線形計画問題と多面体

3次元問題のグラフ

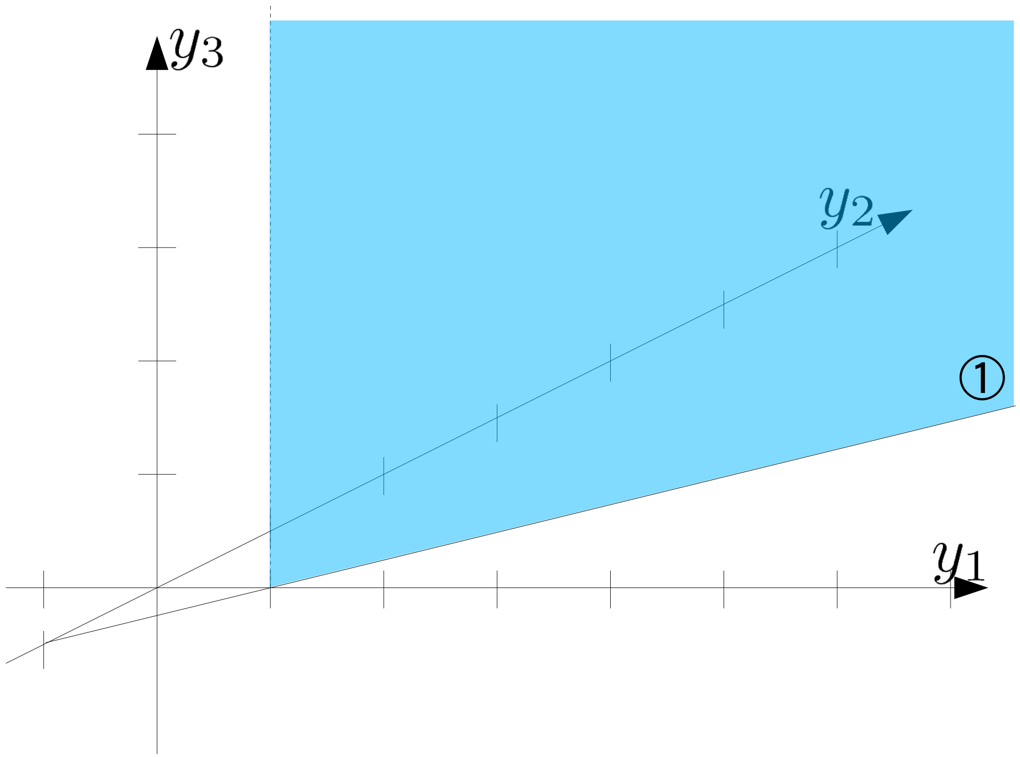
演習問題の双対問題についてもグラフを描く

maximize
$$w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3$$
subject to

① $y_1 - y_2 \leq 1$

② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$

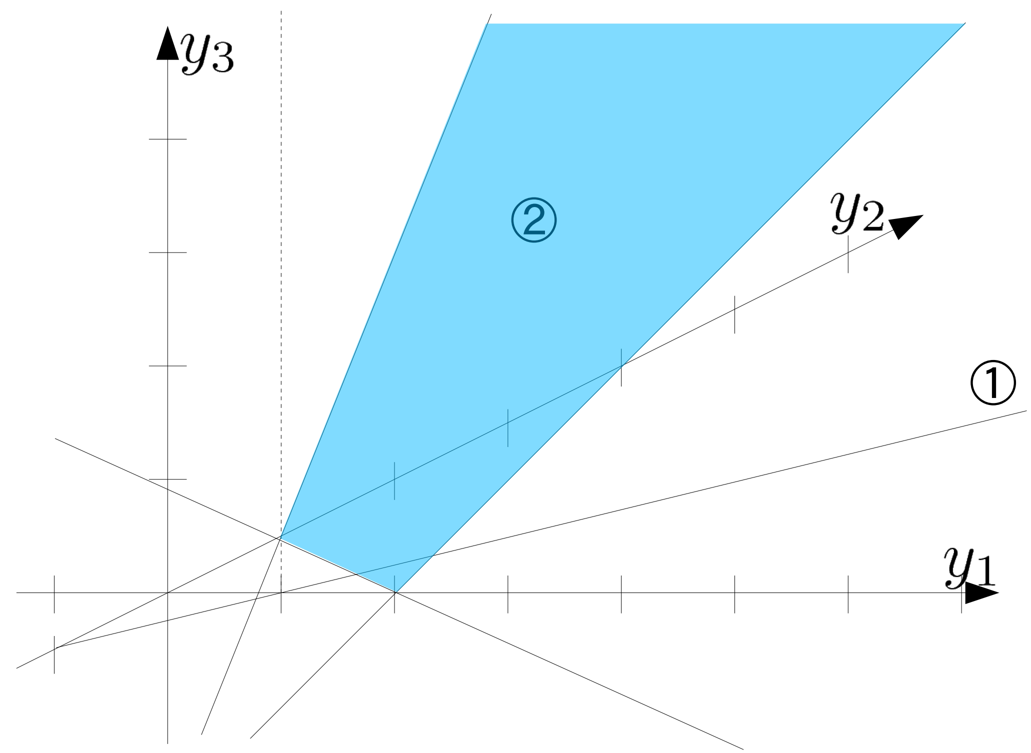
$y_1, y_2, y_3 \geq 0$



3次元問題のグラフ

演習問題の双対問題についてもグラフを描く

$$
\begin{aligned}
& \text{maximize} \\
& w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\
& \text{subject to} \\
① \quad & y_1 - y_2 \leq 1 \\
② \quad & y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$



