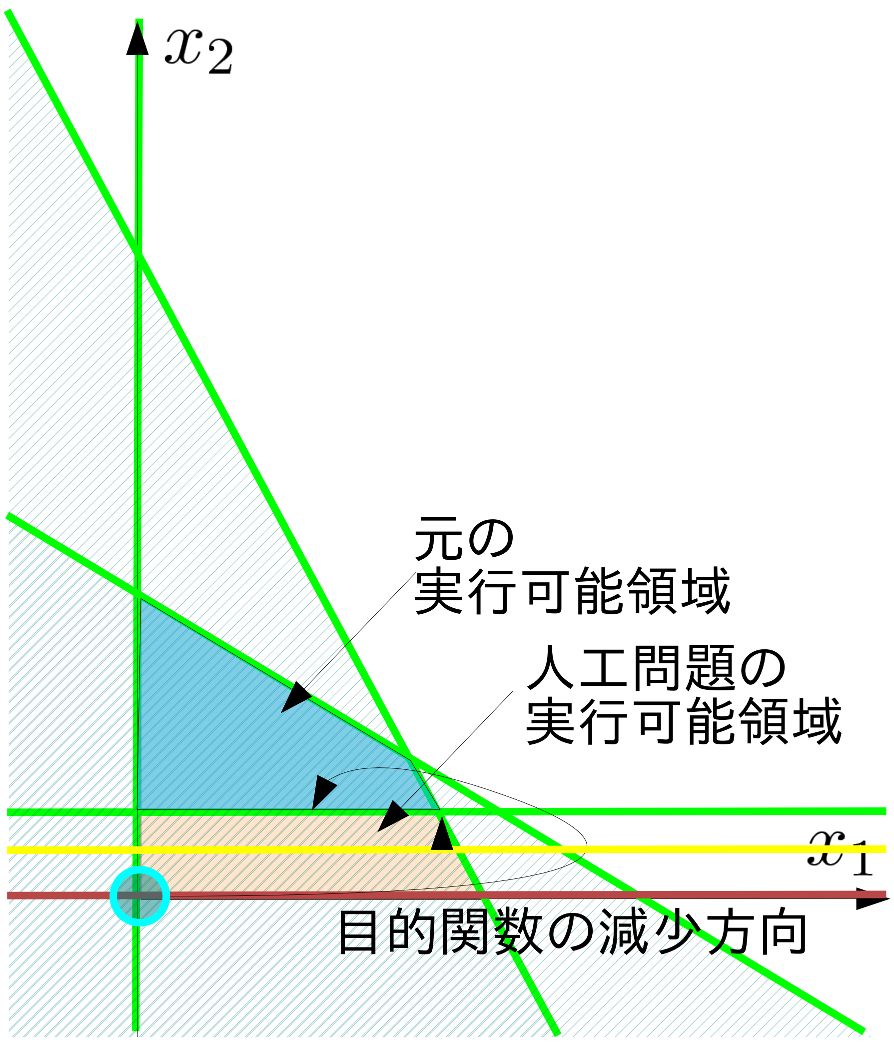
minimize
$-600x_1 - 500x_2$
subject to
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$
$$x_2 - x_5 = 20 \times 10^3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

各式1つだけの変数：x_3, x_4, x_5

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$
$$x_2 - x_5 = 20 \times 10^3$$

