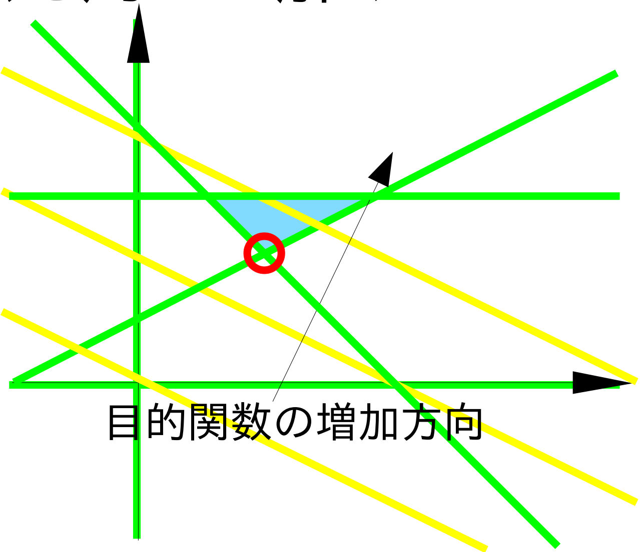
前回（第6回）授業と演習問題の復習

復習:演習問題6

課題:次の線形計画問題を罰則付単体法を用いて解く

$$\text{maximize} \quad x_1 + 2x_2$$
subject to
$$x_1 + x_2 \geq 4, \quad x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0$$
$$x_2 \leq 3, \quad x_1, x_2 \geq 0$$



注意: 原点は実行可能領域ではありません

ヒント:

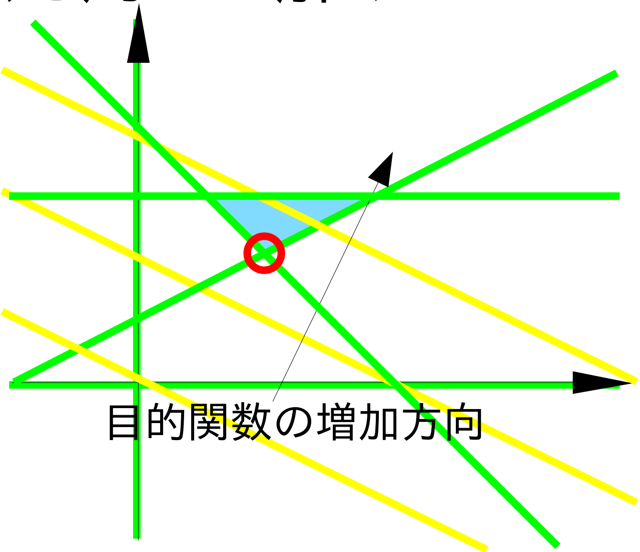
```
min.
s.t.
```
$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

復習：演習問題6

課題：次の線形計画問題を罰則付単体法を用いて解く

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \;\; z(=-x_1-2x_2) \\
\text{subject to} \\
\quad x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad = 4 \\
\; -x_1 + 2x_2 \qquad -x_4 \qquad = 2 \\
\qquad\quad x_2 \qquad\qquad +x_5 = 3 \\
z + x_1 + 2x_2 \qquad\qquad\quad = 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$



ヒント：

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{min.} & z = -x_1 - 2x_2 \\
\texttt{s.t.} & x_1 + x_2 \geq 4 \\
 & -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\
 & x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{min.} & z = -x_1 - 2x_2 \\
\texttt{s.t.} & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\
 & -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\
 & x_2 + x_5 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

復習：2段階単体法と罰則付単体法

- 2段階単体法

まず、z^* を最小化する

$z^*=0$ を得られたら

z を最小化して

元の問題の最適解を得る

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z^* \to 0 \Rightarrow \text{minimize} \quad z \\
\text{subject to} \\
\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & x_1 & +x_2 & -x_3 & & & +x_6 & & = 4 \\
 & -x_1 & +2x_2 & & -x_4 & & & +x_7 & = 2 \\
 & & x_2 & & & +x_5 & & & = 3 \\
z & +x_1 & +2x_2 & & & & & & = 0 \\
z^* & & +3x_2 & -x_3 & -x_4 & & & & = 6
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