3次元問題のグラフ

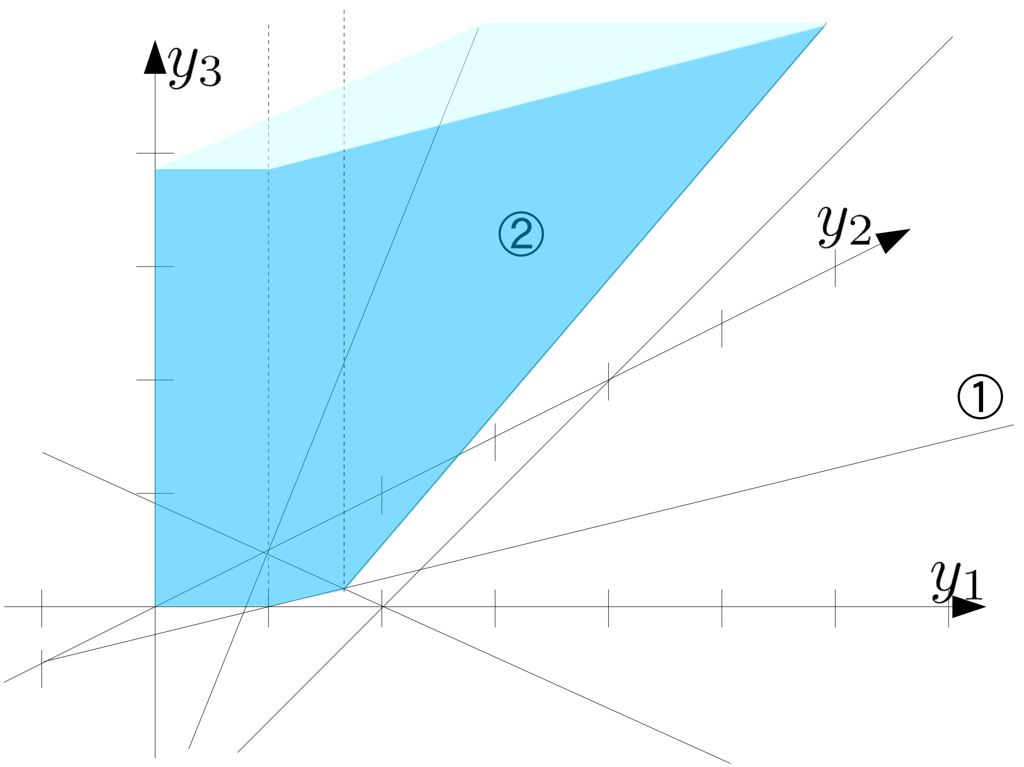
演習問題の双対問題についてもグラフを描く

$$\text{maximize}$$
$$w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3$$
$$\text{subject to}$$

① $y_1 - y_2 \leq 1$

② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$



3次元問題のグラフ

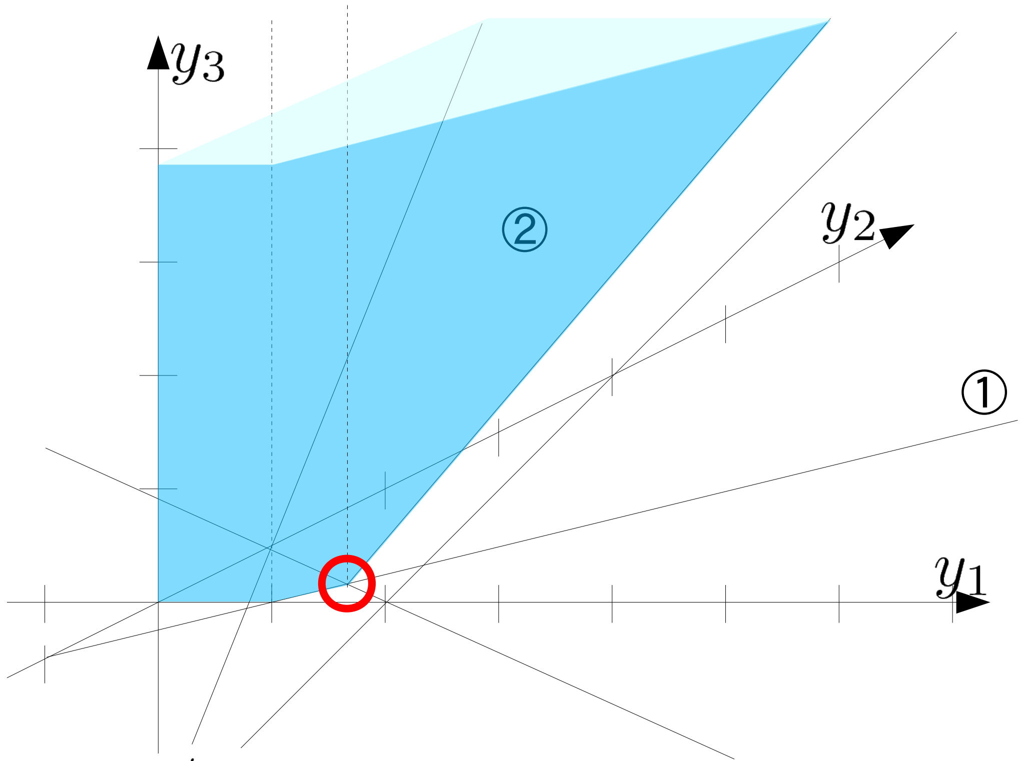
演習問題の双対問題についてもグラフを描く

$$\text{maximize}$$
$$w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3$$
$$\text{subject to}$$

① $y_1 - y_2 \leq 1$

② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$



最適解: $w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$

線形計画問題と多面体

定義：n次元実ベクトル空間$\mathbb{R}^n$の多面体

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

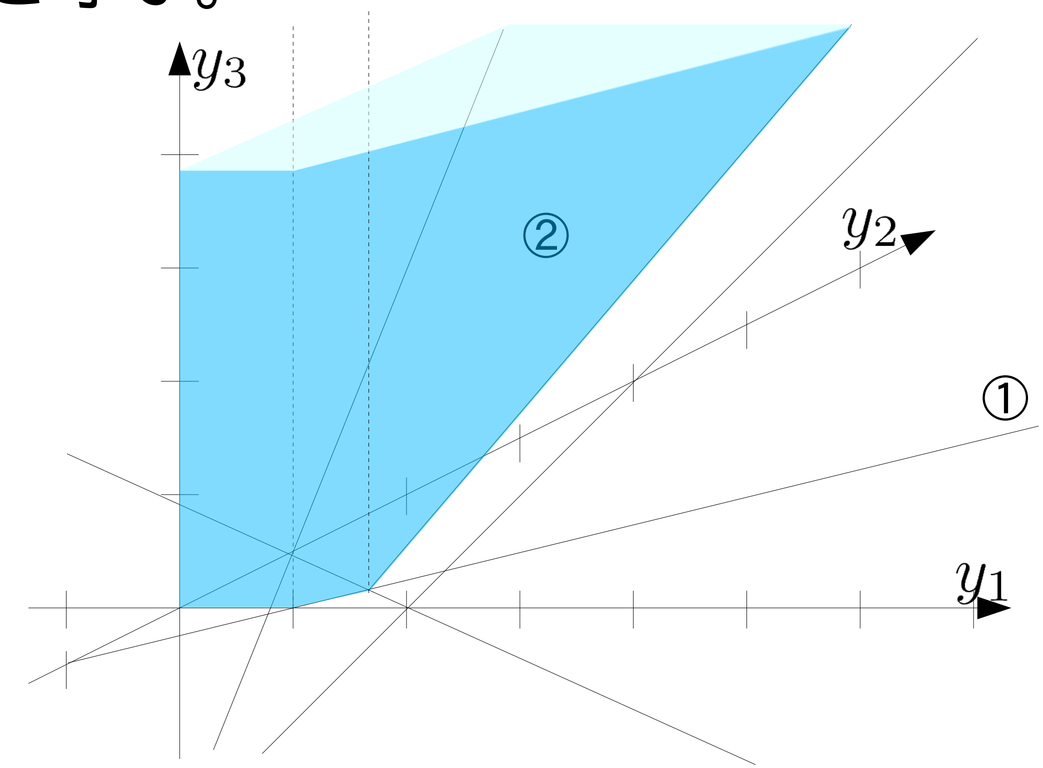
のとき、$\mathcal{P}$ を$\mathbb{R}^n$の多面体と呼ぶ。

$$\begin{aligned}
&\text{maximize} \\
&w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\
&\text{subject to}
\end{aligned}$$

