第10回：多面体と双対定理・相補性定理

制約式の構成する多面体

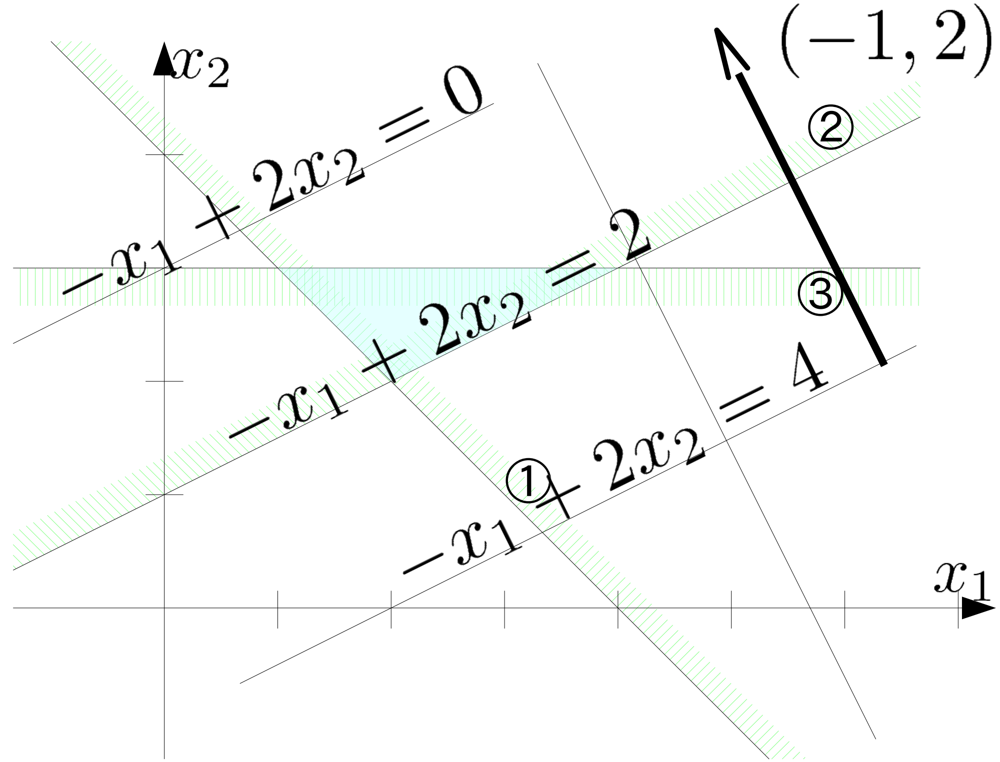
不等式標準形

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 & ① \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 2 & ② \\ -x_2 &\geq -3 & ③ \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



等式標準形

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - s_1 &= 4 & ① \\ -x_1 + 2x_2 - s_2 &= 2 & ② \\ -x_2 - s_3 &= -3 & ③ \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

主変数が法線ベクトル方向に変化するとスラック変数値が増加する。

制約式の構成する多面体

不等式標準形

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 & \text{①} \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 2 & \text{②} \\ -x_2 &\geq -3 & \text{③} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

