数理計画法

第3回:単体法

復習
線形計画問題の標準形

- 線形計画問題の不等式標準形
  - 目的関数は最小化される
  - 制約式は「左辺: 変数と係数≧右辺: 定数」
  - 全ての変数は非負
- 線形計画問題の等式標準形
  - 目的関数は最小化される
  - 制約式は「左辺: 変数と係数=右辺: 定数」
  - 全ての変数は非負
- 全ての線形計画問題は標準形で表現できる

復習

前回授業内容の復習

演習問題2

ミックスジュース5Lの生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題：利益を最大化する2種類のミックスジュースの生産量は？

課題1：対応する線形計画問題の不等式標準形を示しなさい。

課題2：不等式標準形を等式標準形に書換えなさい。

課題3：総当たりによる解法を用いて最適解を求めなさい。

演習問題2 解答例

ミックスジュース5Lの生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題:利益を最大化する2種類のミックスジュースの生産量は?

問題から線形計画問題を導く

「トロピカル」の生産量:1日あたり $x_1 \times 5[\mathrm{L}]$

「フレッシュ」の生産量:1日あたり $x_2 \times 5[\mathrm{L}]$

1日あたりの生産に必要な原材料の量は

マンゴー液が $3x_1 + 1x_2 [\mathrm{L}] \leq 45 \times 10^3 [\mathrm{L}]$

オレンジ液が $1x_1 + 2x_2 [\mathrm{L}] \leq 40 \times 10^3 [\mathrm{L}]$

得られる利益は $600x_1 + 500x_2$ 円

問題から導かれる自然な線形計画問題

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$

$$1x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

演習問題2 解答例

問題から導かれる自然な
線形計画問題

maximize
$$600x_1 + 500x_2$$
subject to
$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$1x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

不等式標準形の要件

目的関数は最小化される

制約式は「左辺:変数と係数≧右辺:定数」

全ての変数は非負

目的関数を -1倍して、
最大化問題を
最小化問題に変形する

逆向きの不等式制約式の
両辺を -1 倍して不等号の
向きを変える

不等式標準形

minimize
$$-600x_1 - 500x_2$$
subject to
$$-3x_1 - 1x_2 \geq -45 \times 10^3$$
$$-1x_1 - 2x_2 \geq -40 \times 10^3$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

演習問題2 解答例

ミックスジュース5Lの生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題:利益を最大化する2種類のミックスジュースの生産量は?

済

課題1: 対応する線形計画問題の不等式標準形を示しなさい。

課題2: 不等式標準形を等式標準形に書換えなさい。

課題3: 総当たりによる解法を用いて最適解を求めなさい。

演習問題2 解答例

問題から導かれる自然な
線形計画問題

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \le 45 \times 10^3$$
$$1x_1 + 2x_2 \le 40 \times 10^3$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

等式標準形の要件

目的関数は最小化される

制約式は「左辺:変数と係数＝右辺:定数」

全ての変数は非負

目的関数を -1倍して、
最小化問題に変形する

左辺に非負の変数を加えて
等式に換える

左辺≦右辺 ⇒ 右辺-左辺≧0
より
新変数＝右辺-左辺≧0 を導入する

⇒

等式標準形

minimize

$$-600x_1 - 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$1x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

演習問題2 解答例

不等式標準形

minimize

$$-600x_1 - 500x_2$$

subject to

$$-3x_1 - 1x_2 \geq -45 \times 10^3$$
$$-1x_1 - 2x_2 \geq -40 \times 10^3$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

等式標準形の要件

目的関数は最小化される

制約式は「左辺:変数と係数=右辺:定数」

全ての変数は非負

目的関数を -1倍して、
最小化問題に変形する

左辺か非負の変数を引き
等式に換える

左辺≧右辺 ⇒ 左辺-右辺≧0
より
新変数=左辺-右辺≧0 を導入する

等式標準形

minimize

$$-600x_1 - 500x_2$$

subject to

$$-3x_1 - 1x_2 - x_3 = -45 \times 10^3$$
$$-1x_1 - 2x_2 - x_4 = -40 \times 10^3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

制約式の両辺を-1倍すれば前と同じ

演習問題2 解答例

ミックスジュース5Lの生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題:利益を最大化する2種類のミックスジュースの生産量は?