x_5 が非負条件を満たさない
↑「係数と定数の符号が異なる」

復習:単体法の2段解法による初期基本解の決定

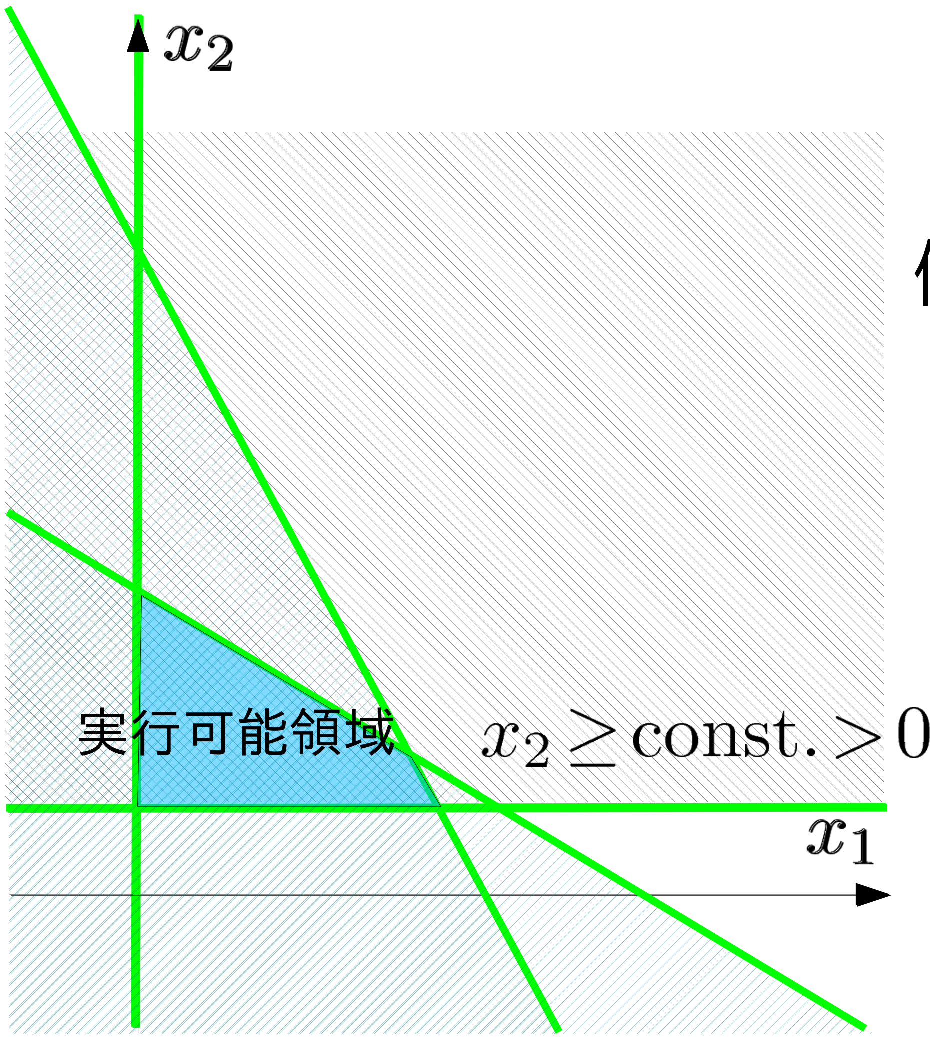


2段階法のアイディア

maximize
$600x_1 + 500x_2$
subject to
$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$
$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$
$x_2 \geq 10 \times 10^3$
$x_1, x_2 \geq 0$

1. 制約式を変形し、原点が実行可能領域に含まれるようにする
2. 元の実行可能領域で最小化される目的関数を定める
3. 1と2で作った人工問題を解き、元の問題の端点を求める