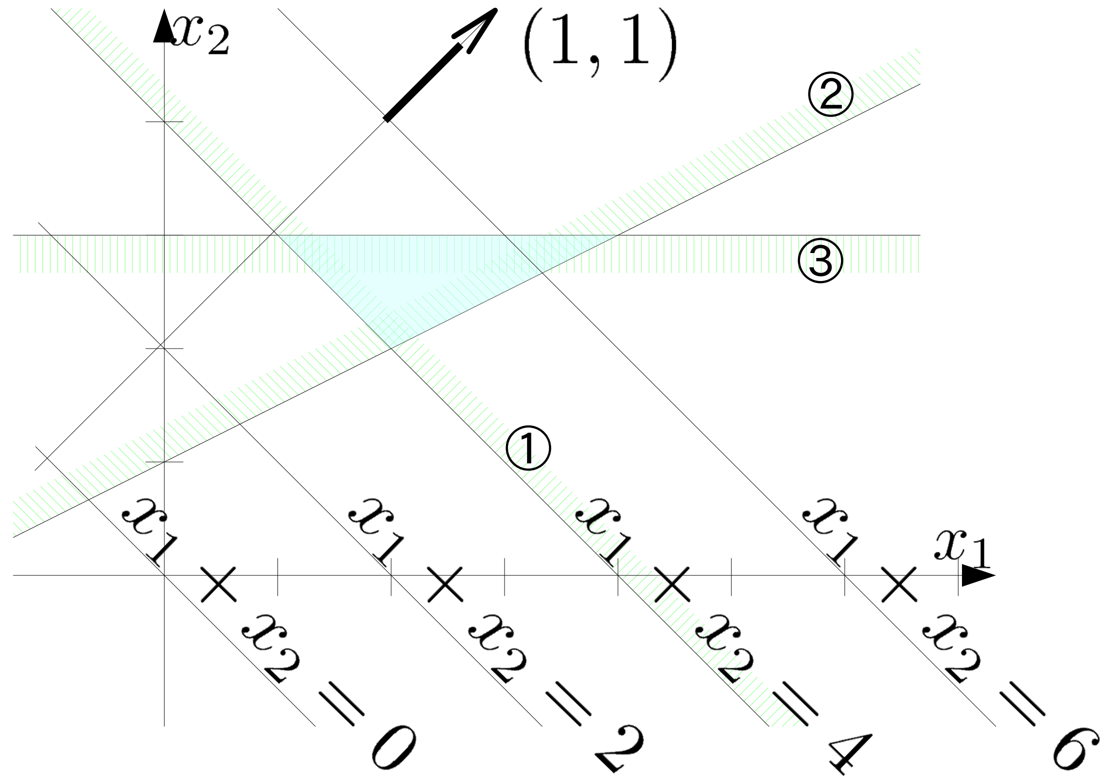
等式標準形

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - s_1 &= 4 & \text{①} \\ -x_1 + 2x_2 - s_2 &= 2 & \text{②} \\ -x_2 - s_3 &= -3 & \text{③} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



主変数が法線ベクトル方向に変化するとスラック変数値が増加する。

制約式の構成する多面体

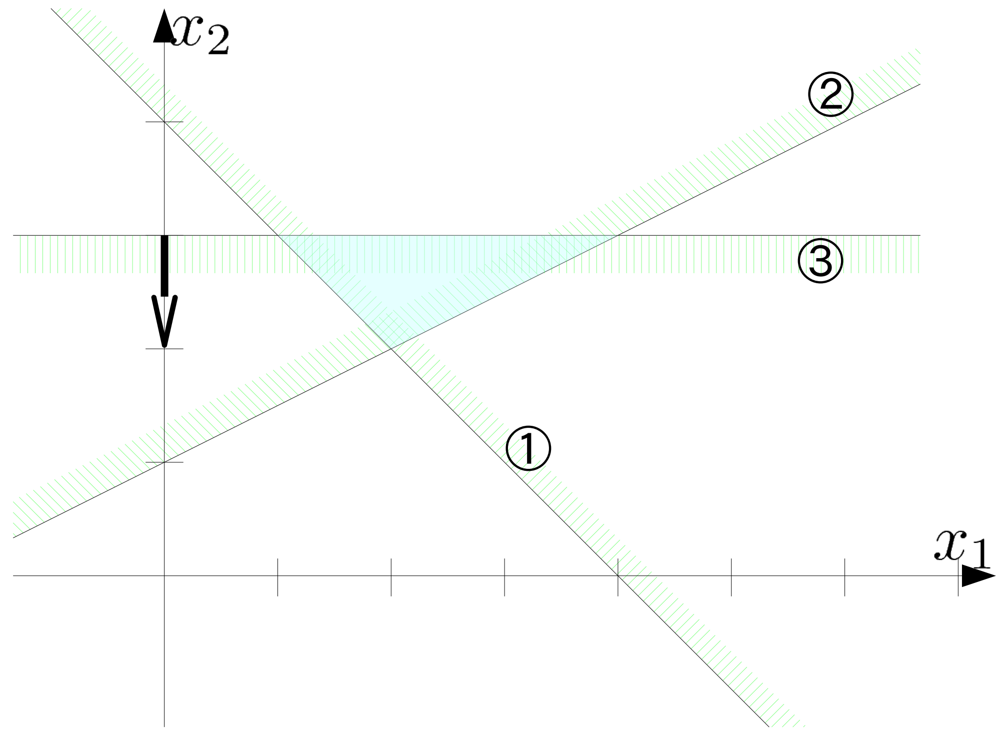
不等式標準形

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 & ① \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 2 & ② \\ -x_2 &\geq -3 & ③ \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