- 罰則付単体法

十分大きな M により、

$z+Mz^*$ の最小化で、

$z^*=0$, z の最小化が

同時に実現する

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad \tilde{z} = z + Mz^* \\
\text{subject to} \\
\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & x_1 & +x_2 & -x_3 & & & +x_6 & & = 4 \\
 & -x_1 & +2x_2 & & -x_4 & & & +x_7 & = 2 \\
 & & x_2 & & & +x_5 & & & = 3 \\
\tilde{z} & +x_1 & +(3M+2)x_2 & -Mx_3 & -Mx_4 & & & & = 6M
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

復習:2段階単体法と罰則付単体法

- 2段階単体法

まず、z^* を最小化する

$z^*=0$ を得られたら

z を最小化して

元の問題の最適解を得る

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad z^* \to 0 \Rightarrow \text{minimize} \quad z\\
&\text{subject to}\\
&\qquad x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4\\
&\qquad -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2\\
&\qquad x_2 + x_5 = 3\\
&\qquad z + x_1 + 2x_2 = 0\\
&\qquad z^* + 3x_2 - x_3 - x_4 = 6\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{aligned}
$$

z,z*	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	定数
	1	1	-1			1		4
	-1	2		-1			1	2
		1			1			3
1	1	2						0
1		3	-1	-1				6

復習:2段階単体法と罰則付単体法

z,z*	x1 非	x2 非	x3 非	x4 非	x5	x6	x7	定数
	1	1	-1			1		4
	-1	2		-1			1	2
		1			1			3
1		3	-1	-1				6
1	1	2						0

人工問題の最初のsimplex表
最下段は元の問題の目的関数

復習:2段階単体法と罰則付単体法

z,z*	x1 非	x2 ~~非~~	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数	
	1	1	-1			1		4	/1=4
	-1	2		-1			1	2	/2=1
		1			1			3	/1=3
1		3	-1	-1				6	
1	1	2						0	

z,z*	x1	x2	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数
		0						
		1						
		0						
		0						
		0						

交換する基底/非基底変数を
決め、連立方程式を解く

復習:2段階単体法と罰則付単体法

z,z*	x1 非	x2 ~~非~~	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数	
×-1	1/2 1	-1 1	-1	1/2		1	-1/2	-1 4	/1=4
×1/2	-1/2 ~~-1~~	1 ~~2~~		-1/2 ~~-1~~			1/2 ~~1~~	1 ~~2~~	/2=1
×-1	1/2	-1 1		1/2	1		-1/2	-1 3	/1=3
×-3 1	3/2	-3 3	-1	3/2 -1			-3/2	-3 6	
×-2 1	1 1	-2 2		1			-1	-2 0	

z,z*	x1 非	x2	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数
	3/2	0	-1	1/2		1	-1/2	3
	-1/2	1		-1/2			1/2	1
	1/2	0		1/2	1		-1/2	2
1	3/2	0	-1	1/2			-3/2	3
1	2	0		1			-1	-2

交点 $x_1=0, x_2=1$へ移動

$z^*=3 \Rightarrow$ 元の問題の実行可能領域ではない

復習:2段階単体法と罰則付単体法

	z,z*	x1 非	x2 非	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数	
×-1		1/2 1	-1 1	-1	1/2		1	-1/2	-1 4	/1=4
×1/2		-1/2 ~~1~~	1 ~~2~~		-1/2 -1			1/2 -1	1 ~~2~~	/2=1
×-1		1/2	-1 1		1/2					/1=3
×-3	1	3/2	-3 3	-1	3/2					
×-2	1	1 1	-2 2		1					

2回目の交換は
x1:非基底→基底
x6:基底→非基底

	z,z*	x1 非	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数	
×2/3		1 ~~3/2~~	0	-2/3 ~~-1~~	1/3 ~~1/2~~		2/3 ~~1~~	-1/3 ~~-1/2~~	2 ~~3~~	/(3/2)=
×1/2		1/2 -1/2	1	-1/3	1/6 -1/2		1/3	-1/6 1/2	1 1	/(-1/2)<
×-1/2		-1/2 1/2	0	1/3	-1/6 1/2	1	-1/3	1/6 -1/2	-1 2	/(1/2)=4
×-3/2	1	-3/2 3/2	0	1 -1	-1/2 1/2		-1	1/2 3/2	-3 3	
×-2	1	-2 2	0	4/3	-2/3 1		-4/3	2/3 -1	-4 -2	

z,z*	x1	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数
	1		-2/3	1/3		2/3	-1/3	2
	0	1	-1/3	-1/3		1/3	1/3	2
	0		1/3	1/3	1	-1/3	-1/3	1
1	0		0	0		-1	-1	0
1	0		4/3	1/3		-4/3	-1/3	-6

