前回（第9回）授業と演習問題の復習

復習:線形計画問題と多面体

定義:n次元実ベクトル空間$\mathbb{R}^n$の多面体$\mathcal{P}$

$$\mathcal{P}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n | A_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1,\ A_2\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{b}_2\}$$

このように行列$A_1,\ A_2$とベクトル$\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2$で表わされる部分集合$\mathcal{P}$を$\mathbb{R}^n$の多面体と呼ぶ。

※この定義では面や直線、点、半平面も多面体となる

面:

$$\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3)$$

直線:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{pmatrix}$$

点:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{pmatrix}$$

※上は全て 3次元の場合

定義:有界多面体

$^\forall\boldsymbol{x}\in\mathcal{P}\Rightarrow||\boldsymbol{x}||\leqq{}^\exists M$を満たす定数$M$が存在するとき、$\mathcal{P}$を有界多面体と呼ぶ。

復習:線形計画問題と多面体

定義:n次元実ベクトル空間$\mathbb{R}^n$の多面体$\mathcal{P}$

$$\mathcal{P}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n | A_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1,\ A_2\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{b}_2\}$$

3次元平面を$\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3|(a_1,a_2,a_3)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0,)=0\}$と表わせる

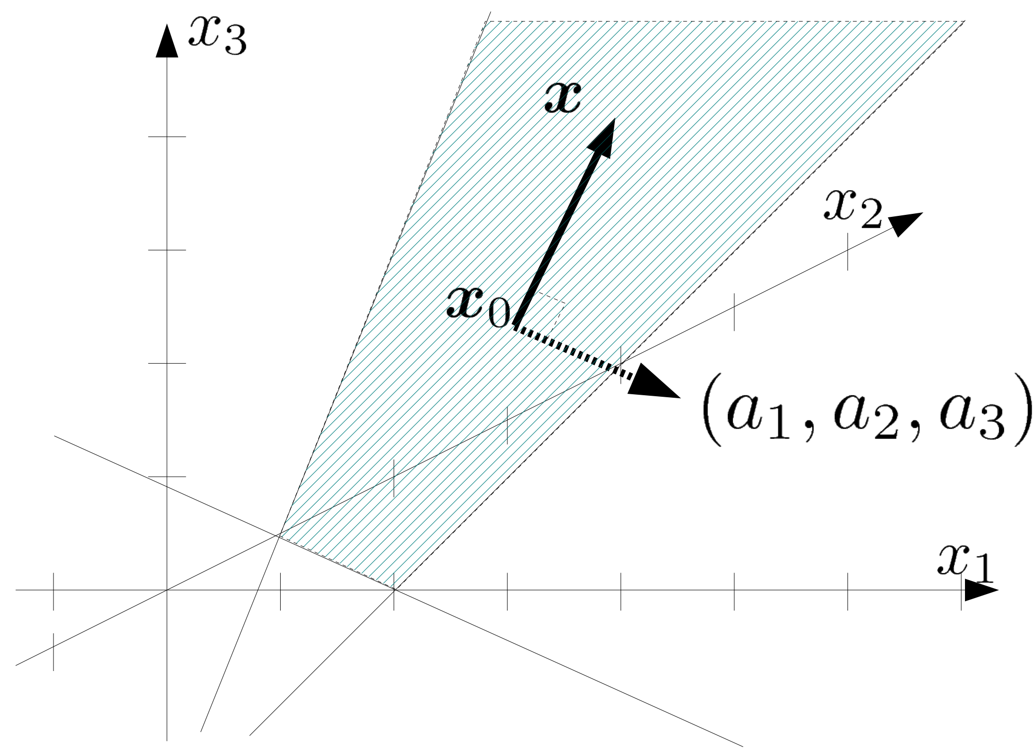
ただし、$\boldsymbol{x}_0$は$(a_1,a_2,a_3)\boldsymbol{x}_0=b_1$を満たす定数

このとき、

$A_1=(a_1,a_2,a_3),\ \boldsymbol{b}_1=b_1$

$A_2=\mathrm{O},\ \boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{0}$

とすれば、多面体の定義により、この平面を定めることができる。



復習:線形計画問題と多面体

定義:n次元実ベクトル空間$\mathbb{R}^n$の多面体$\mathcal{P}$

$$\mathcal{P}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n | A_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1,\ A_2\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{b}_2\}$$