等式標準形

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - s_1 &= 4 & ① \\ -x_1 + 2x_2 - s_2 &= 2 & ② \\ -x_2 - s_3 &= -3 & ③ \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

主変数が法線ベクトル方向に変化するとスラック変数値が増加する。

主問題と双対問題の関係

maximize

$z = 2x_1 + x_2 + x_3$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & \le & 4 \text{ ①} \\ 2x_1 & & 4x_3 & \le & 4 \text{ ②} \\ -4x_1 & +3x_2 & -x_3 & \le & 1 \text{ ③} \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

最大化問題

minimize

$w = 4y_1 + 4y_2 + y_3$

subject to

$$2y_1 + 2y_2 - 4y_3 \ge 2$$
$$2y_1 + 3y_3 \ge 1$$
$$-y_1 + 4y_2 - y_3 \ge 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

最小化問題

最大化問題は、制約式の定める
上界に一番近い実行可能解を探す問題
2つの制約式から分かる上界の例:

$z \le$ (①+②)/2= $2x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 \le 4$

（係数を比較すれば不等式の成立が分かる）

①②③の組み合わせで得られる関係式

y_1×① + y_2×② + y_3×③

を考える。

$y_1, y_2, y_3 \geqq 0$ であれば、各式の両辺を加えて

$$= (2y_1 + 2y_2 - 4y_3)x_1 + (2y_1 + 3y_3)x_2$$
$$+(-y_1 + 4y_2 - y_3)x_3 \le (4y_1 + 4y_2 + y_3)$$

関係式の係数が目的関数の係数より大きければ、

$z \le 4y_1 + 4y_2 + y_3$ により

目的関数の上界を得ることができる。

このとき、最も厳しい上界を求める問題、
すなわち $4y_1 + 4y_2 + y_3$ の最小化問題が
z の上限を求める問題に対応する。

目的関数の作る平面

不等式標準形

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 4 \quad ①$$
$$-x_1 + 2x_2 \geq 2 \quad ②$$
$$-x_2 \geq -3 \quad ③$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