復習:2段階単体法と罰則付単体法

z,z*	x1 非	x2 ~~非~~	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数	
×-1	1/2 1	-1 1	-1	1/2		1	-1/2	-1 4	/1=4
×1/2	-1/2 ~~1~~	1 ~~2~~		-1/2 ~~1~~			1/2 ~~1~~	1 ~~2~~	/2=1
×-1	1/2	-1 1		1/2				3	/1=3
×-3 1	3/2	-3 3	-1	3/2					
×-2 1	1 1	-2 2		1					

z,z*	x1 ~~非~~	x2	x3 非	x4 非	x5	x6	x7	定数	
×2/3	1 ~~3/2~~	0	-2/3 ~~1~~	1/3					/(3/2)=
×1/2	1/2 -1/2	1	-1/3	1/6 1/					/(-1/2)<
×-1/2	-1/2 1/2	0	1/3	-1/6 1/					/(1/2)=
×-3/2 1	-3/2 3/2	0	1 -1	-1/2 1/					
×-2 1	-2 2	0	4/3	-2/3 1			2/3 -1	4 -2	

z,z*	x1	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数
	1		-2/3	1/3		2/3	-1/3	2
	0	1	-1/3	-1/3		1/3	1/3	2
	0		1/3	1/3	1	-1/3	-1/3	1
1	0		0	0		-1	-1	0
1	0		4/3	1/3		-4/3	-1/3	-