$A_1=\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{0},\ A_2=(a_1,a_2,a_3),\ \boldsymbol{b}_2=b_2$ならば(但し$A_2\boldsymbol{x}_0=b_2$)

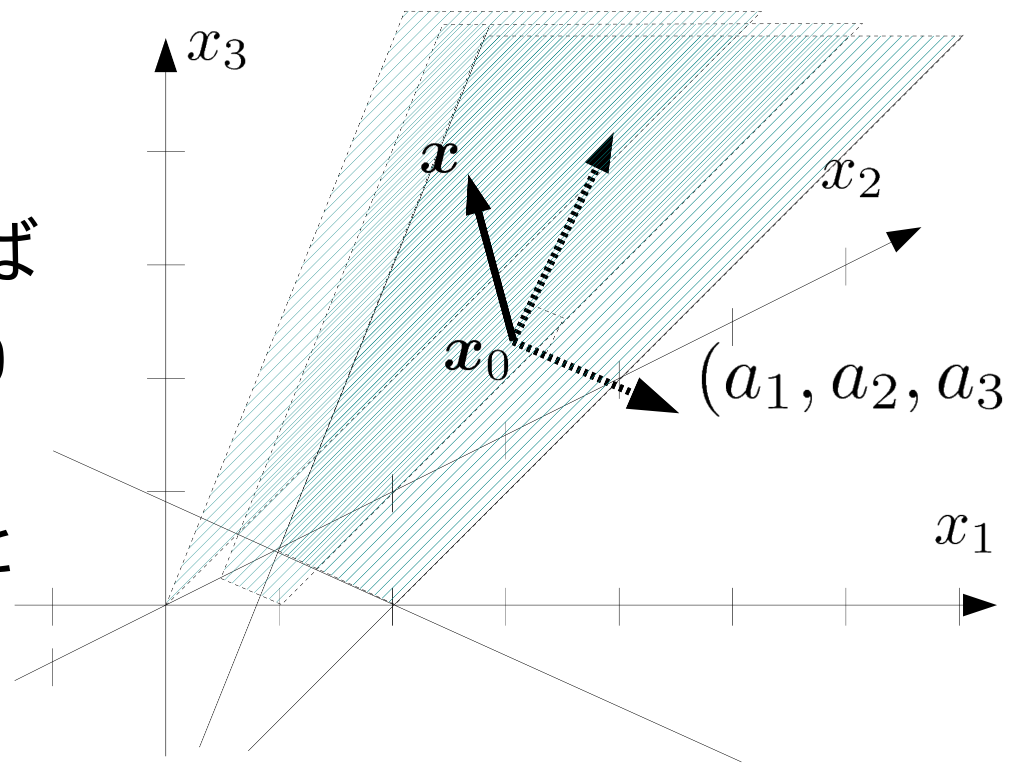
$\mathcal{P}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 | (a_1,a_2,a_3)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\leqq 0\}$

法線(a_1,a_2,a_3)とベクトル$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$のなす角を$\theta$とすれば

$|(a_1,a_2,a_3)||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\cos\theta\leqq 0$

$\therefore\ \theta\geqq\pi/2$ なので

$\mathcal{P}$は平面$A_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$の法線とは反対側の全ての点からなる多面体となる。