① $y_1 - y_2 \leq 1$

② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$



線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

のとき、$\mathcal{P}$ を $\mathbb{R}^n$ の多面体と呼ぶ。

この定義では、面や直線、点、半平面等も多面体となる。

定義: 有界多面体

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{P}, ||x|| \leq \exists M$$

となる、M が存在するとき $\mathcal{P}$ を有界多面体と呼ぶ。

線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

このように行列 $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}$ 、ベクトル $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}$ で表わされる部分集合$\mathcal{P}$を $\mathbb{R}^n$ の多面体と呼ぶ。

※この定義では面や直線、点、半平面も多面体となる

面:

$$\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3)$$

直線:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{pmatrix}$$

点:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{pmatrix}$$

※上は全て 3次元の場合

定義:有界多面体

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{P}, ||x|| \leq \exists M$ を満たす定数 M が存在するとき、$\mathcal{P}$を有界多面体と呼ぶ。

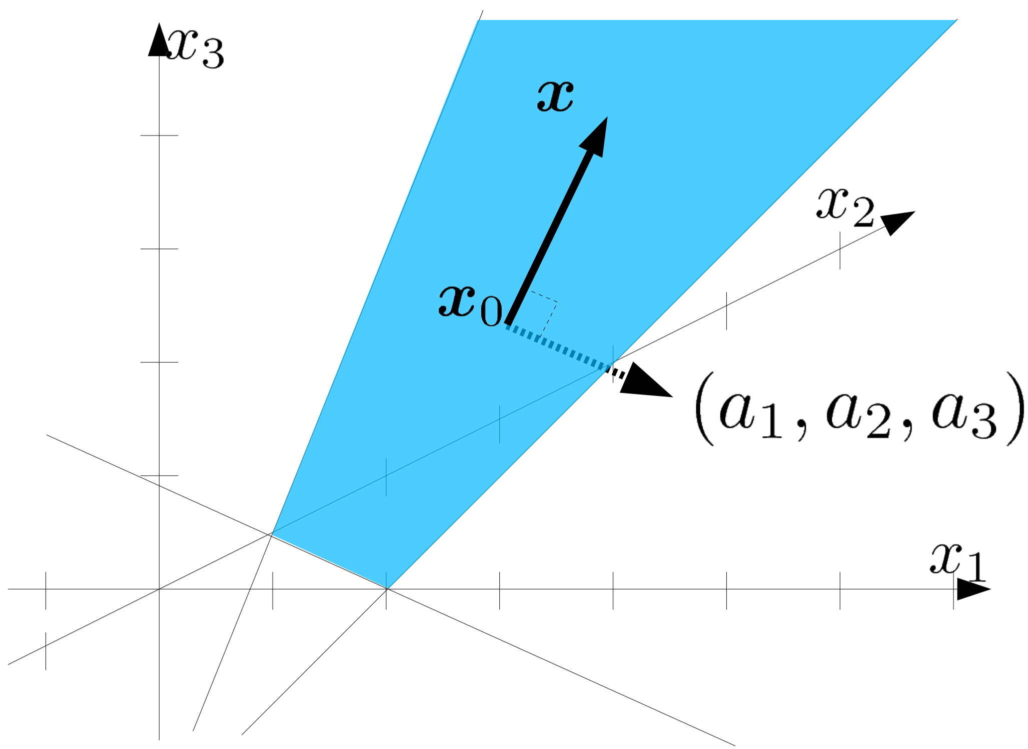
線形計画問題と多面体

定義：n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体：

$$\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_1 = b_1 \qquad \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = b_1$$

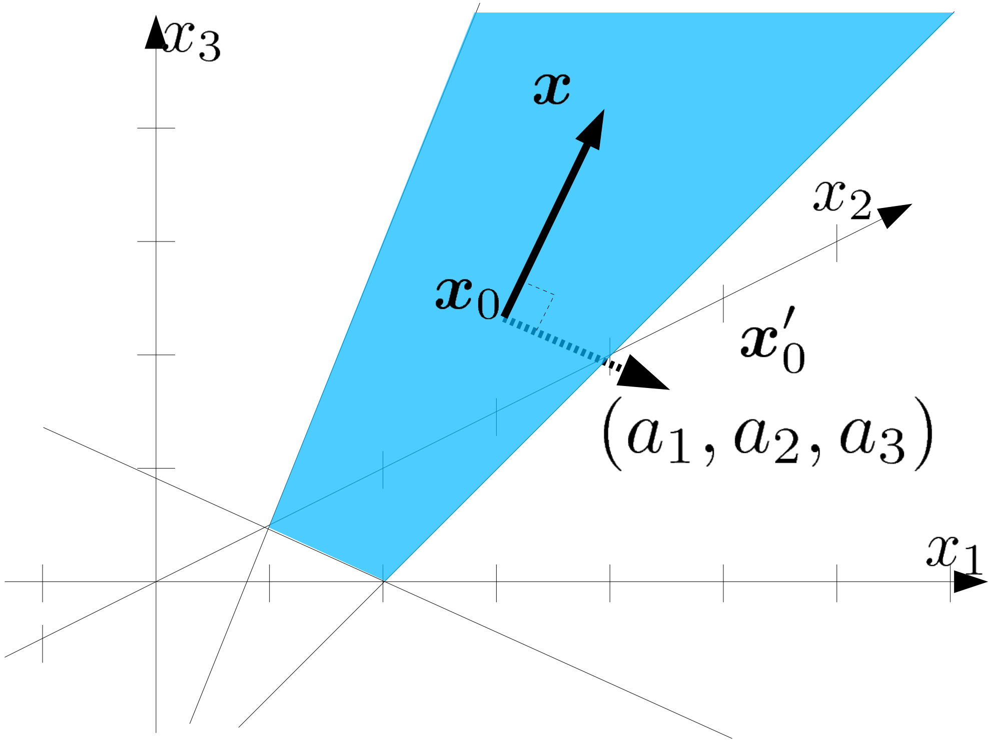


線形計画問題と多面体

定義：n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体：$\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_1 = b_1$