x1=2

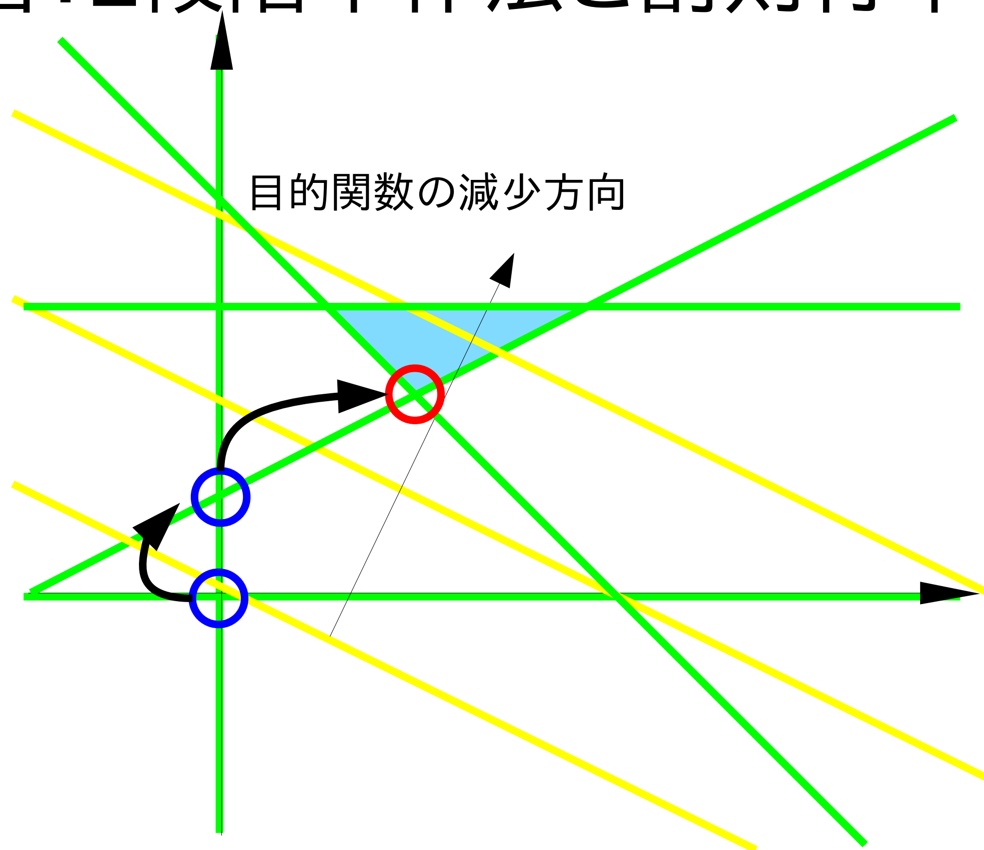
x2=2

実行可能領域

x1＝2、x2=2へ移動
非基底変数の係数が非正となり、人工問題の最適解を得た。

x6、x7は非基底変数なので、
x*=x6+x7=0⇒
元の問題の実行可能解を得た

復習:2段階単体法と罰則付単体法

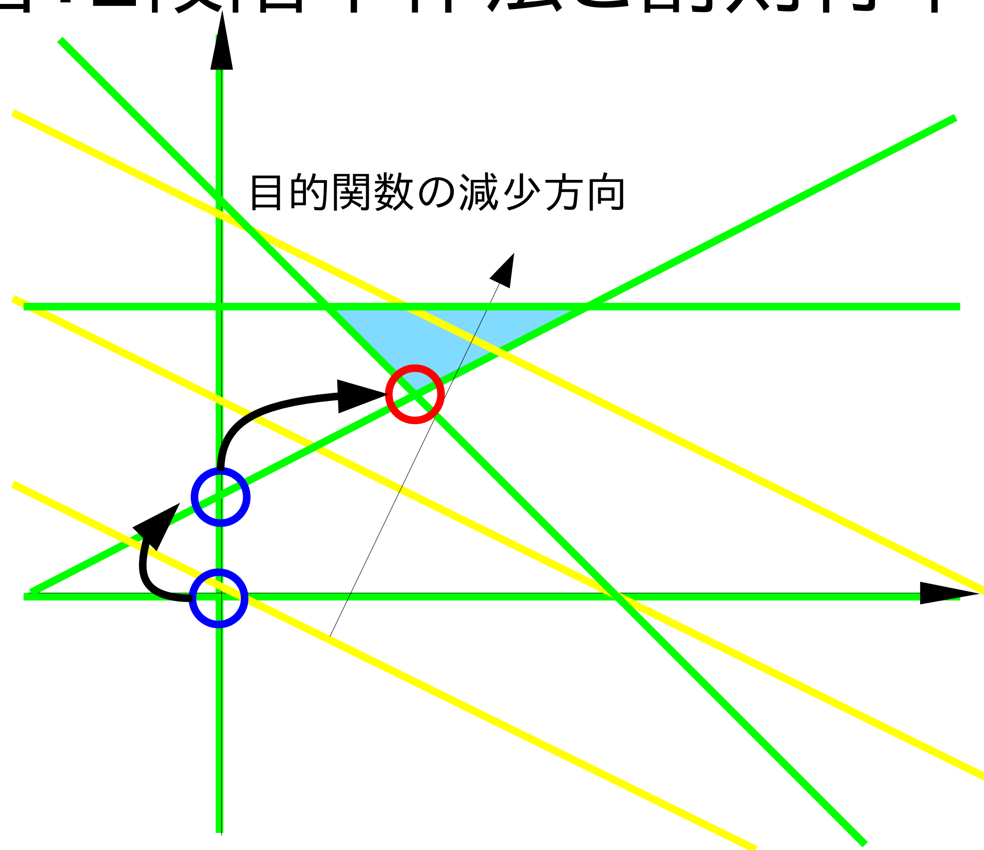


z,z*	x1	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数
	1		-2/3	1/3		2/3	-1/3	2
		1	-1/3	-1/3		1/3	1/3	2
			1/3	1/3	1	-1/3	-1/3	1
1						-1	-1	0
1			4/3	1/3		-4/3	-1/3	-6