復習：線形計画問題と多面体

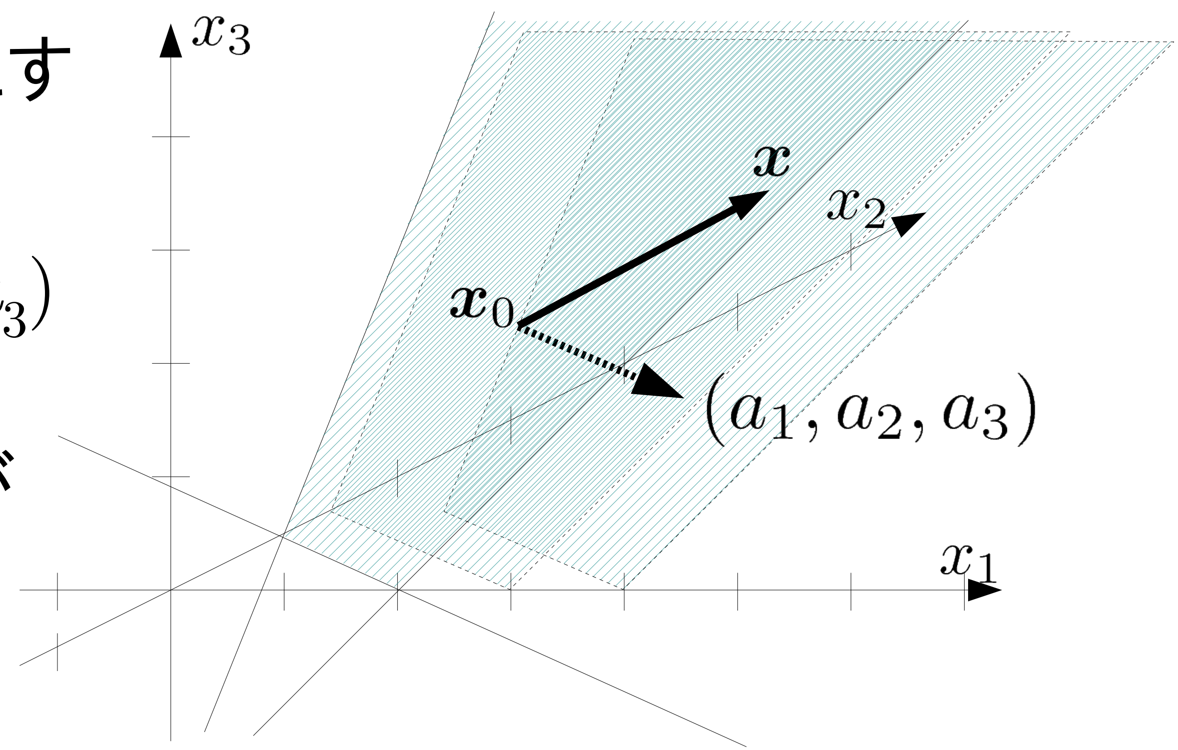
定義：n次元実ベクトル空間$\mathbb{R}^n$の多面体$\mathcal{P}$

$$\mathcal{P}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n | A_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1,\ A_2\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{b}_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体：$A_2\boldsymbol{x}_0=b_2$, $A_2=(a_1,a_2,a_3)$
逆の法線側は$|(a_1,a_2,a_3)||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\cos\theta\geqq 0\Rightarrow\theta\leqq\pi/2$

すなわち $A_2\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{b}_2$ を満たす全てのx からなる多面体

そこで、$A_2=(-a_1,-a_2,-a_3)$
$A_2\boldsymbol{x}_0=b_2$とすれば
$\mathcal{P}$の定義により表すことができる。



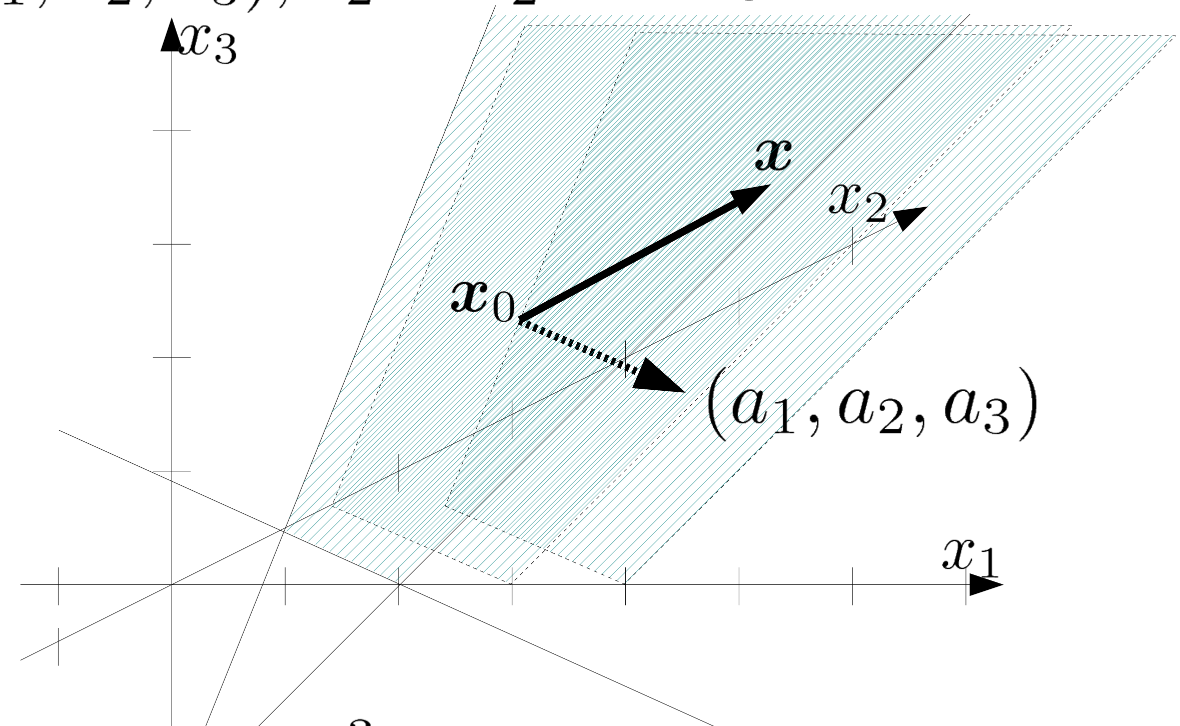
復習:線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \cancel{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1}, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体:

$$\boldsymbol{A}_2 = -(a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_2 = b_2 \quad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_0 = b_2$$



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \geq 0\}$$

$$|(a_1, a_2, a_3)||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \cos\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \leq \pi/2$$

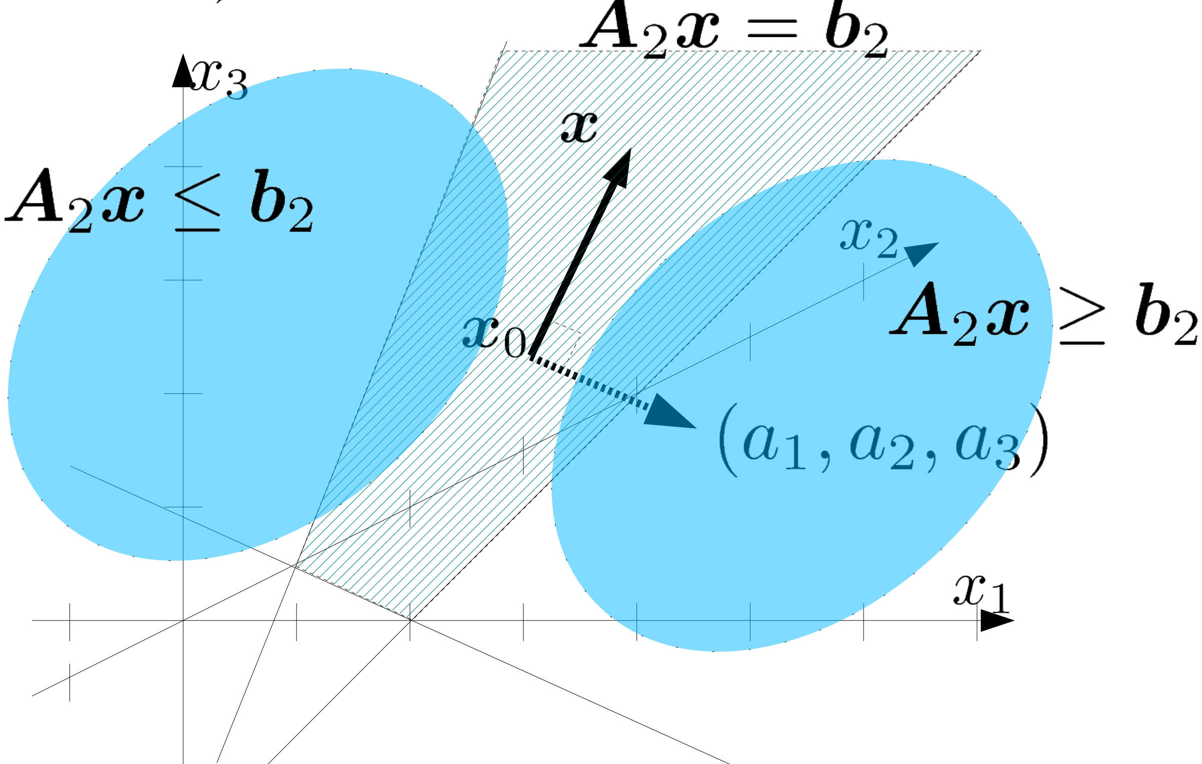
復習:線形計画問題と多面体

定義:n次元実ベクトル空間$\mathbb{R}^n$の多面体$\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体:

$$\boldsymbol{A}_2 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_2 = b_2$$