復習:単体法の2段解法による初期基本解の決定



原点を実行可能領域外にする制約
＝変数が負orゼロ

例: $x_2 - x_\mathrm{s} = t > 0$

$x_2 = 0 \rightarrow x_\mathrm{s} = -t < 0$

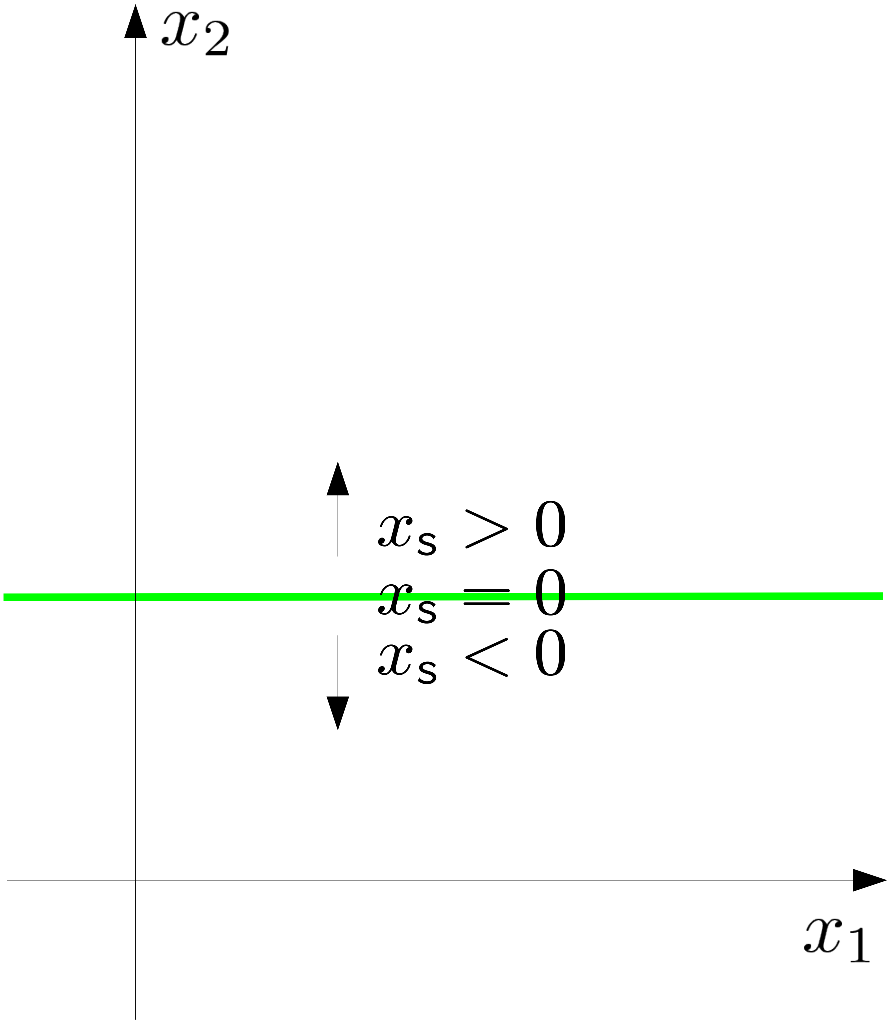
変数を追加して非負条件を満たす

例: $x_2 - x_\mathrm{s} + x_\mathrm{a} = t > 0$

$x_2 = 0 \rightarrow x_\mathrm{s} = x_\mathrm{a} - t$

$\therefore x_\mathrm{a} > t > 0 \Rightarrow x_\mathrm{s} = x_\mathrm{a} - t > 0$