x1=2

x2=2

復習:2段階単体法と罰則付単体法

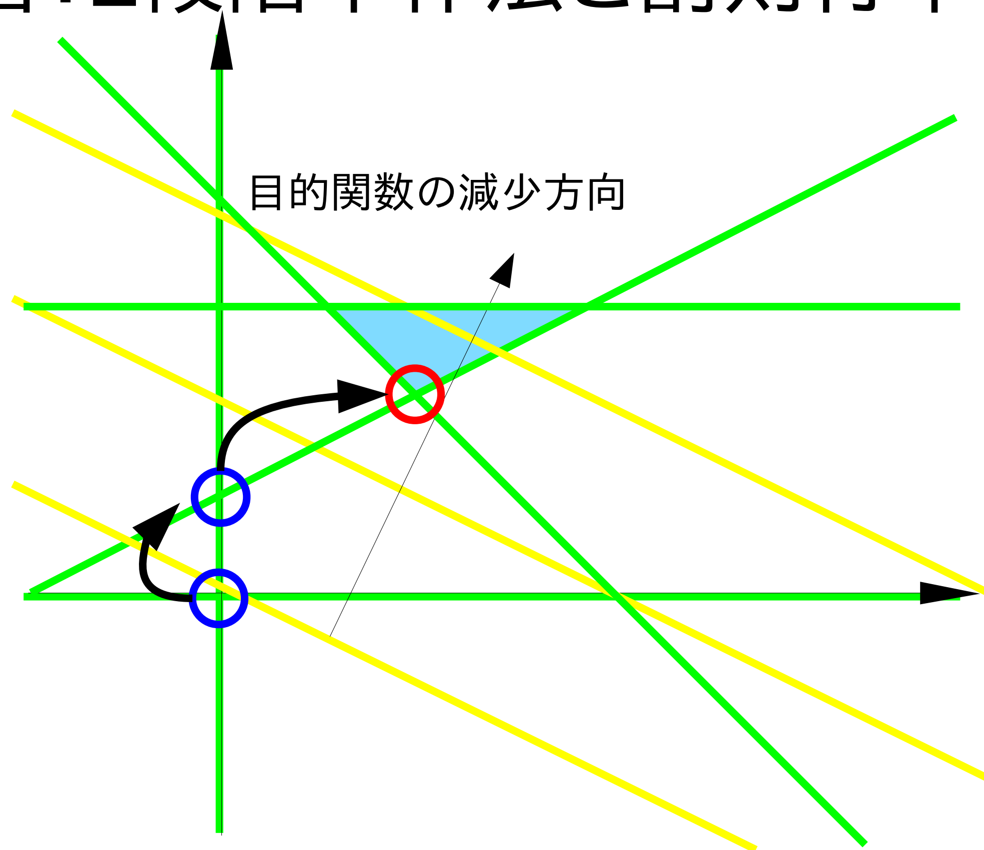


z,z*	x1	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数
	1		-2/3	1/3		2/3	-1/3	2
		1	-1/3	-1/3		1/3	1/3	2
			1/3	1/3	1	-1/3	-1/3	1
1						-1	-1	0
1			4/3	1/3		-4/3	-1/3	-6