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

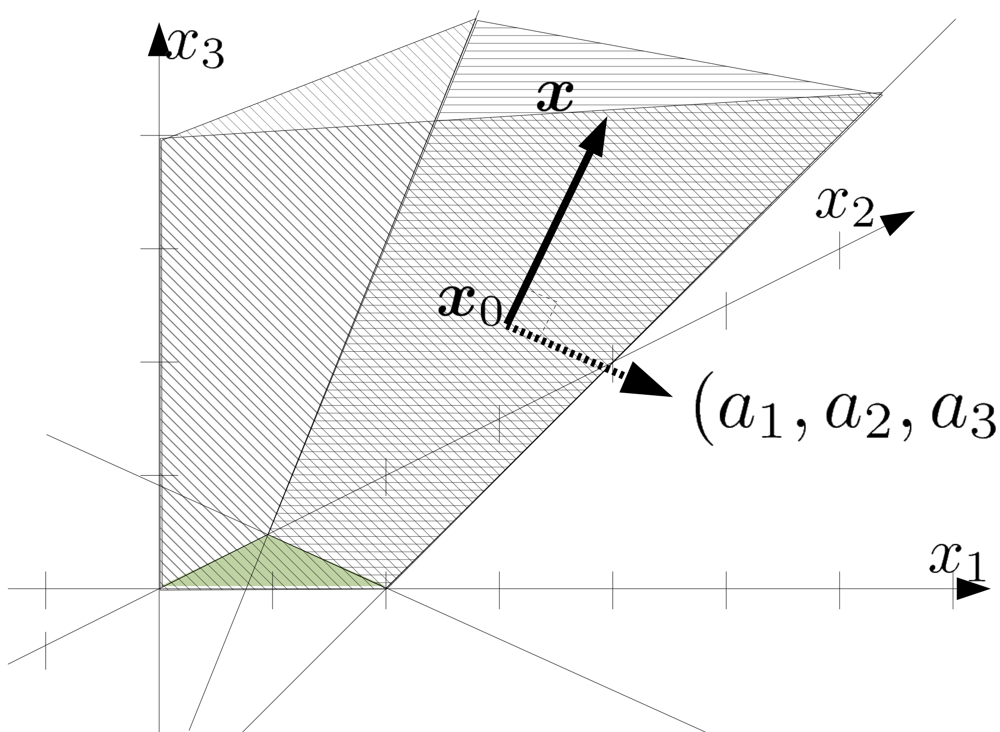
復習:線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \cancel{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1}, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元領域を2分する多面体:

$$\boldsymbol{A}_2 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_2 = b \qquad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_0 = b$$



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \leq 0\}$$

復習:線形計画問題と多面体

定義:n次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \cancel{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1}, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

