

数理計画法

第12回:内点法2

復習：演習問題11

課題1：次の線形計画問題を書換えて自己双対型線形計画問題を導きなさい。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

課題2：元の問題の最適解が求めた自己双対型線形計画問題の実行可能解になっていることを確認してください。

復習：演習問題11

主問題は2変数

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

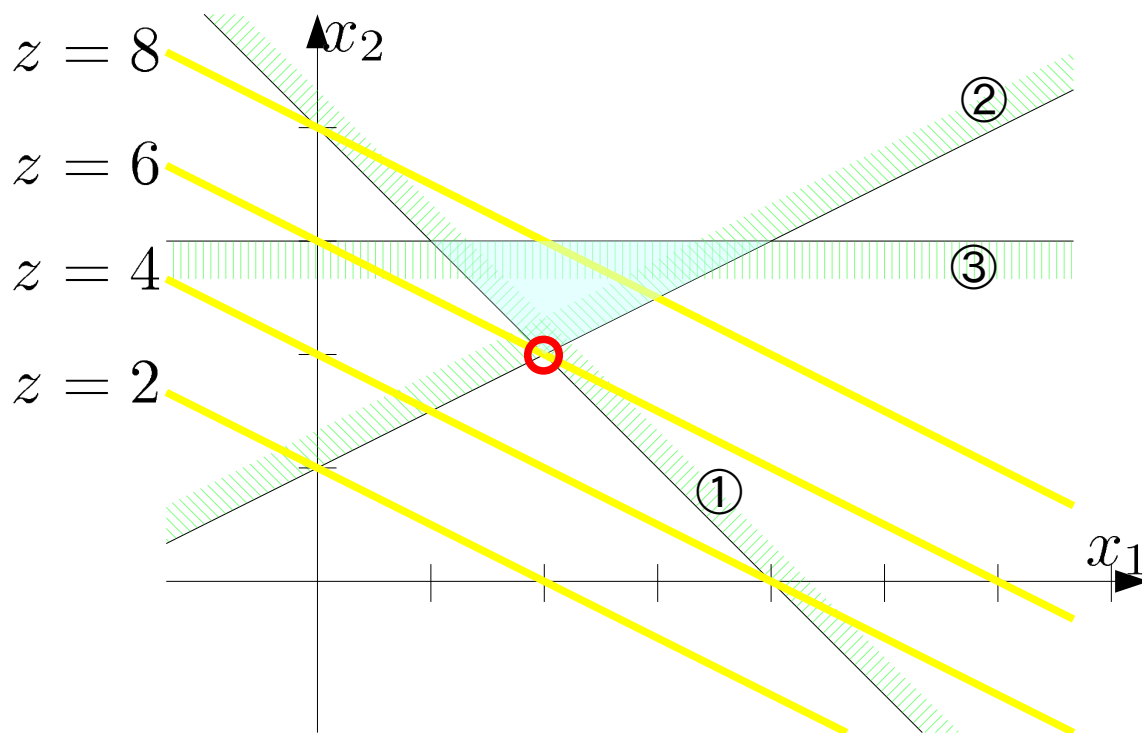
① $x_1 + x_2 \geq 4$

② $x_2 - 2x_1 + 2 \leq 0$

③ $x_2 \leq 3$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

最適解：



$$z = 6, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 1, x_1 = 2, x_2 = 2$$

復習：演習問題11

双対問題は3変数

maximize

$$w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3$$

subject to

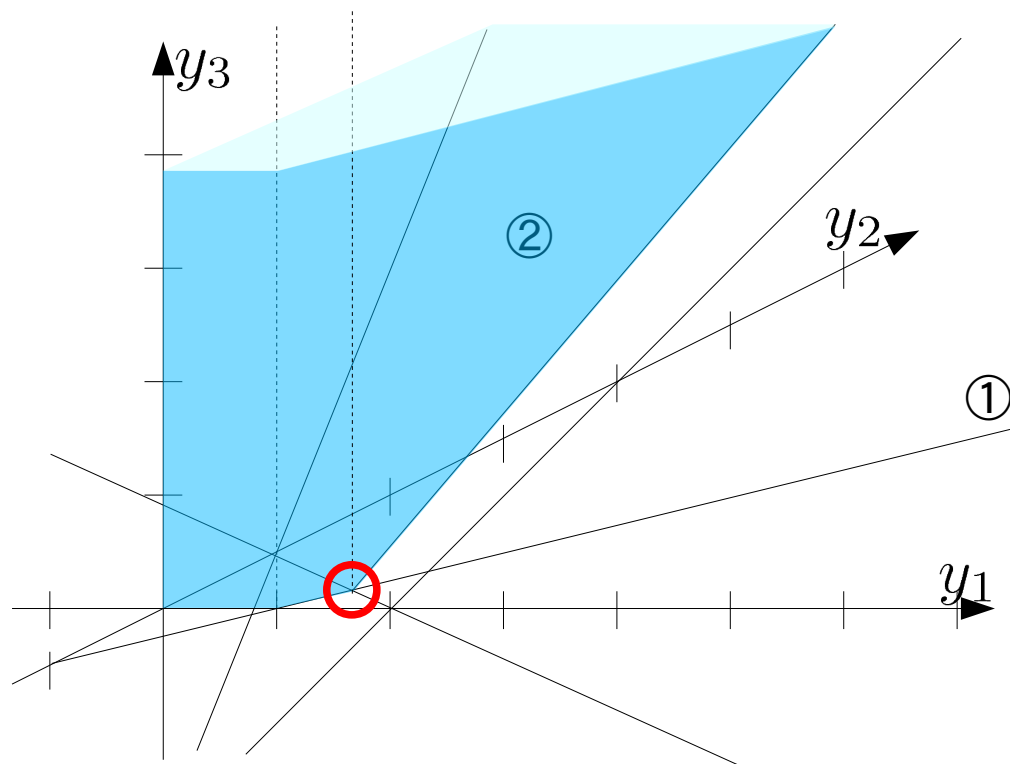
① $y_1 - y_2 \leq 1$

② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

最適解：

$$w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$$



復習：演習問題11

主問題・双対問題を整理すると、

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \\ & z = x_1 + 2x_2 \\ & \text{subject to} \\ & \quad x_1 + x_2 \geq 4 \\ & \quad -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & \quad 0x_1 - x_2 \geq -3 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \\ & w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\ & \text{subject to} \\ & \quad y_1 - y_2 + 0y_3 \leq 1 \\ & \quad y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2 \\ & \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

等式標準形を用いれば、

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \\ & z = c^T x \\ & \text{subject to} \\ & Ax - s = b \quad x, s \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \\ & w = b^T y \\ & \text{subject to} \\ & A^T y + t = c \quad y, t \geq 0 \end{aligned}$$

ただし

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b^T = [4 \ 2 \ -3] \quad c^T = [12] \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

復習：演習問題11

自己双対型の問題の制約式を考える

$$A = \begin{bmatrix} O & A & -b \\ A^T & O & c \\ b^T & -c^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

制約式を考えて、 $A[y^T, x^T, \tau]^T \geq O$

なので、その実行可能解は元の主・双対問題の実行可能解
さらに元の最適解を考えれば、 $[y^T, x^T] = [4/3, 1/3, 0, 2, 2]$
となり、自己双対型問題の制約式を満たし、 $\tau=1$ において

$$A[y^T, x^T, \tau]^T = [s^T, t^T, 0]^T \geq O$$