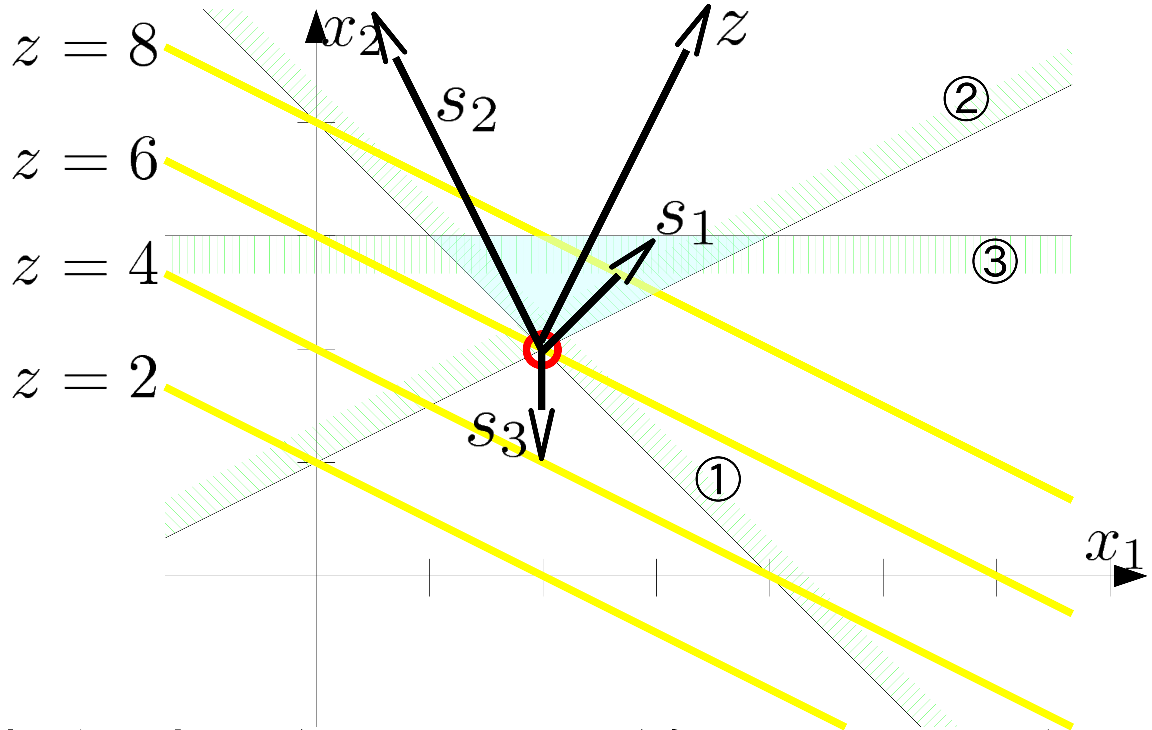
等式標準形

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

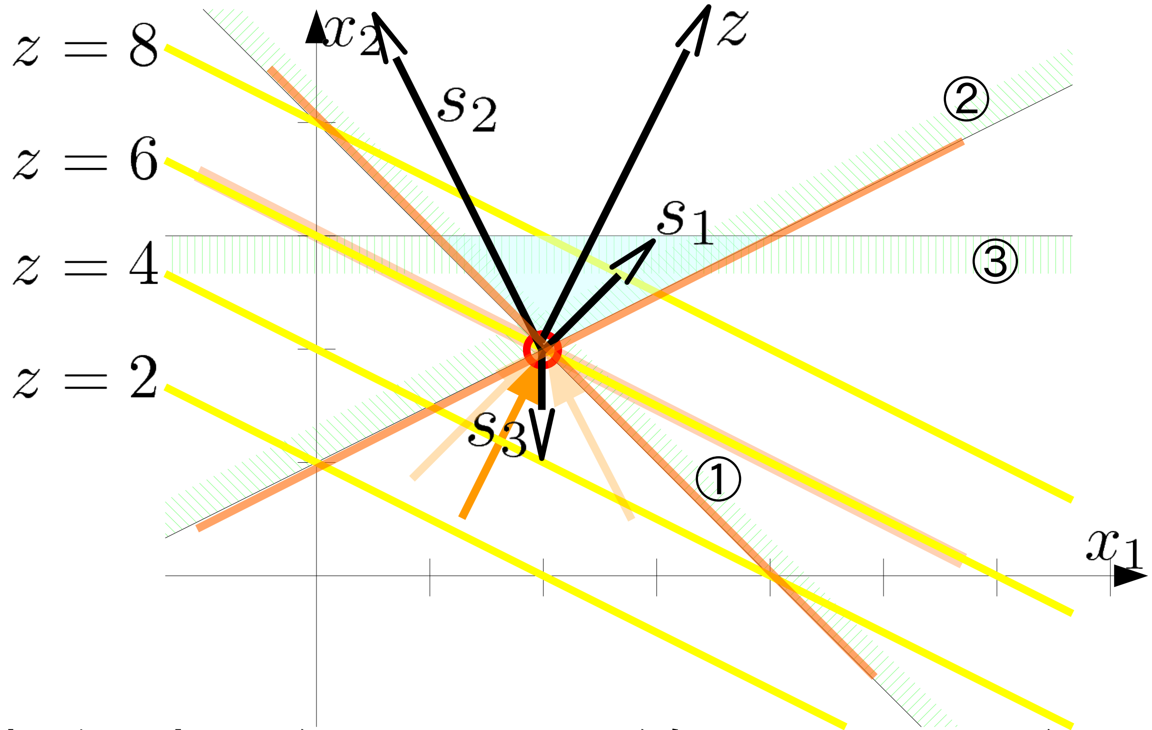
$$x_1 + x_2 - s_1 = 4 \quad ①$$
$$-x_1 + 2x_2 - s_2 = 2 \quad ②$$
$$-x_2 - s_3 = -3 \quad ③$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



制約式の組合せ=法線ベクトルの組合せ
※目的関数のベクトルと平行にすれば、
双対定理に対応する下限の式が得られる

$$y_1 s_1 + y_2 s_2 \parallel z \rightarrow$$
$$z \geq y_1①+y_2② \geq 4y_1 + 2y_2$$