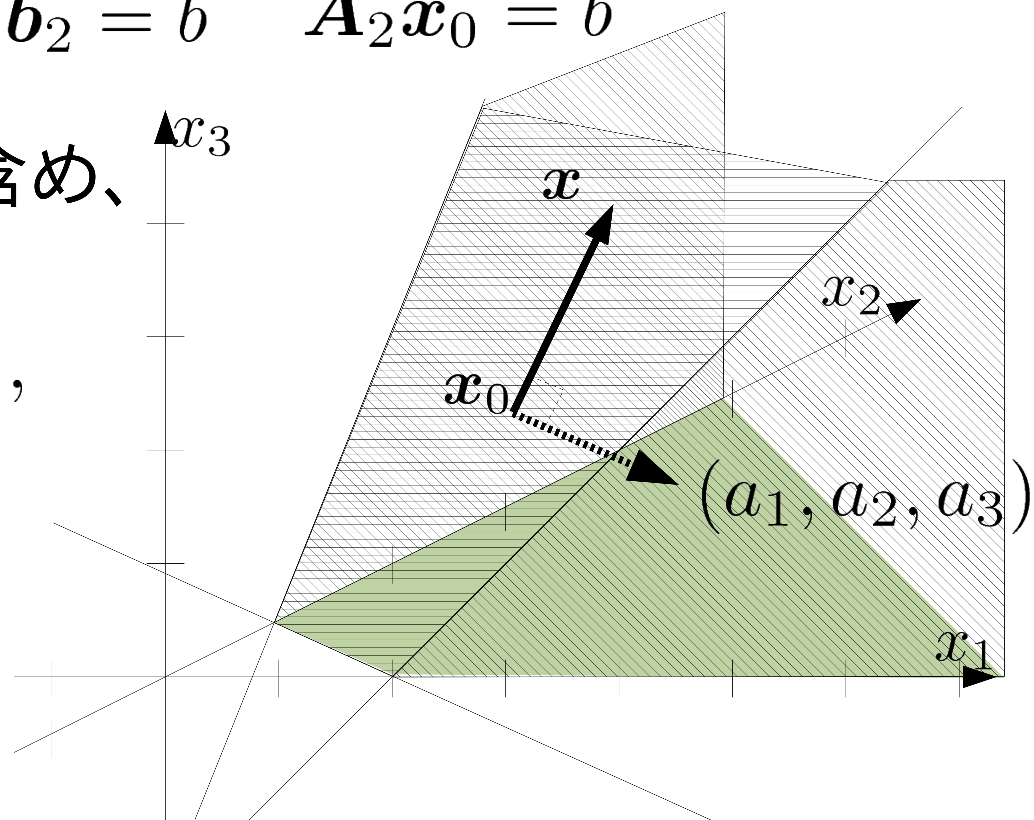
3次元領域を2分する多面体:

$$\boldsymbol{A}_2 = -(a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_2 = b \qquad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_0 = b$$

正確には非負条件も含め、

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -(a_1, a_2, a_3) \\ -\boldsymbol{I} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} b \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid -(a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \leq 0\}$$

復習:線形計画問題と多面体

定義:n次元実ベクトル空間$\mathbb{R}^n$の多面体$\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \cancel{\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2}\}$$

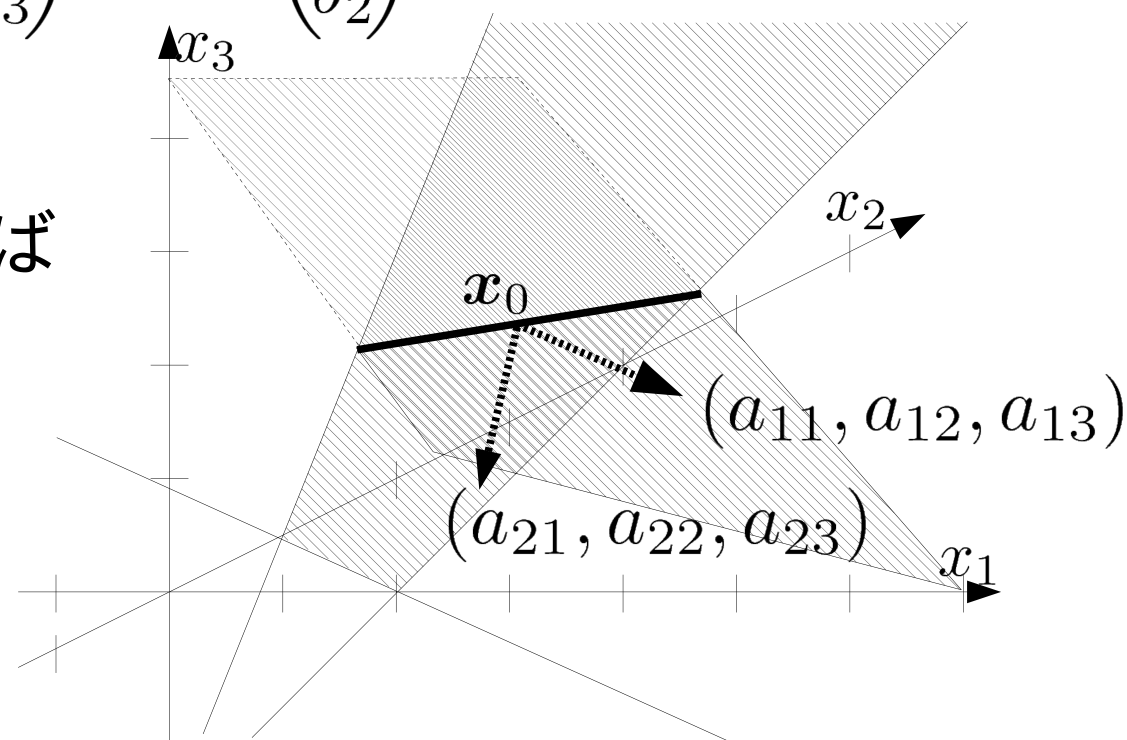
3次元の直線を構成する多面体:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}_1$$