$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = b_1$$

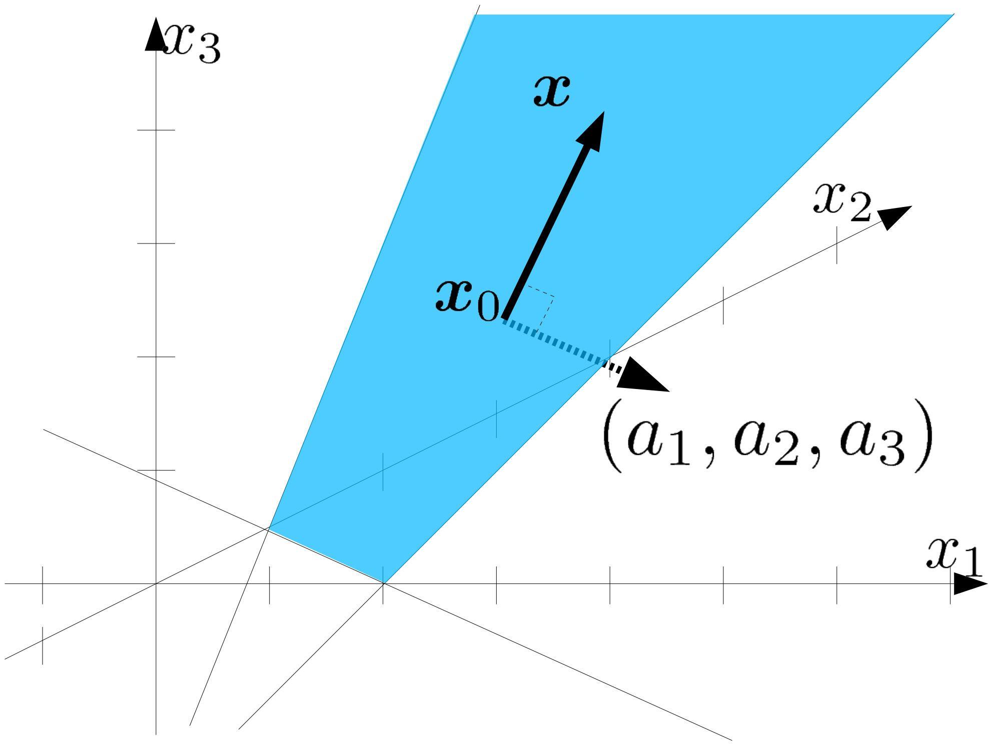
$\boldsymbol{x}_0$を通り、$\boldsymbol{A}_1$に直交する平面

線形計画問題と多面体

定義：n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体：$\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_1 = b_1$



$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = b_1$$

平行移動

$$\{\boldsymbol{x}' \mid \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_0') = 0\}$$

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_0' + \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}_0 + (\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0))$$

$$= b_1 + \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0)$$

$> b_1$ 元の平面に対して $\boldsymbol{A}_1$ と同じ側

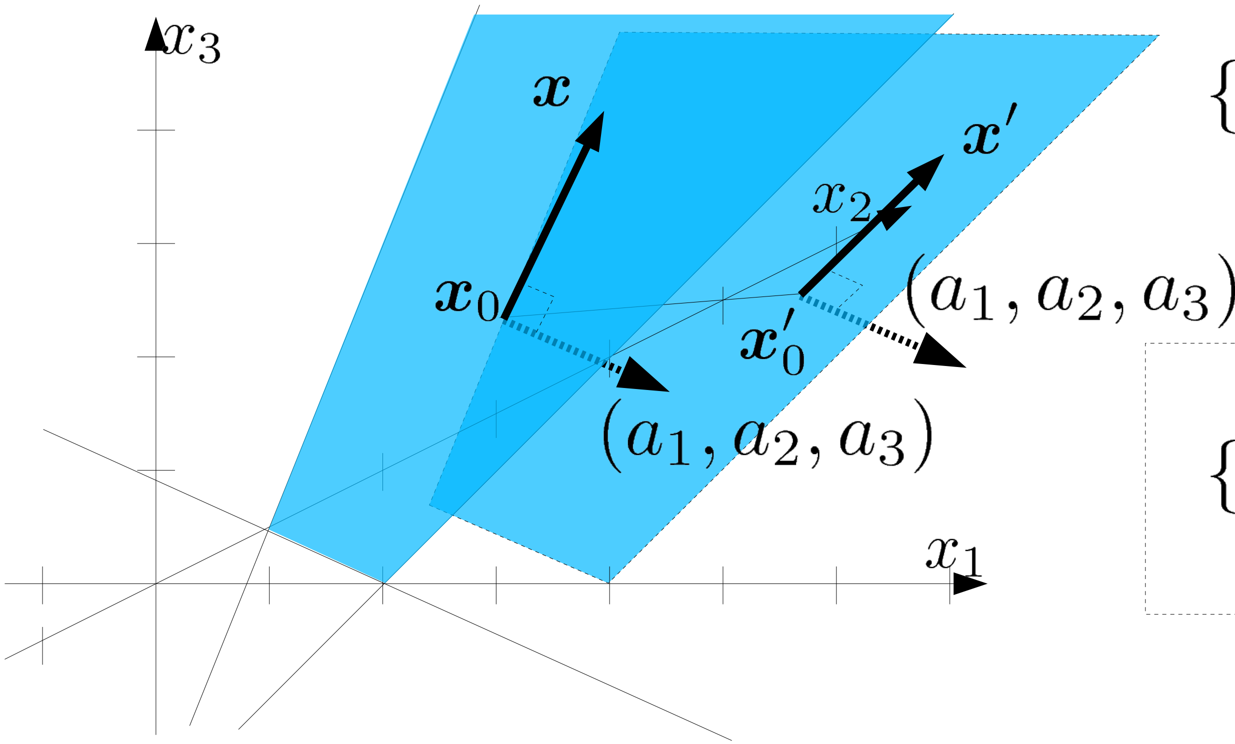
$< b_1$ 元の平面に対して $\boldsymbol{A}_1$ と反対側

線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体: $\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_1 = b_1$



$$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = b_1$$

平行移動

$$\{\boldsymbol{x}' \mid \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_0') = 0\}$$

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_0' + \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}_0 + (\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0))$$

$= b_1 + \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0)$ $> b_1$ 元の平面に対して $\boldsymbol{A}_1$ と同じ側