目的関数の作る平面



不等式標準形

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 4 \quad ①$$

$$-x_1 + 2x_2 \geq 2 \quad ②$$

$$-x_2 \geq -3 \quad ③$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

等式標準形

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$x_1 + x_2 - s_1 = 4 \quad ①$$

$$-x_1 + 2x_2 - s_2 = 2 \quad ②$$

$$-x_2 - s_3 = -3 \quad ③$$

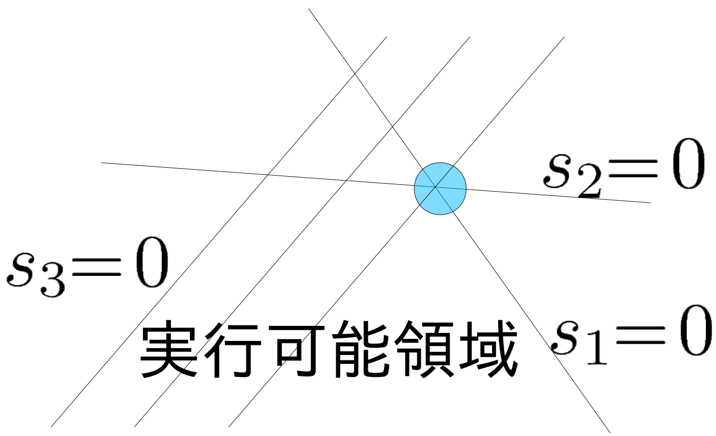
$$x_1, x_2 \geq 0$$

制約式の組合せ=法線ベクトルの組合せ
※目的関数のベクトルと平行にすれば、
双対定理に対応する下限の式が得られる

$$y_1 s_1 + y_2 s_2 \parallel z \rightarrow$$

$$z \geq y_1①+y_2② \geq 4y_1 + 2y_2$$

相補性定理と多面体



minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - s_1 &= 4 & ① \\ -x_1 + 2x_2 - s_2 &= 2 & ② \\ -x_2 - s_3 &= -3 & ③ \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