非負条件を入れれば

線分になる



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{pmatrix} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

復習：線形計画問題と多面体

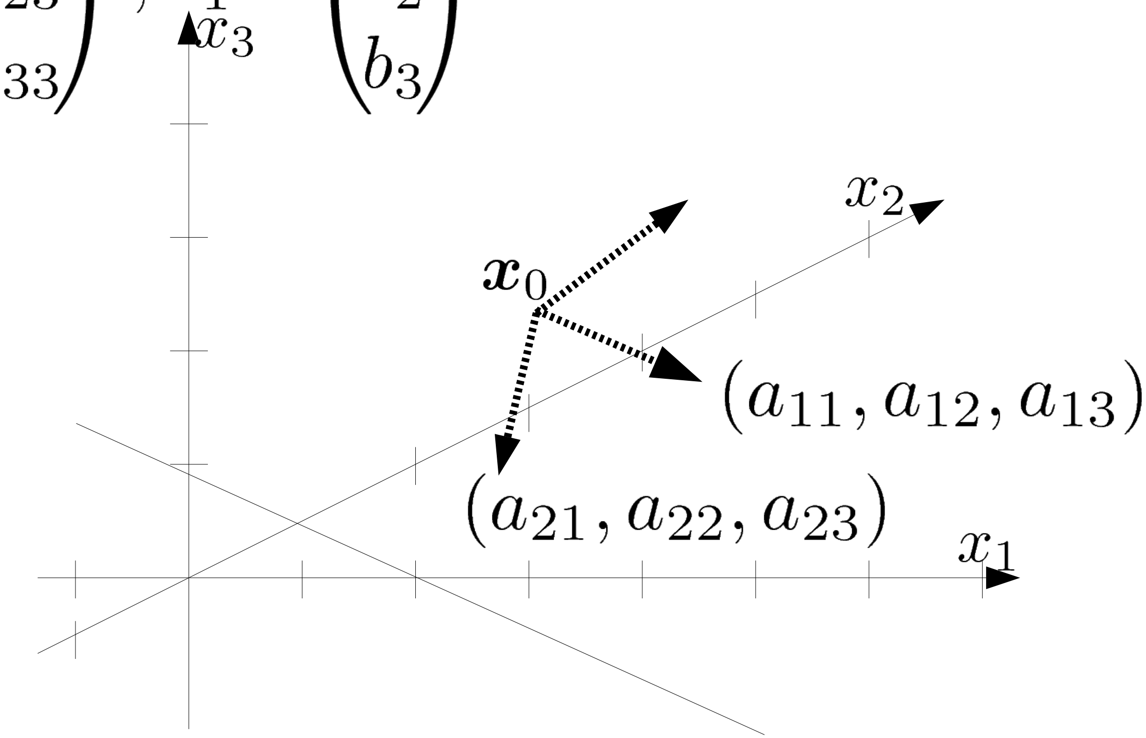
定義：n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \cancel{\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2}\}$$

3次元の直線を構成する多面体：

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}_1$$



3つのベクトル

(a_{11}, a_{12}, a_{13})
(a_{21}, a_{22}, a_{23})
(a_{31}, a_{32}, a_{33})

が一次独立なら

$$\det \boldsymbol{A}_1 \neq 0$$

$\therefore$ x_0 が一意に決まる

復習:線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_2\}$$

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{N_1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N_1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_{N_2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_{N_2} \end{pmatrix}$$

多面体を構成する平面の法線ベクトル:

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{N_1}, \boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_{N_2}$$

不等式標準形の不等式制約の係数に対応する「minimize z, subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b}$」のとき、$\boldsymbol{A}$ の行ベクトル毎に平面が考えられる。

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$$

平面 ℓ : $\boldsymbol{a}_\ell^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \ge b_\ell \qquad \ell = 1, \ldots, n$

復習：演習問題9

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0,\ \ x_2 \leq 3, \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