復習:単体法の2段解法による初期基本解の決定



原点を実行可能領域外にする制約
＝変数が負orゼロ

例: $x_2 - x_s = t > 0$

$x_2 = 0 \rightarrow x_s = -t < 0$

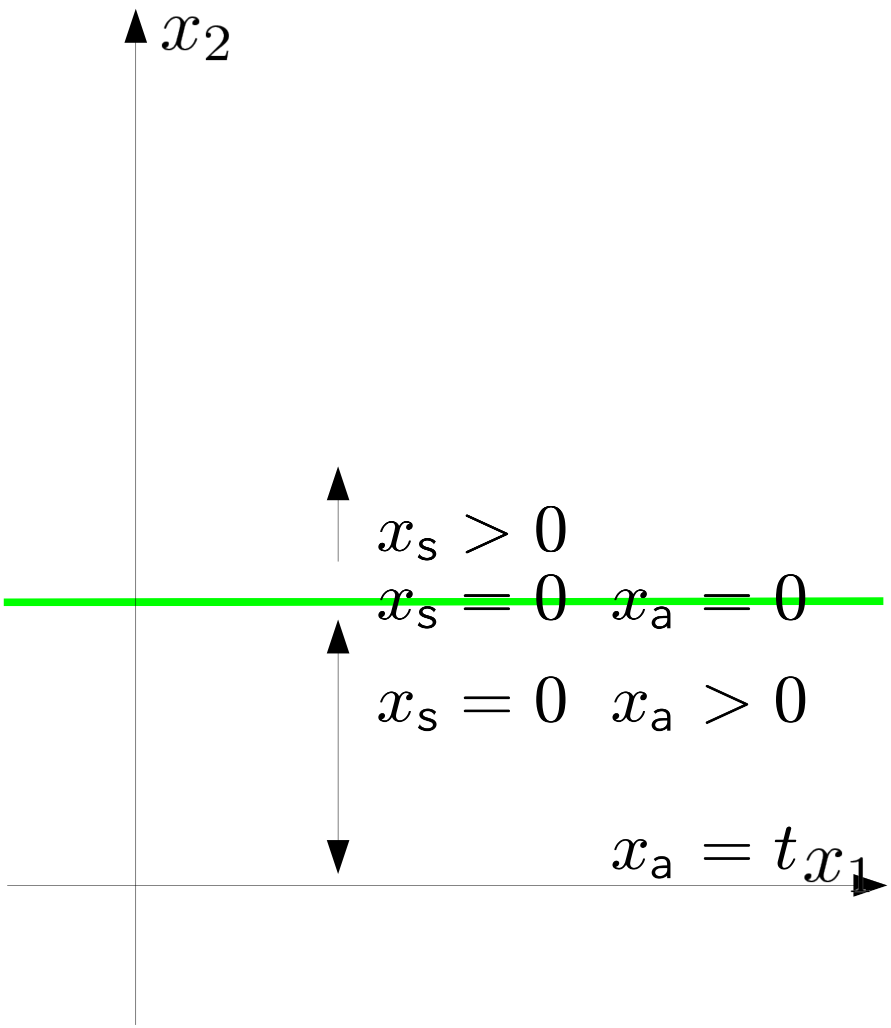
変数を追加して非負条件を満たす

例: $x_2 - x_s + x_a = t > 0$

$x_2 = 0 \rightarrow x_s = x_a - t$

$\therefore x_a > t > 0 \Rightarrow x_s = x_a - t > 0$

復習:単体法の2段解法による初期基本解の決定



原点を実行可能領域外にする制約

＝変数が負orゼロ

例: $x_2 - x_s = t > 0$

$x_2 = 0 \rightarrow x_s = -t < 0$

変数を追加して非負条件を満たす

例: $x_2 - x_s + x_a = t > 0$

$x_2 = 0 \rightarrow x_s = x_a - t$

$\therefore x_a > t > 0 \Rightarrow x_s = x_a - t > 0$

復習：単体法の2段解法による初期基本解の決定

minimize z

subject to

$$
\begin{aligned}
3x_1 \quad +x_2+x_3 &= 45 \\
x_1+2x_2+x_4 &= 40 \\
x_2-x_5 &= 10 \\
z+6x_1+5x_2 \qquad &= 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

1. **基底変数の候補の係数が定数項と異なる符号を持つ**制約式を見つける
2. 1 の式に人工変数を加え新しい制約式を作る
3. 人工変数の総和を目的関数とする最小化問題を単体法を用いて解く
4. 3 で得た最適値が0であれば、最適解を元の問題の初期解として採用する

復習:単体法の2段解法による初期基本解の決定

minimize z

subject to

$$
\begin{aligned}
3x_1 \quad +x_2+x_3 &= 45 \\
x_1+2x_2+x_4 &= 40 \\
\boxed{x_2-x_5 = 10} \\
z+6x_1+5x_2 \qquad &= 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

1. **基底変数の候補の係数が定数項と異なる符号を持つ**制約式を見つける
2. 1 の式に人工変数を加え新しい制約式を作る
3. 人工変数の総和を目的関数とする最小化問題を単体法を用いて解く
4. 3 で得た最適値が0であれば、最適解を元の問題の初期解として採用する