$< b_1$ 元の平面に対して $\boldsymbol{A}_1$ と反対側

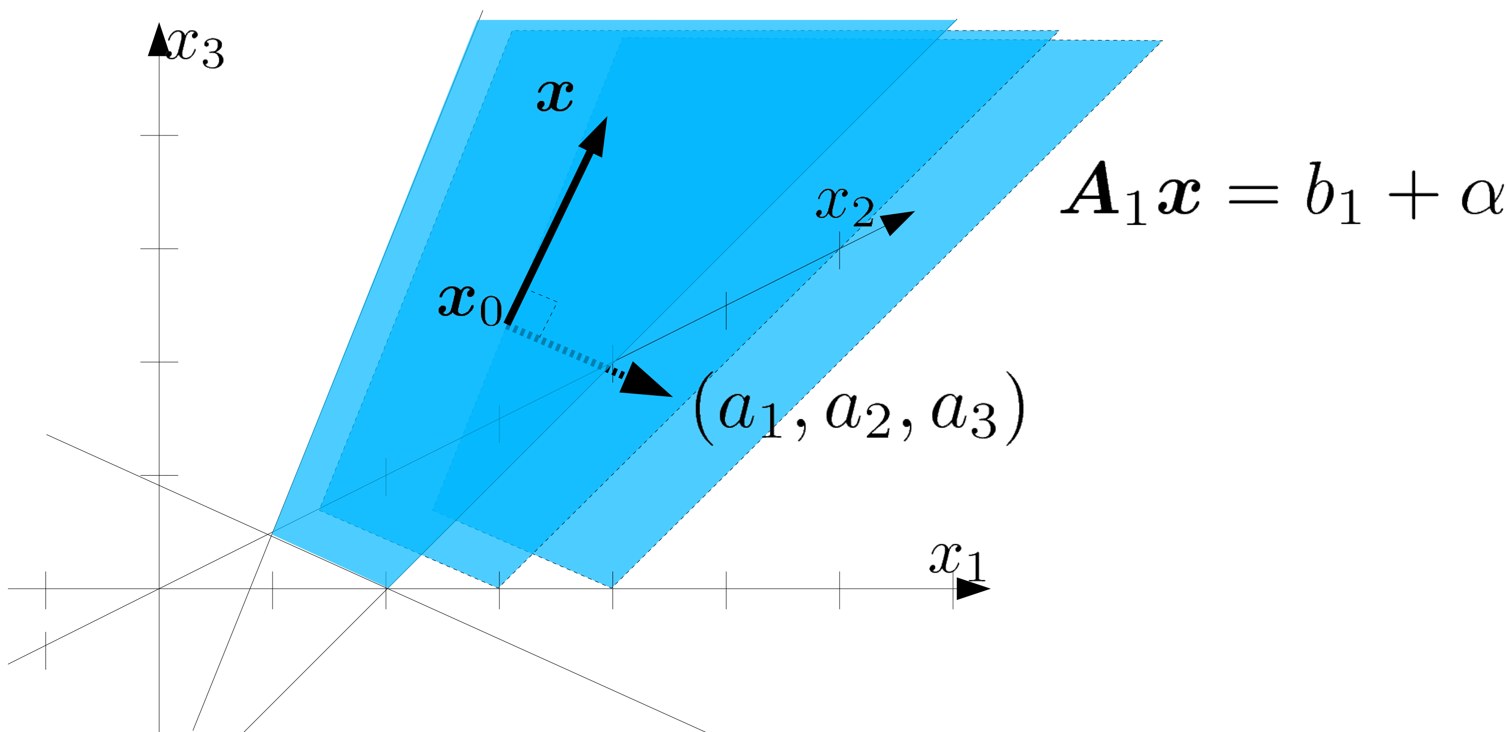
線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体:

$$\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_1 = b_1 \qquad \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = b_1$$



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

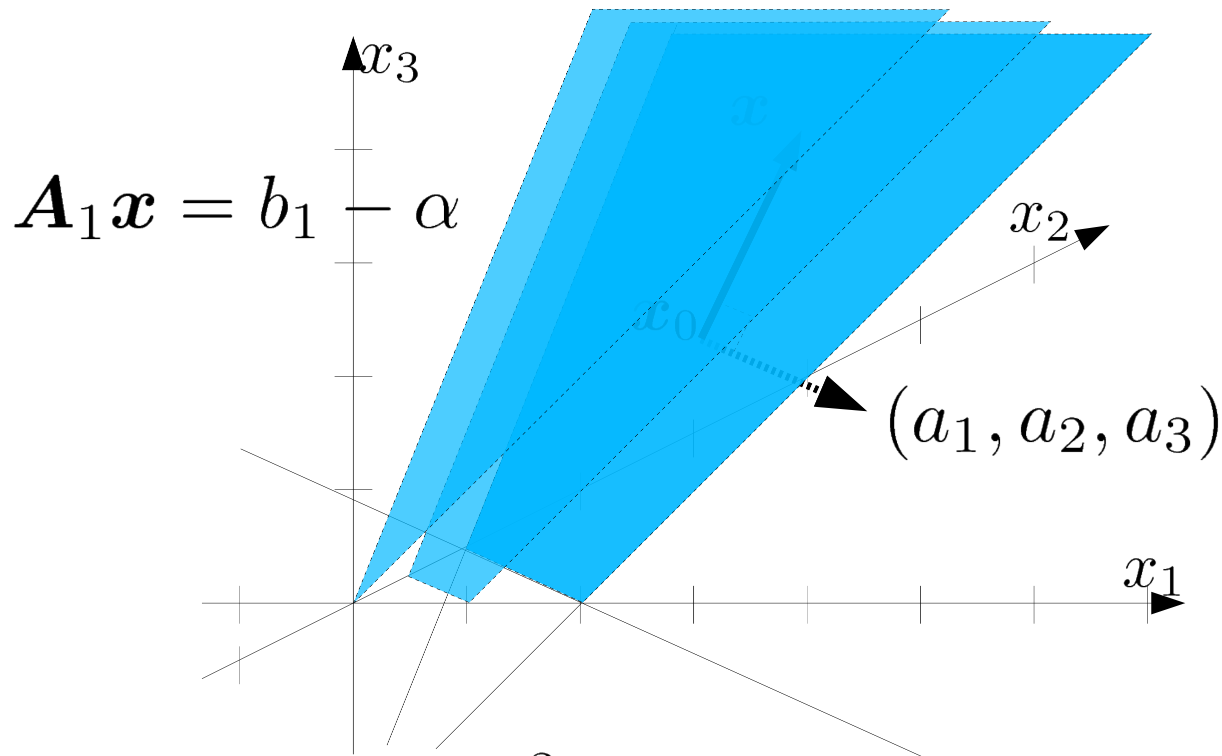
線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体:

$$\boldsymbol{A}_1 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_1 = b_1 \qquad \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = b_1$$