課題2：主問題と双対問題の実行可能領域を、目的関数を表す平面とともに図示し、図を用いてそれぞれの最適解を示せ。

復習：演習問題9

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize $z = x_1 + 2x_2$

subject to $x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0,\ \ x_2 \leq 3,$

$x_1, x_2 \geq 0.$

$$\begin{aligned}&\text{minimize}\\ &z = (1,2)\boldsymbol{x}\\ &\text{subject to}\\ &\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\\ &\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{maximize}\\ &w = (4,2,-3)\boldsymbol{y}\\ &\text{subject to}\\ &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\\ &\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

復習：演習問題9

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$z = x_1 + 2x_2$$

minimize

$$x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0,\ \ x_2 \leq 3,$$

subject to

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$\begin{aligned}&\text{minimize}\\ &z = (1,2)\boldsymbol{x}\\ &\text{subject to}\\ &\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\\ &\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

3つの平面

2つの平面

$$\begin{aligned}&\text{maximize}\\ &w = (4,2,-3)\boldsymbol{y}\\ &\text{subject to}\\ &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\\ &\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

2つの平面

3つの平面

復習：演習問題9

minimize

$z = (1, 2)\boldsymbol{x}$

subject to

3つの平面

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

2つの平面

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

maximize

$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$

subject to

2つの平面

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

3つの平面

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

復習:演習問題9

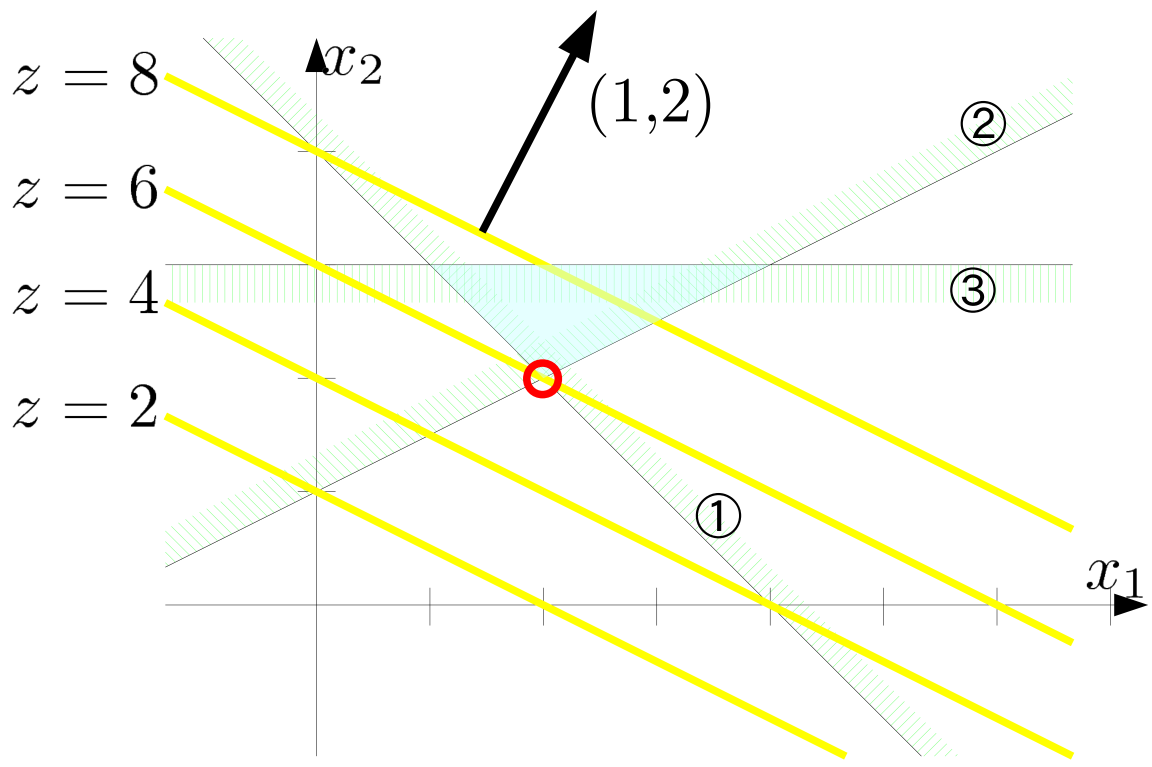
minimize

$z = (1, 2)\boldsymbol{x}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$



復習:演習問題9

maximize

$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$$