2019数理計画法

第2回：線形計画問題の標準形

「素朴な解法」の問題点と解決法

- グラフを用いた解法
  - 2〜3変数までの問題に適用可能
  - 計算機アルゴリズムとして構成し難い
- 交点を総当たりする解法
  - 多変数の問題に適用可能
  - 交点の実行可能性を調べる手間がある
  - 変数が増えると無駄な交点計算が増える
- 単体法(シンプレックス法、Simplex Method)
  G. B. Danzig (1947)
  - 問題を標準化し、規則にしたがって表に変換する。
  - 決められた手順で表を更新して最適解を見つける。

線形計画問題の標準化

- 不等式標準形
  - 目的関数は最小化される
  - 制約式は「左辺に変数と係数≧右辺に定数のみ」
  - 全ての変数は非負
- 等式標準形
  - 目的関数は最小化される
  - 制約式は「左辺に変数と係数＝右辺に定数のみ」
  - 全ての変数は非負
- シンプレックス表

  等式標準形の制約式から左辺の係数、右辺の定数、目的関数から左辺の係数をとり表にしたもの

線形計画問題の不等式標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数≧右辺に定数のみ」
- 全ての変数は非負
- 規則にしたがって問題を書換える

元の問題と正しく対応するように変形すること

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$
\begin{aligned}
15x_1 + 11x_2 &\leq 1650 \times 10^3 \\
10x_1 + 14x_2 &\leq 1400 \times 10^3 \\
9x_1 + 20x_2 &\leq 1800 \times 10^3 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

元の問題(演習1課題1)

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$
\begin{aligned}
-15x_1 - 11x_2 &\geq -1650 \times 10^3 \\
-10x_1 - 14x_2 &\geq -1400 \times 10^3 \\
-9x_1 - 20x_2 &\geq -1800 \times 10^3 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

不等式標準形

線形計画問題の不等式標準形

- 目的関数は最小化される

  -1倍して最小化問題に書換える

  $$\text{maximize } 5x_1+4x_2 \Rightarrow \text{minimize } -5x_1-4x_2$$

- 制約式は「左辺に変数と係数≧右辺に定数のみ」

  両辺を-1倍し不等号の向きを揃える

  $$x_1-x_2\le 1 \Rightarrow -x_1+x_2\ge 1$$

  1つの等式制約を2つの不等式制約で置換え

  $$x_1+x_2=1 \Rightarrow x_1+x_2\ge 1,\ -x_1-x_2\ge -1$$

- 全ての変数は非負

  非正変数を-1倍した非負変数で置換える

  $$x_1\le 0 \Rightarrow x_2\ge 0 \qquad (x_2=-x_1)$$

  自由変数を2つの非負変数で置換える

  $$x \Rightarrow x_1,\ x_2\ge 0 \qquad (x=x_1-x_2)$$

全ての線形計画問題を不等式標準形で表すことができる

線形計画問題の**等式**標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数＝右辺に定数のみ」
- 全ての変数は非負
- 変数を加えて不等式→等式に書換える
  - **左辺≦右辺→左辺に不足する分を非負変数で補う**
  - 左辺≧右辺→左辺が過剰な分を非負変数で減らす

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\leq 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 &\leq 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 &\leq 1800 \times 10^3 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

元の問題(演習1課題1)

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800 \times 10^3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

等式標準形

線形計画問題の**等式**標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数＝右辺に定数のみ」
- 全ての変数は非負
- 変数を加えて不等式→等式に書換える
  - 左辺≦右辺→左辺に不足する分を非負変数で補う
  - **左辺≧右辺→左辺が過剰な分を非負変数で減らす**

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} -15x_1 - 11x_2 &\geq -1650 \times 10^3 \\ -10x_1 - 14x_2 &\geq -1400 \times 10^3 \\ -9x_1 - 20x_2 &\geq -1800 \times 10^3 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

不等式標準形

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} -15x_1 - 11x_2 - x_3 &= -1650 \times 10^3 \\ -10x_1 - 14x_2 - x_4 &= -1400 \times 10^3 \\ -9x_1 - 20x_2 - x_5 &= -1800 \times 10^3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

等式標準形

線形計画問題の**等式**標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数**＝**右辺に定数のみ」
- 全ての変数は非負