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

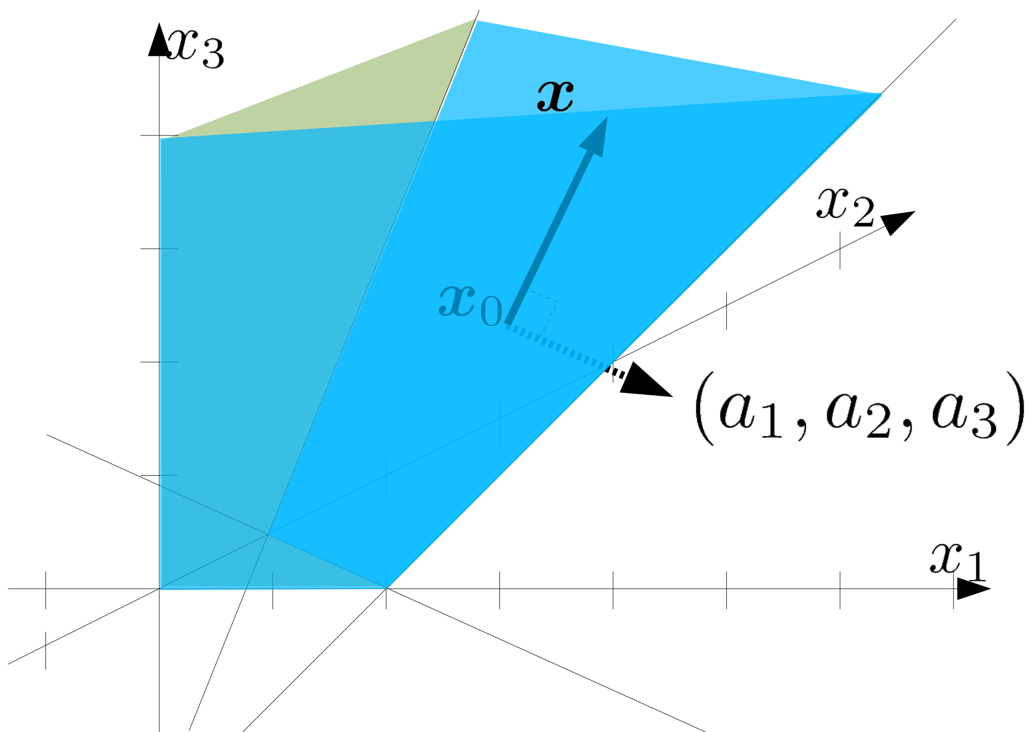
線形計画問題と多面体

定義：n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元領域を2分する多面体：

$$\boldsymbol{A}_2 = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_2 = b \qquad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_0 = b$$



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

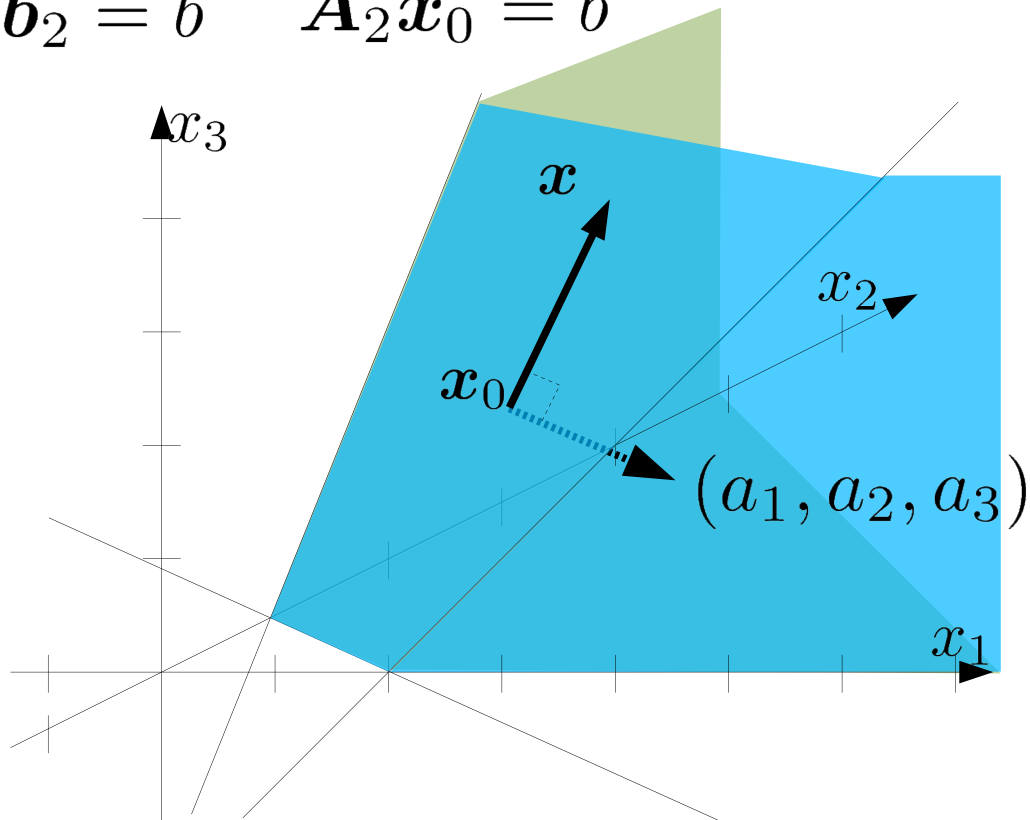
線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元領域を2分する多面体:

$$\boldsymbol{A}_2 = -(a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_2 = b \qquad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_0 = b$$



$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

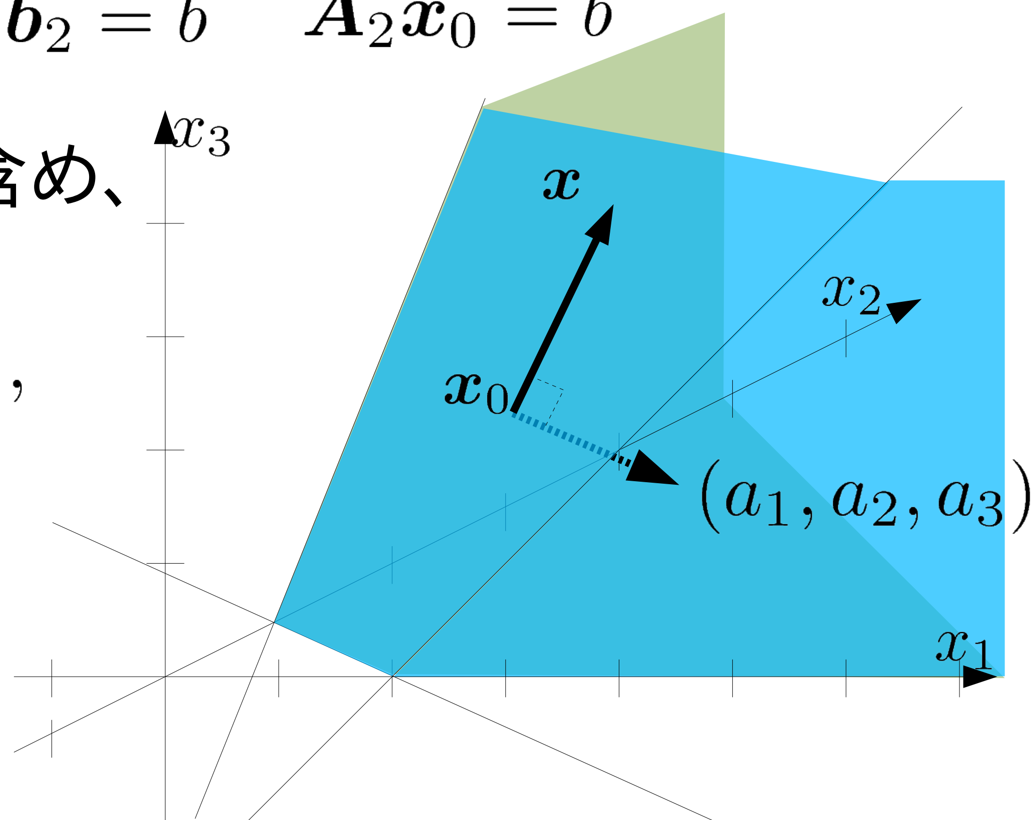
線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