復習：単体法の2段解法による初期基本解の決定

minimize z

subject to

$$
\begin{aligned}
3x_1 \quad +x_2+x_3 &= 45 \\
x_1+2x_2+x_4 &= 40 \\
\boxed{x_2 - x_5 + x_6 = 10} \\
z+6x_1+5x_2 \qquad &= 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

1. **基底変数の候補の係数が定数項と異なる符号を持つ**制約式を見つける
2. 1 の式に人工変数を加え新しい制約式を作る
3. 人工変数の総和を目的関数とする最小化問題を単体法を用いて解く
4. 3 で得た最適値が0であれば、最適解を元の問題の初期解として採用する

復習：単体法の2段解法による初期基本解の決定

minimize $\boxed{x_6}$

subject to

$$
\begin{aligned}
3x_1 \quad +x_2+x_3 &= 45 \\
x_1+2x_2+x_4 &= 40 \\
\boxed{x_2 - x_5 + x_6} &\boxed{= 10} \\
z+6x_1+5x_2 \qquad &= 0 \\
\boxed{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{aligned}
$$

1. **基底変数の候補の係数が定数項と異なる符号を持つ**制約式を見つける
2. 1 の式に人工変数を加え新しい制約式を作る
3. 人工変数の総和を目的関数とする最小化問題を単体法を用いて解く
4. 3 で得た最適値が0であれば、最適解を元の問題の初期解として採用する

復習：単体法の2段解法による初期基本解の決定

minimize $\boxed{x_6}$

subject to

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 + x_3 &= 45 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 &= 40 \\
\boxed{x_2 - x_5 + x_6 = 10} \\
z + 6x_1 + 5x_2 &= 0 \\
\boxed{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{aligned}
$$

1. **基底変数の候補の係数が定数項と異なる符号を持つ**制約式を見つける
2. 1 の式に人工変数を加え新しい制約式を作る
3. 人工変数の総和を目的関数とする最小化問題を単体法を用いて解く
4. 3 で得た最適値が0であれば、最適解を元の問題の初期解として採用する