課題1: 対応する線形計画問題の不等式標準形を示しなさい。

課題2: 不等式標準形を等式標準形に書換えなさい。

課題3: 総当たりによる解法を用いて最適解を求めなさい。

演習問題2 解答例

課題1: 対応する線形計画問題の不等式標準形を示しなさい。

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to
$$\begin{aligned} -3x_1 - 1x_2 &\geq -45000 \\ -x_1 - 2x_2 &\geq -40000 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

課題2: 不等式標準形を等式標準形に書換えなさい。

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 + x_4 &= 40000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

復習
標準形への変形

全ての線形計画問題は標準形で表現できる

- 両辺を -1倍して、最大化問題を最小化問題に変形する
- 〃 不等号の向きを揃える
- 一つの等式制約を2つの不等式制約に置き換える

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad x_1 + x_2 \geq 0, -x_1 - x_2 \geq 0$$

- 一つの自由変数を2つの非負変数に置き換える

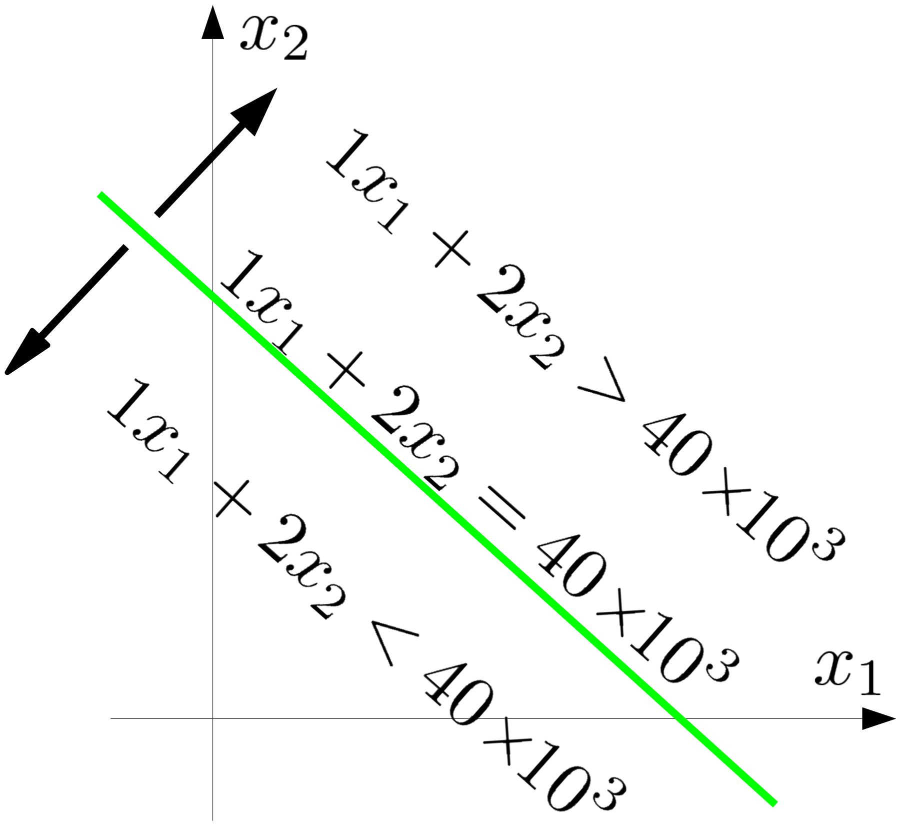
$$x = x_1 - x_2 \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

- 変数を追加して不等式制約を等式制約に置き換える

$$x_1 + x_2 \leq 1 \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_3 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \geq 1 \qquad x_1 + x_2 - x_3 = 1, \quad x_3 \geq 0$$

不等式制約と等式制約の関係



$$1x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$

として x_4 を定めれば、

$$x_4 = 40 \times 10^3 - 1x_1 + 2x_2$$

なので、

$$1x_1 + 2x_2 > 40\times10^3 \Leftrightarrow x_4 < 0$$
$$1x_1 + 2x_2 = 40\times10^3 \Leftrightarrow x_4 = 0$$
$$1x_1 + 2x_2 < 40\times10^3 \Leftrightarrow x_4 > 0$$

つまり、

$$1x_1 + 2x_2 \leq 40\times10^3 \Leftrightarrow x_4 \geq 0$$

別の見方をすれば

$x_4 < 0 \Leftrightarrow 1x_1 + 2x_2 = 40\times10^3$ の直線より上に (x_1, x_2) の点がある

$x_4 = 0 \Leftrightarrow 1x_1 + 2x_2 = 40\times10^3$ の直線上に (x_1, x_2) の点がある

$x_4 > 0 \Leftrightarrow 1x_1 + 2x_2 = 40\times10^3$ の直線より下に (x_1, x_2) の点がある

等式標準形とグラフの交点

等式標準形

minimize
$$-600x_1 - 500x_2$$
subject to
$$3x_1 + 1x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$1x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