3次元領域を2分する多面体:

$$\boldsymbol{A}_2 = -(a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}_2 = b \qquad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_0 = b$$



正確には非負条件も含め、

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -(a_1, a_2, a_3) \\ -\boldsymbol{I} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} b \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2\}$$

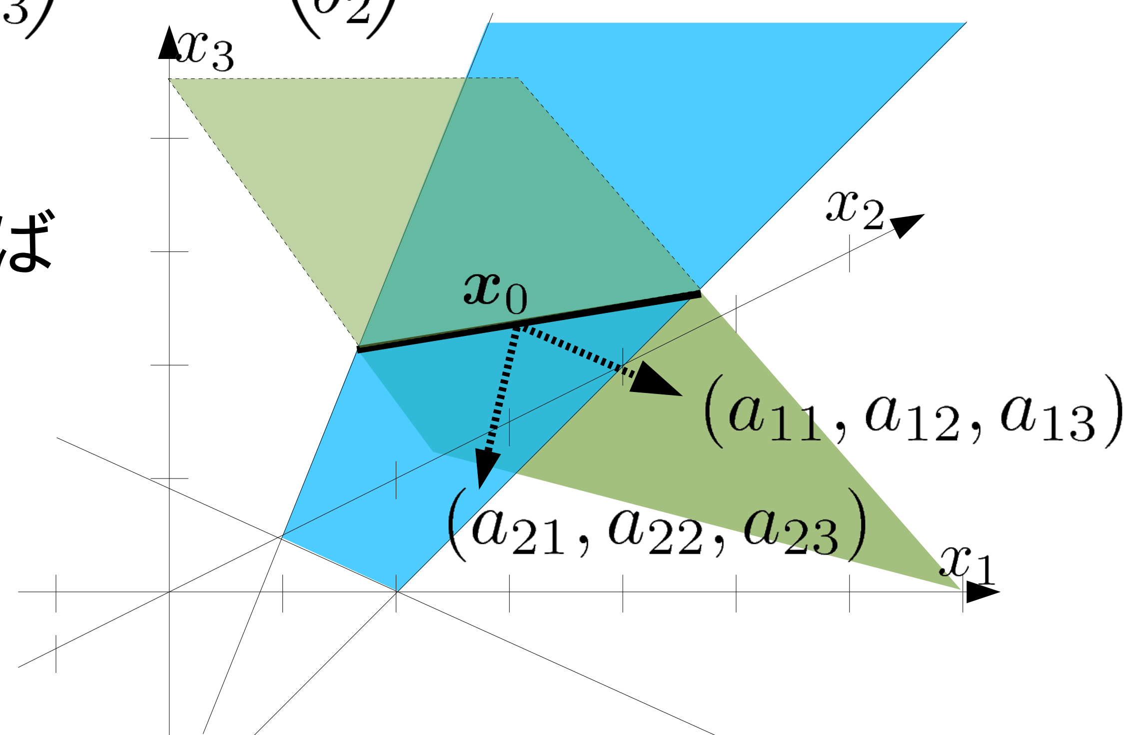
3次元の直線を構成する多面体:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}_1$$