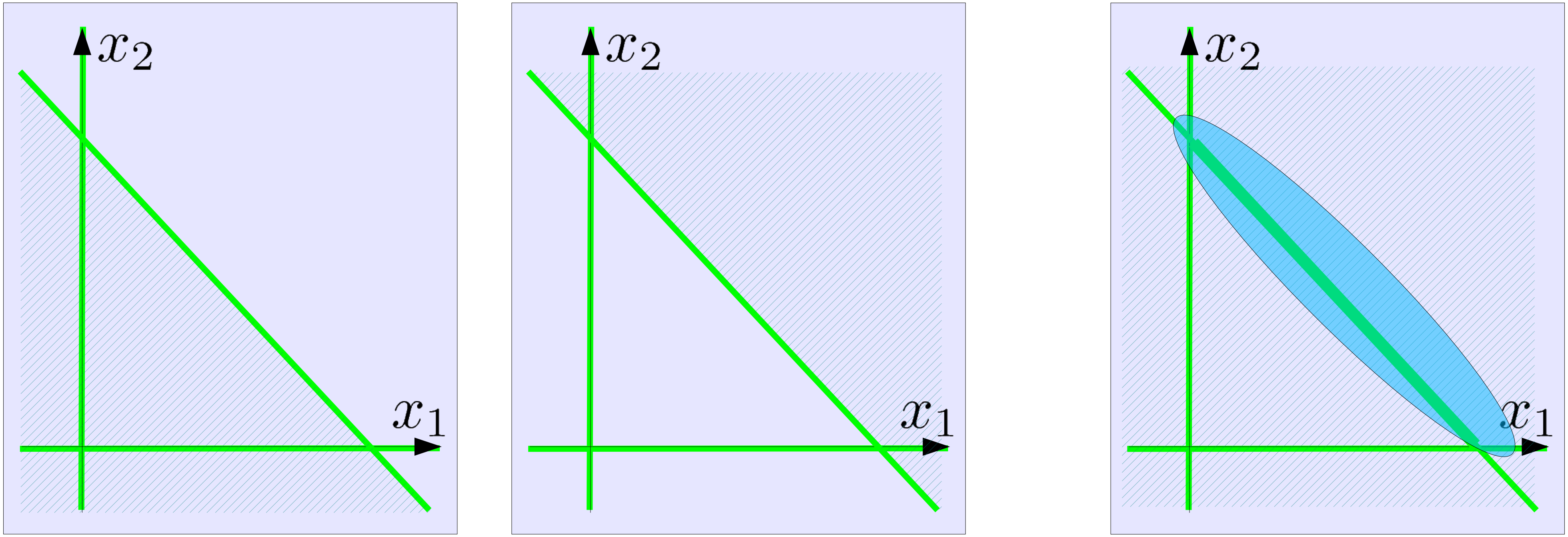
復習：演習問題5

minimize $z = x_1 + 2x_2$

subject to
$$-x_1 - x_2 \geq -1$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$\boxed{x_1 + x_2 \leq 1}$

課題1: グラフを描き、原点が実行可能領域ではないことを確認する。



復習：演習問題5

minimize $\quad z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$
\begin{aligned}
-x_1 - x_2 &\geq -1 \\
x_1 + x_2 &\geq 1 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

課題2: 2段階 simplex 法の第1段階を用いて実行可能領域の端点を見つける。

等式標準形

minimize z

subject to

$$
\begin{aligned}
x_1 \; + x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1 \; + x_2 - x_4 &= 1 \\
z - x_1 - 2x_2 \qquad &= 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

人工問題

minimize $z (= x_5)$

subject to

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 1 \\
x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 1 \\
z \qquad\qquad - x_5 &= 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

復習:演習問題5

人工問題の等式標準形からsimplex 表を準備する

人工問題

minimize $z(=x_5)$

$= -x_1 - x_2 + x_4 + 1$

subject to

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3 \qquad\qquad &= 1\\
x_1+x_2 \qquad -x_4+x_5 &= 1\\
z+x_1+x_2 \qquad -x_4 \qquad &= 1\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

simplex 表

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数	最大増加量
1	1	1	0	0	1	
1	1	0	−1	1	1	
1	1	0	−1	0	1	

復習:演習問題5

- 最初のシンプレックス表

z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	−1	1	1	
1	1	1	0	−1	0	1	

- 目的関数の定義式で非基底変数の係数のうち正のものを選ぶ

z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	−1	1	1	
1	1	1	0	−1	0	1	

- 2つの候補のうち、今回はx1の係数を選ぶ

z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	−1	1	1	
1	1	1	0	−1	0	1	

復習:演習問題5

- x1は非基底変数から基底変数になる

z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	−1	1	1	
1	1	1	0	−1	0	1	

- x1の係数で定数項を割りx1の増加量を計算する

z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	$/1 = 1$
0	1	1	0	−1	1	1	$/1 = 1$
1	1	1	0	−1	0	1	

- 最小の増加量を選び、基底変数→非基底変数の候補を決める

z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	$/1 = 1$
0	1	1	0	−1	1	1	$/1 = 1$
1	1	1	0	−1	0	1	

復習:演習問題5

- x3は基底変数から非基底変数になる

z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	−1	1	1	
1	1	1	0	−1	0	1	

- 基底変数の値を求めるためx1の係数を払う

z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
$-\times 1$ 0	1 -1	1 -1	0 -1	−1	1	1 -1	
$-\times 1$ 1	1 -1	1 -1	0 -1	−1	0	1 -1	

- 目的関数の式で非基底変数の係数が非正になり最適解を得た

z	x_1	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	0	0	−1	−1	1	0	
1	0	$\boxed{0}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	0	0	

復習:演習問題5

z	x_1	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	0	0	−1	−1	1	0	
1	0	0	−1	−1	0	0	

- 最適解を得る
  $$z = 0, x_1 = 1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0$$
- 最適値=0 なので、これを初期解に用いることができる