等式標準形の条件が満たされている
ということは全ての変数が、
等式制約を満たしゼロまたは正の値をとる
ということ、つまり元の変数 (x_1, x_2) は

$x_1 = 0$ のとき $x_1 = 0$
$x_2 = 0$ のとき $x_2 = 0$
$x_3 = 0$ のとき $3x_1 + x_2 = 45 \times 10^3$
$x_4 = 0$ のとき $x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$
の直線上にある

$\therefore (x_1, x_2)$が実行可能領域を作る
グラフの交点上にある
⇒2つの変数の値がゼロ

例: $x_1 = 0, x_2 = 0$
等式制約
⇒
$$\cancel{3x_1} + \cancel{1x_2} + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$\cancel{1x_1} + \cancel{2x_2} + x_4 = 40 \times 10^3$$

例: $x_3 = 0, x_4 = 0$
等式制約
⇒
$$3x_1 + 1x_2 + \cancel{x_3} = 45 \times 10^3$$
$$1x_1 + 2x_2 + \cancel{x_4} = 40 \times 10^3$$

残った変数は連立方程式を解いて決めることができる

演習問題2 解答例

課題3: 総当たりによる解法を用いて最適解を求めなさい。

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \quad\quad &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 \quad\quad + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

①
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \end{aligned}$$

②
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

③
$$\begin{aligned} 3x_1 + 0x_4 &= 45000 \\ 1x_1 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

④
$$\begin{aligned} 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 2x_2 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

⑤
$$\begin{aligned} 1x_2 + 0x_4 &= 45000 \\ 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

⑥
$$\begin{aligned} 1x_3 + 0x_4 &= 45000 \\ 0x_3 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

2つの方程式で定める2つの変数の組合せと式を全て書き出す

演習問題2 解答例

課題3: 総当たりによる解法を

方程式の解を求め、非負条件を満たさないものを除く

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

①

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 10000 \\ x_2 &= 15000 \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 40000 \\ \cancel{x_3} &\cancel{= -75000} \end{aligned}$$

③

$$\begin{aligned} 3x_1 + 0x_4 &= 45000 \\ 1x_1 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 15000 \\ x_4 &= 25000 \end{aligned}$$

④

$$\begin{aligned} 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 2x_2 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 20000 \\ x_3 &= 25000 \end{aligned}$$

⑤

$$\begin{aligned} 1x_2 + 0x_4 &= 45000 \\ 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 45000 \\ \cancel{x_4} &\cancel{= -50000} \end{aligned}$$

⑥

$$\begin{aligned} 1x_3 + 0x_4 &= 45000 \\ 0x_3 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 45000 \\ x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

演習問題2 解答例

非負条件を満たすもの目的関数値を求め、最適解を見つける

課題3: 総当たりによる解法を

minimize $\quad -600x_1 - 500x_2$

subject to $\quad 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 45000$

$\quad 1x_1 + 2x_2 + 1x_4 = 40000$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

①
$$3x_1 + 1x_2 = 45000$$
$$1x_1 + 2x_2 = 40000$$
目的関数値 $-13{,}500{,}000$

$x_1 = 10000$
$x_2 = 15000$

②
$$3x_1 + 1x_3 = 45000$$
$$1x_1 + 0x_3 = 40000$$
$x_1 = 40000$
$\cancel{x_3 = -75000}$

③
$$3x_1 + 0x_4 = 45000$$
$$1x_1 + 1x_4 = 40000$$
目的関数値 $-9{,}000{,}000$

$x_1 = 15000$
$x_4 = 25000$

④
$$1x_2 + 1x_3 = 45000$$
$$2x_2 + 0x_3 = 40000$$
目的関数値 $-10{,}000{,}000$

$x_2 = 20000$
$x_3 = 25000$

⑤
$$1x_2 + 0x_4 = 45000$$
$$2x_2 + 1x_4 = 40000$$
$x_2 = 45000$
$\cancel{x_4 = -50000}$

⑥
$$1x_3 + 0x_4 = 45000$$
$$0x_3 + 1x_4 = 40000$$
目的関数値 0

$x_3 = 45000$
$x_4 = 40000$