x1=2

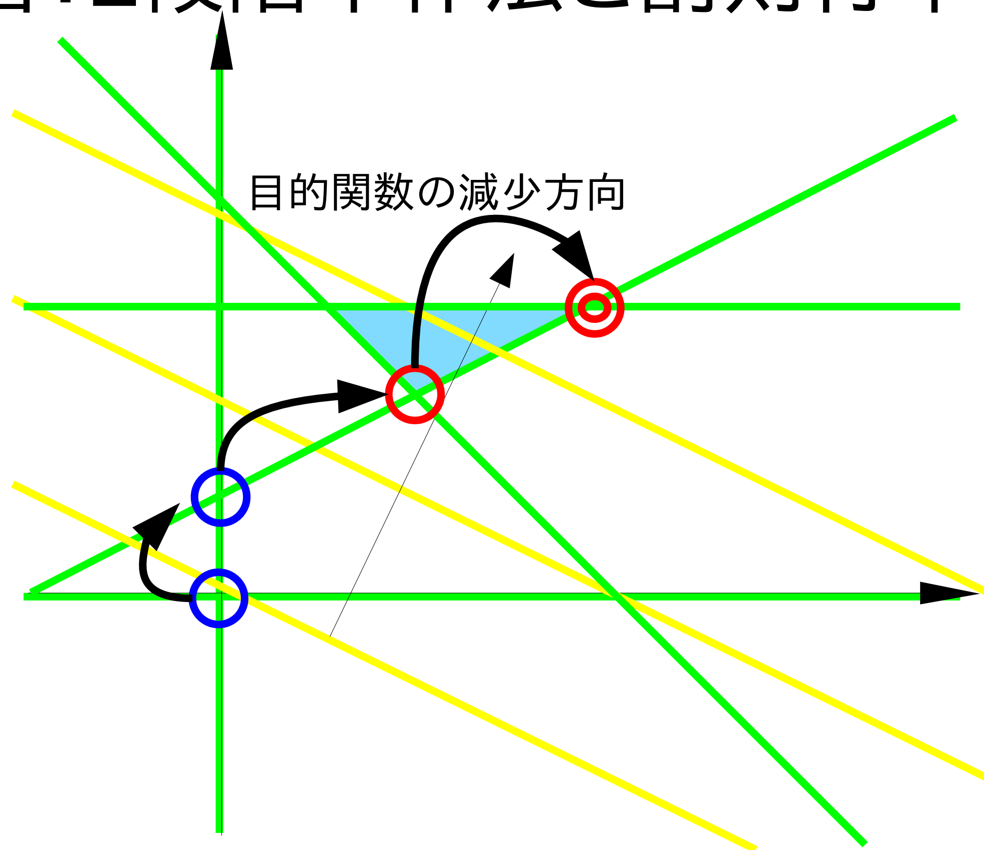
x2=2

復習:2段階単体法と罰則付単体法



z,z*	x1	x2	x3 ~~米~~	x4 非	x5 非			定数
×2/3	1		2/3 -2/3	2/3 1/3				2 2
×1/3		1	1/3 -1/3	1/3 -1/3	1			1 2
×3			1 1/3	1 1/3	3 1			3 1/(1/3)=3
×-4/3 1		-4/3	4/3	-4/3 1/3	-4			-4 -6

復習:2段階単体法と罰則付単体法



z,z*	x1	x2	x3	x4 非	x5 非			定数
	1		0	1				4
		1	0		1			3
			1	1	4			3
1			0	-1	-4			-10

x1=4

x2=3

最適解

復習:2段階単体法と罰則付単体法

- 罰則付単体法

十分大きな M により、

$z+Mz^*$ の最小化で、

$z^*=0$, z の最小化が

同時に実現する

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad \tilde{z} = z + Mz^* \\
\text{subject to} \\
\quad x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 4 \\
\quad -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 2 \\
\quad x_2 + x_5 = 3 \\
\tilde{z} + x_1 + (3M+2)x_2 - Mx_3 - Mx_4 = 6M \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

z~	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	定数
	1	1	-1			1		4
	-1	2		-1			1	2
		1			1			3
1	1	3M+2	-M	-M				6M

復習:2段階単体法と罰則付単体法

- 罰則付単体法

十分大きな M により、

$z+Mz^*$ の最小化で、

$z^*=0,\ z$ の最小化が

同時に実現する

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad \tilde{z} = z + Mz^* \\
\text{subject to} \\
\quad \begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 - x_3 + x_6 &=& 4 \\
-x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 &=& 2 \\
x_2 + x_5 &=& 3 \\
\tilde{z} + x_1 + (3M+2)x_2 - Mx_3 - Mx_4 &=& 6M
\end{array} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

z˜	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	定数
	1	1	-1			1		4
	-1	2		-1			1	2
		1			1			3
1	1	302	-100	-100				600

z,z*	x1 非	x2 ~~非~~	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数	
	1	1	-1			1		4	/1=4
	-1	2		-1			1	2	/2=1
		1			1			3	/1=3
1	1	302	-100	-100				600	

z,z*	x1 非	x2	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数
	1	1	-1			1		4
×1/2	-1/2 -1	1 2		-1/2 -1			1/2 1	1 2
		1			1			3
1	1	302	-100	-100				600

z,z*	x1 非	x2 ~~非~~	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数
×-1	1/2 1	-1 1	-1	1/2		1	-1/2	-1 4
	-1/2 ~~-1~~	1 ~~2~~		-1/2 ~~-1~~			1/2 ~~1~~	1 ~~2~~
×-1	1/2	-1 1		1/2	1		-1/2	-1 3
×-302 1	151 1	302	-100	-100			-151	600
		-302		151				-302

z,z*	x1 非	x2	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数
	3/2	0	-1	1/2		1	-1/2	3
	-1/2	1		-1/2			1/2	1
	1/2	0		1/2	1		-1/2	2
1	152	0	-100	51			-151	298

z,z*	x1 ~~非~~	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数	
	3/2	0	-1	1/2		1	-1/2	3	/(3/2)=2
	-1/2	1		-1/2			1/2	1	/(-1/2)<0
	1/2	0		1/2	1		-1/2	2	/(1/2)=4
1	152	0	-100	51			-151	298	

	z,z*	x1 ~~非~~	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数
×2/3		1 3/2	0	-2/3 -1	1/3 1/2		2/3 1	-1/3 -1/2	2 3
		-1/2	1		-1/2			1/2	1
		1/2	0		1/2	1		-1/2	2
	1	152	0	-100	51			-151	298