主変数が2つの平面の交点に対応する値をとる

→対応するスラック変数値はゼロ、他のスラック変数値は正

→目的関数を制限する不等式の係数＝双対変数は正、他の制約式の係数はゼロ

練習問題10

次の線形計画問題の双対問題を求め、主問題･双対問題の実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

また、制約式･目的関数に関わる平面の法線ベクトルを描き、双対変数どうしの関係を説明せよ

maximize

$$z = x_1 + x_2$$

subject to

$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

minimize

$$w = 2y_1 + 2y_2$$

subject to

$$\begin{array}{rrcl} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

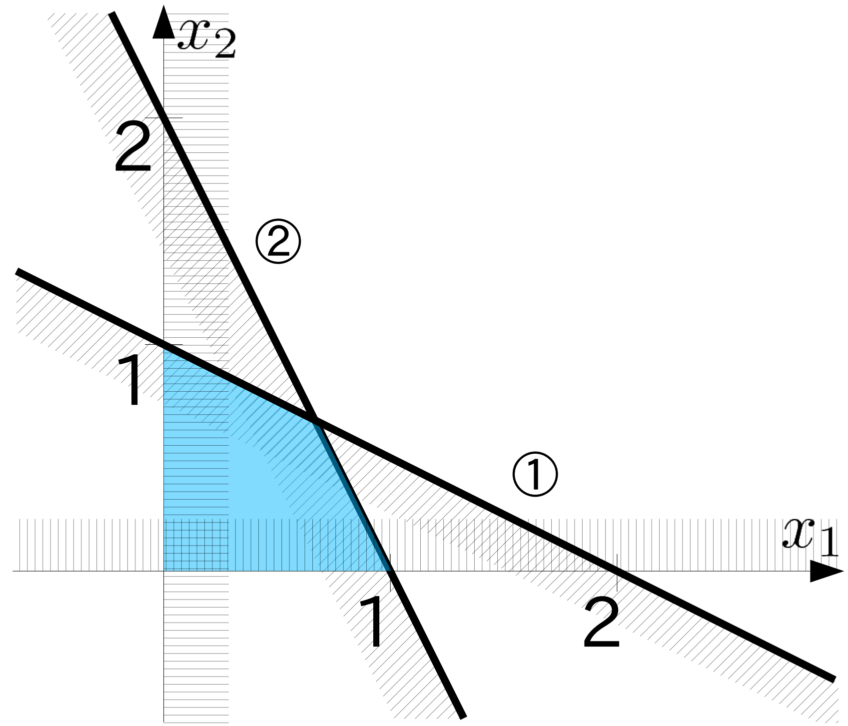
演習問題10

実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

主問題

maximize
$z = x_1 + x_2$
subject to

$$
\begin{array}{rrcrl}
x_1 & +2x_2 & \leq & 2 & ① \\
2x_1 & +x_2 & \leq & 2 & ② \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$