非負条件を入れれば

線分になる

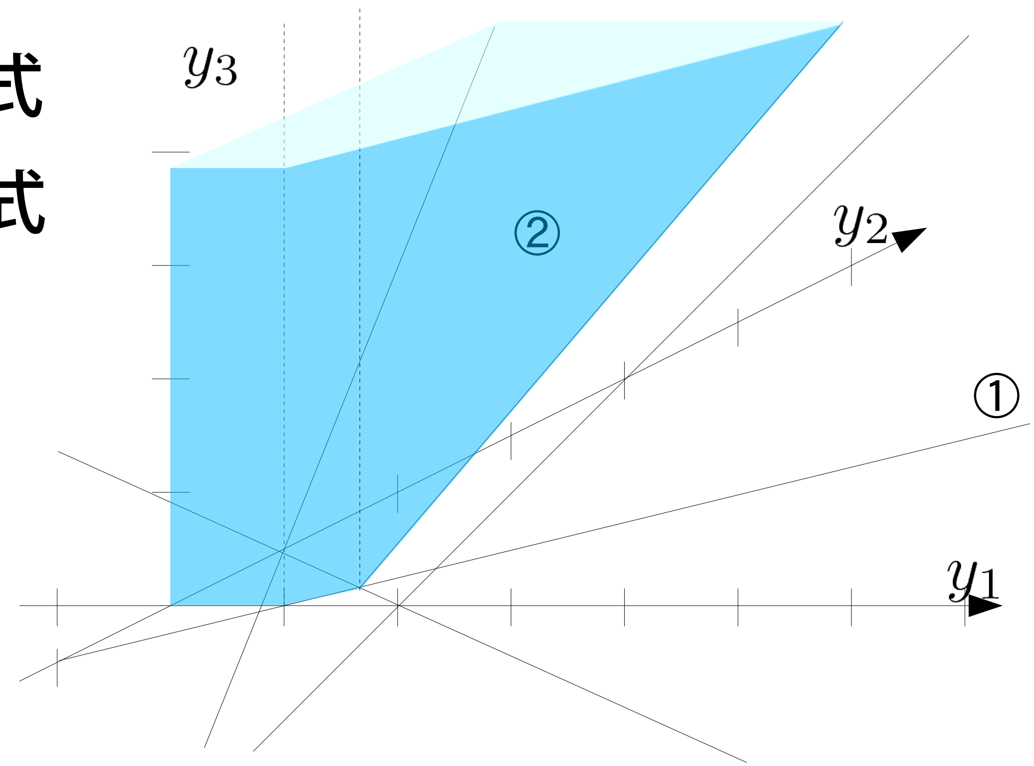


$$\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0\}$$

線形計画問題と多面体

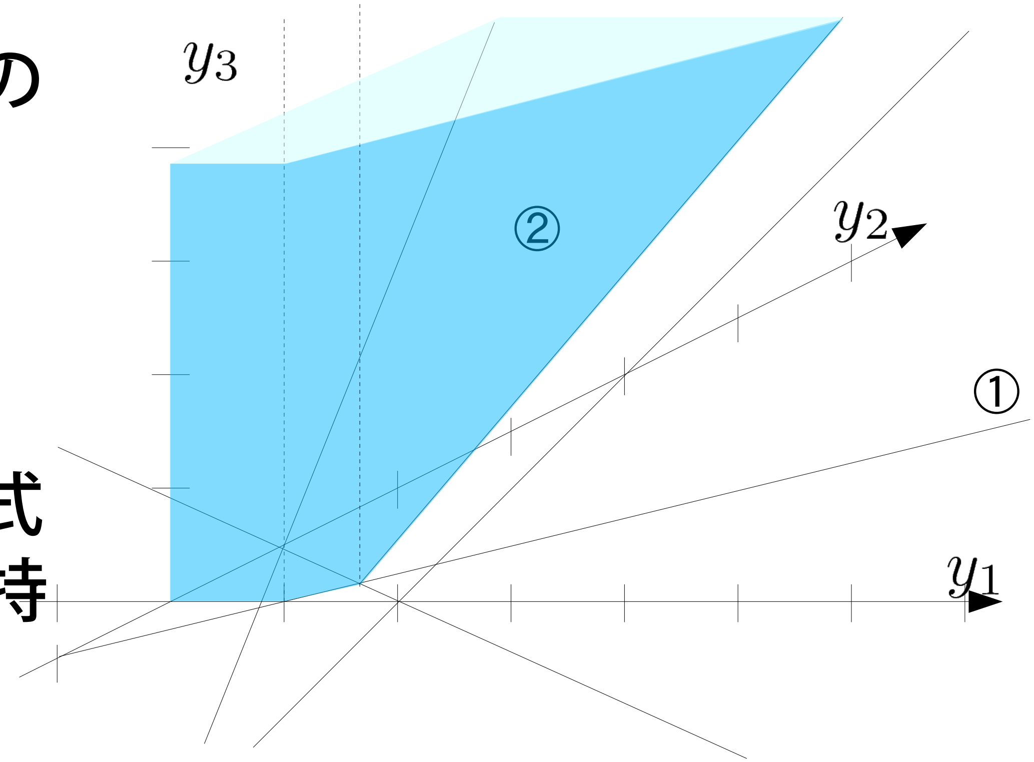
- 妥当不等式
  P が $\mathbb{R}^n$ の多面体のとき、$\forall \boldsymbol{x} \in P \Rightarrow \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ なら
  $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ は P の妥当不等式
- 図の多面体を P とすれば
  $y_1 - y_2 \leq 2$ はP の妥当不等式

P を与える①②③も妥当不等式
  ① $y_1 - y_2 \leq 1$
  ② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$
  ③ $y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$



線形計画問題と多面体

- 支持超平面
  P が$\mathbb{R}^n$ の多面体、$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ が P の妥当不等式のとき、
  $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ の境界が P と交わりを持つなら
  この境界を支持超平面と呼ぶ
- ①②③の境界は図の多面体の
  支持超平面
  ① $y_1 - y_2 \leq 1$
  ② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$
  ③ $y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$
  $y_1 - y_2 \leq 2$ はP の妥当不等式
  ではあるが、その境界は支持
  超平面ではない



線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の多面体 $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_2\}$$

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{N_1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N_1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_{N_2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_{N_2} \end{pmatrix}$$

多面体を構成する平面の法線ベクトル:

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{N_1}, \boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_{N_2}$$

　不等式標準形の不等式制約の係数に対応する「$\text{minimize} \quad z$, subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b}$ 」のとき、$\boldsymbol{A}$の行ベクトル毎に平面が考えられる。

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$$

平面 ℓ: $\boldsymbol{a}_\ell^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \ge b_\ell \qquad \ell = 1, \ldots, n$

練習問題9

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize $\quad z = x_1 + 2x_2$
subject to $x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0,\ \ x_2 \leq 3,$
$\qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0.$

課題2：主問題と双対問題の実行可能領域を、目的関数を表す平面とともに図示し、図を用いてそれぞれの最適解を示せ。

練習問題9

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize $z = x_1 + 2x_2$

subject to $x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0,\ \ x_2 \leq 3,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

minimize
$$z = (1, 2)\boldsymbol{x}$$
subject to
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$$

maximize
$$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$$
subject to
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$$

練習問題9

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$z = x_1 + 2x_2$$

minimize
subject to $x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0,\ \ x_2 \leq 3,$ $x_1, x_2 \geq 0.$

minimize

$z = (1,2)\boldsymbol{x}$

subject to

3つの平面

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$

2つの平面

maximize

$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$

2つの平面

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$

3つの平面

練習問題9

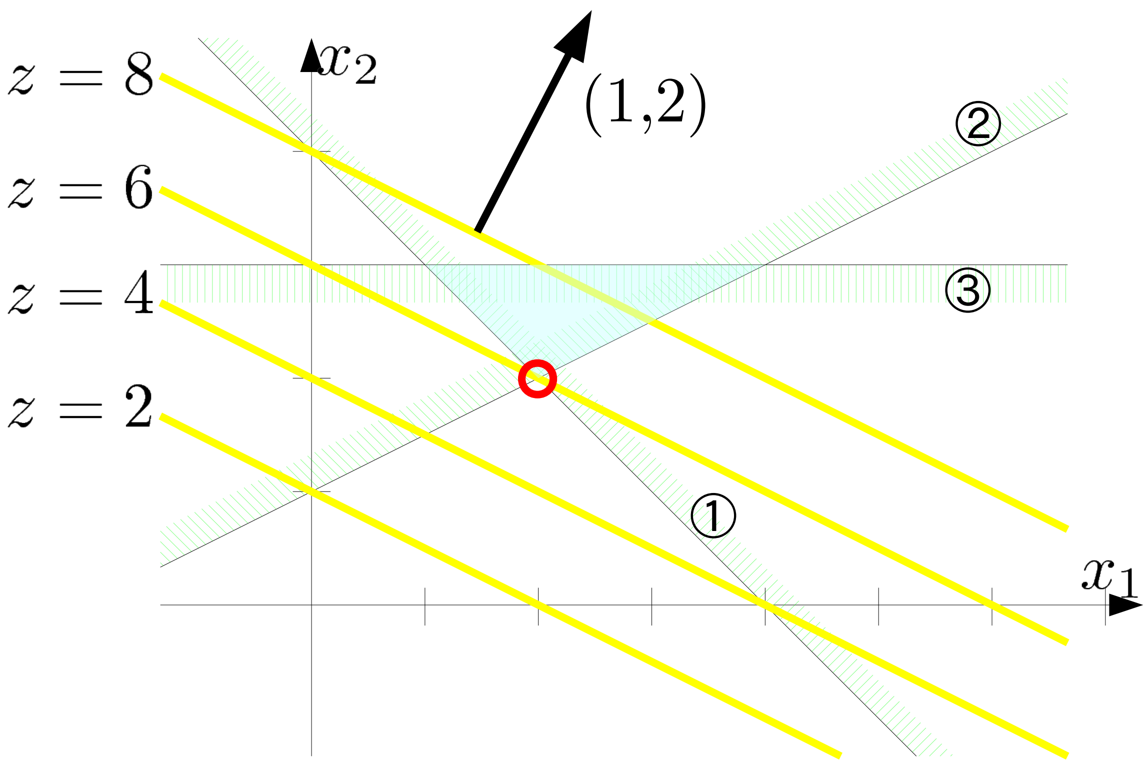
minimize

$z = (1, 2)\boldsymbol{x}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$



練習問題9

maximize

$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$