	z,z*	x1 ~~非~~	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数
		1 ~~3/2~~	0	-2/3 ~~-1~~	1/3 ~~1/2~~		2/3 ~~1~~	-1/3 ~~-1/2~~	2 ~~3~~
×1/2		1/2 -1/2	1	-1/3	1/6 -1/2		1/3	-1/6 1/2	1 1
×-1/2		-1/2 1/2	0	1/3	-1/6 1/2	1	-1/3	1/6 -1/2	-1 2
×-152	1	-152 152	0	304/3 -100	-152/3 51		-304/3	152/3 -151	-304 298

z,z*	x1	x2	x3 非	x4 非	x5	x6 非	x7 非	定数
	1		-2/3	1/3		2/3	-1/3	2
	0	1	-1/3	-1/3		1/3	1/3	2
	0		1/3	1/3	1	-1/3	-1/3	1
1	0		4/3	1/3		-304/3	-301/3	-6

z,z*	x1	x2	x3 ~~非~~	x4 非	x5 非	x6 非	x7 非	定数
	1		-2/3	1/3		2/3	-1/3	2
	0	1	-1/3	-1/3		1/3	1/3	2
	0		1/3	1/3	1	-1/3	-1/3	1/(1/3)=3
1	0		4/3	1/3		-304/3	-301/3	-6

z,z*	x1	x2	x3 ~~非~~	x4 非	x5 非	x6 非	x7 非	定数
	1		-2/3	1/3		2/3	-1/3	2
	0	1	-1/3	-1/3		1/3	1/3	2
×3	0		1 1/3	1 1/3	3 1	-1 -1/3	-1 -1/3	3 1
1	0		4/3	1/3		-304/3	-301/3	-6

z,z*	x1	x2	x3 ~~非~~	x4 非	x5 非	x6 非	x7 非	定数
×2/3	1		2/3 -2/3	2/3 1/3	2	-2/3 2/3	-2/3 -1/3	2 2
×1/3	0	1	1/3 -1/3	1/3 -1/3	1	-1/3 1/3	-1/3 1/3	1 2
	0		1 ~~1/3~~	1 ~~1/3~~	3 ~~1~~	-1 ~~-1/3~~	-1 ~~-1/3~~	3 ~~1~~
×-4/3 1	0		4/3	1/3		-304/3	-301/3	-6
			-4/3	-4/3	-4	4/3	4/3	-4

z,z*	x1	x2	x3 非	x4	x5 非	x6 非	x7 非	定数
	1		0	1	2	0	-1	4
	0	1	0	0	1	0	0	3
	0		1	1	3	-1	-1	3
1	0		0	-1	-4	-100	-99	-10

x1=4

x2=3

最適解

復習:2段階単体法と罰則付単体法

	z,z*	x1 非	x2 ~~非~~	x3 非	x4 非	x5	x6	x7 非	定数	
×-1		1/2 1	-1 1	-1	1/2		1	-1/2	-1 4	/1=4
×1/2		-1/2 ~~-1~~	1 ~~2~~		-1/2 ~~-1~~			1/2 ~~1~~	1 ~~2~~	/2=1
×-1		1/2	-1 1		1/2	1		-1/2	-1 3	/1=3
×-3M+2	1	3M/2 -1	-3M +2 3M -1	-M	3M/2 -1 -M			-3M/2 +1	-3M +2 6M	

- 非常に大きい数 M を記号で残した場合、
  - シンプレックス表には M の係数と定数の両方を記録しなければならない
  - 連立方程式の解法では M の係数と定数の両方を掃き出さなければならない
- 結局、2段階単体法で z^* と同時に z の式を扱うのと同じことになる

復習：2段階単体法と罰則付単体法

- 2段階法における人工$($補助$)$問題と元の問題の関係
  - まず z^* を最小化して、次に z を最小化する
- 人工問題を同時に解く方法＝罰則付単体法
  - z の最小化と人工変数$=0$ が成立すれば良い
  - $z,\ z^*$ を同時$(z^*=0$ 優先$)$に最適化＝罰則付単体法
    - $z+M\times z^*$ $(M$ は大きな数$)$ を最小化する
M の影響が大きいので z^* の最小化→$z^*=0$ が優先的に実現される
- 安全な罰則$(\ M\ )$を決める方法が無い
  - M を任意の数よりも大きい数として扱う
    - 2段階法と同じ手間になる