演習問題10

実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

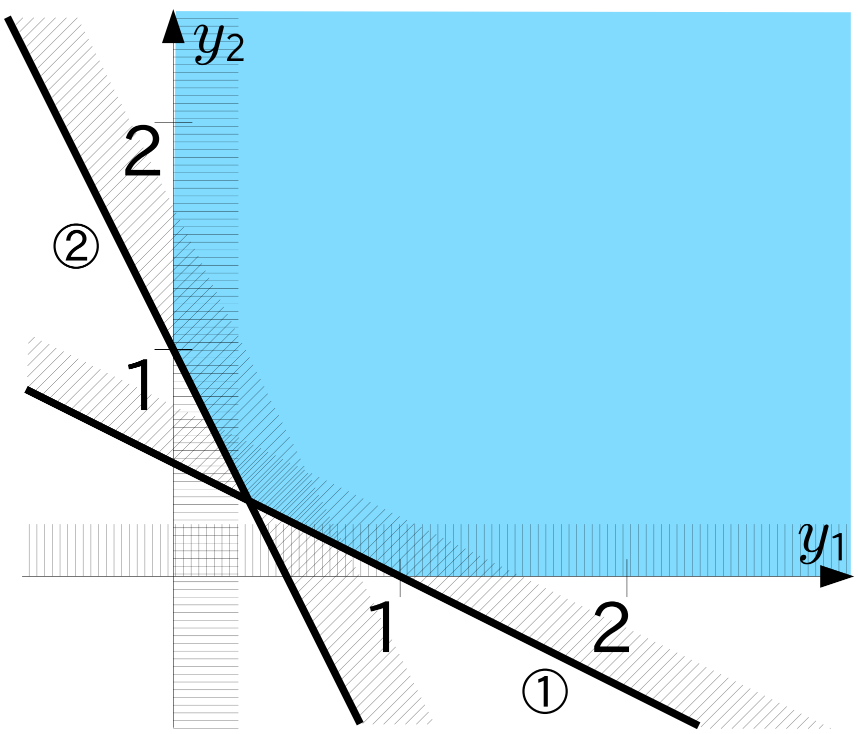
双対問題

minimize

$$w = 2y_1 + 2y_2$$

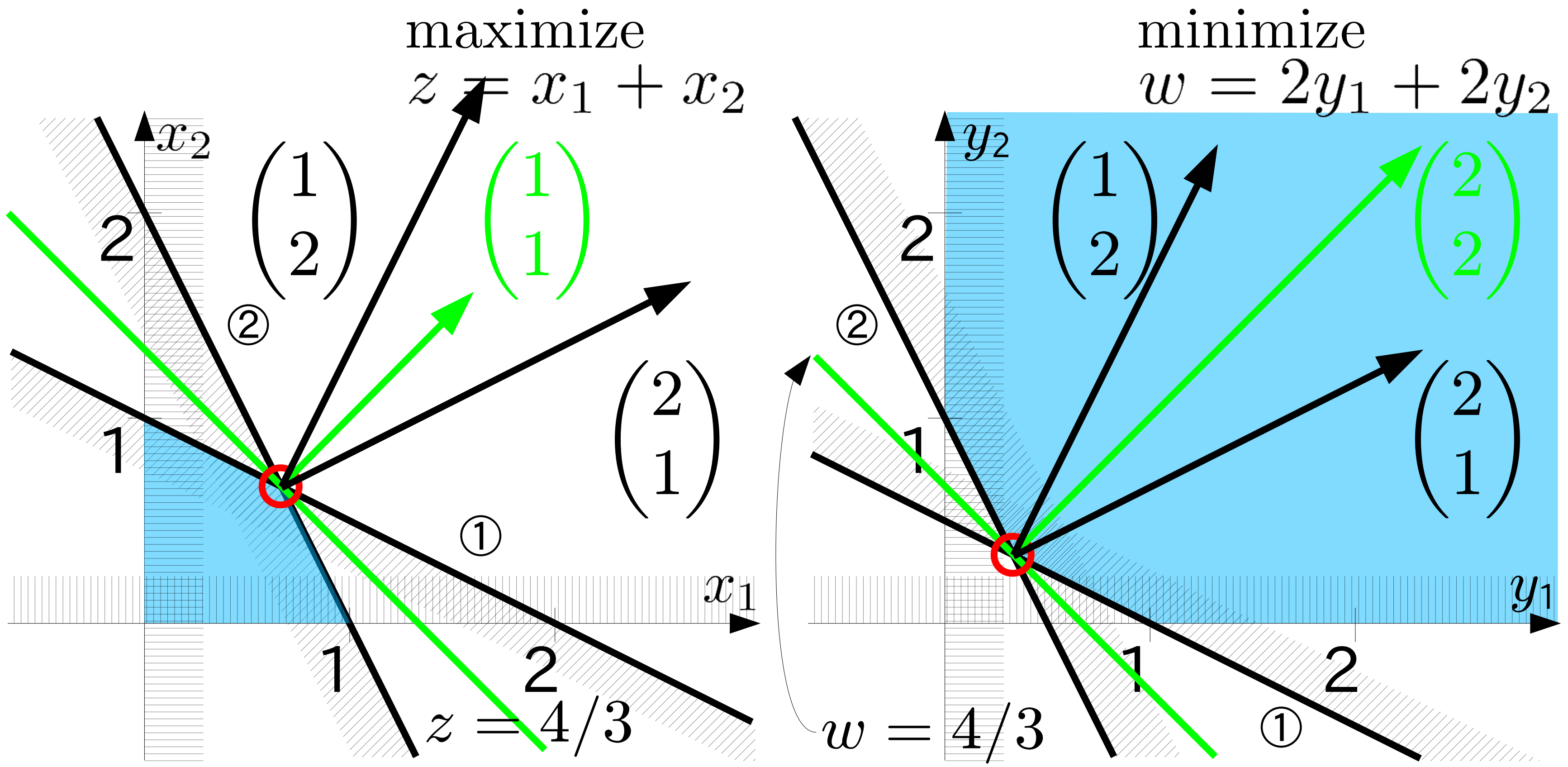
subject to

$$\begin{array}{rrcll} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 & ① \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 & ② \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 & \end{array}$$



演習問題10

最適解を与える制約式･目的関数に関わる平面の法線ベクトルを描き、



演習問題10

双対変数同士の関係を説明せよ

目的関数の法線ベクトル
＝$y_1$①の法線ベクトル
＋$y_2$②の法線ベクトル

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

目的関数
＝y_1制約式①＋y_2制約式②

$$z = x_1 + x_2 \le \frac{1}{3}2 + \frac{1}{3}2 = \frac{4}{3}$$

主問題

maximize
$z = x_1 + x_2$
subject to

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & \le & 2 & ① \\ 2x_1 & +x_2 & \le & 2 & ② \\ & & x_1, x_2 \ge 0 & & \end{array}$$

最適解：

$$(z, x_1, x_2, s_1, s_2) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right)$$

演習問題10

双対変数同士の関係を説明せよ

目的関数の法線ベクトル
＝$x_1$①の法線ベクトル
＋$x_2$②の法線ベクトル

$$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

目的関数
＝x_1制約式①＋x_2制約式②

$$w=2y_1+2y_2\geq\frac{2}{3}1+\frac{2}{3}1=\frac{4}{3}$$

双対問題

minimize
$w=2y_1+2y_2$
subject to

$$\begin{array}{llll} y_1 & +2y_2 & \geq 1 & ① \\ 2y_1 & +y_2 & \geq 1 & ② \\ & y_1, y_2 & \geq 0 & \end{array}$$

最適解

$$(w, y_1, y_2, t_1, t_2) = (\tfrac{4}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, 0)$$