- 不等式標準形で用いた式変形に加え、
- 変数を追加して、不等式を等式と追加変数の非負条件で置換える
  - 左辺≦右辺→左辺に不足する分を非負変数で補う

$$9x_1 + 20x_2 \le 1800 \qquad 9x_1 + 20x_2 + x_3 = 1800, \quad x_3 \ge 0$$

  - 左辺≧右辺→左辺が過剰な分を非負変数で減らす

$$9x_1 + 20x_2 \ge 1800 \qquad 9x_1 + 20x_2 - x_4 = 1800, \quad x_4 \ge 0$$

※元の不等式の成否は追加された変数の非負条件に対応する。
※ x_3をslack変数、x_4をsurplus変数と呼ぶこともある。

線形計画問題の**等式**標準形

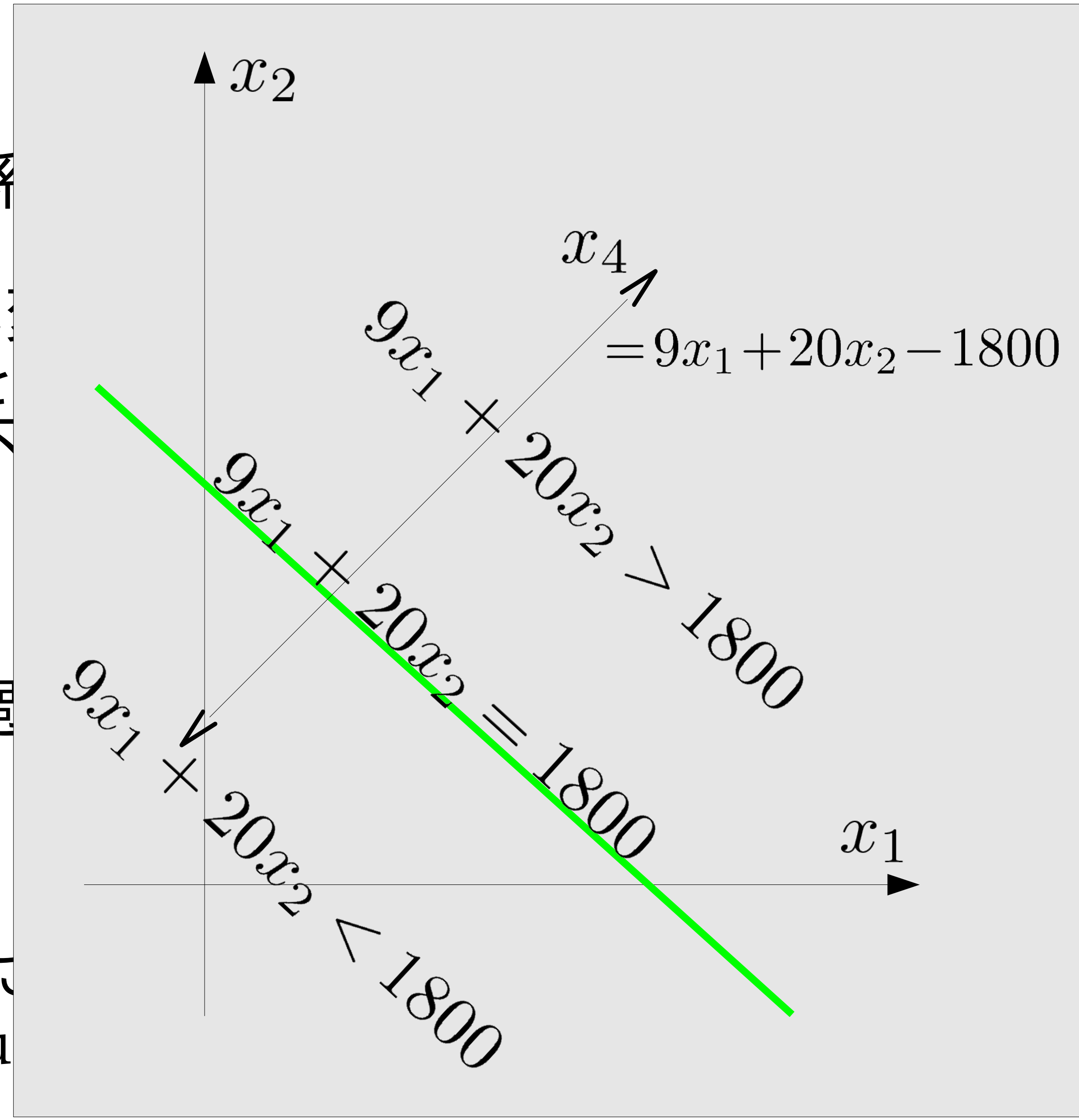
- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係
- 全ての変数は非負
- 不等式標準形で用いた式
- 変数を追加して、不等式を
  - 左辺≦右辺→左辺に不

$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800$$

  - 左辺≧右辺→左辺が過

$$9x_1 + 20x_2 \geq 1800$$

※元の不等式の成否は追加さ
※ x_3をslack変数、x_4をsurplu



等式標準形のもとでの総当たり解法

等式標準形

minimize

$$-5x_1 - 4x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800 \times 10^3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

1.3つの方程式で定まる3変数を選ぶ。
2.連立方程式を解き、変数値を定める。
　例：※ x_1, x_2, x_3,であれば、x_4, x_5を無視して、

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 &= 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 &= 1800 \times 10^3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 1400 \times 10^3/37 \\ x_2 &= 2700 \times 10^3/37 \\ x_3 &= 10350 \times 10^3/37 \end{aligned}$$

3.全ての組合せに対して実行し、最適値・最適解を探す

等式標準形のもとでの総当たり解法

x_1 [×10³]	x_2 [×10³]	x_3 [×10³]	x_4 [×10³]	x_5 [×10³]	条件	目的関数[×10³]
		1650	1400	1800		0
	150		-700	-1200	×	
	100	550		-200	×	
	90	660	140			-360
110			300	810		-550
140		-450		540	×	
200		-1350	-600		×	
77	45			207		-565
4400/67	4050/67		-6900/67		×	
1400/37	2700/37	10350/37				-481.08

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

※元の不等式制約には変数の非負条件が対応するので、
全ての変数が非負の場合だけを考えれば良い

線形計画問題の標準形

等式標準形にもとづく総当たりによる解法

1.等式制約と変数の数に対応して、
全ての組み合わせの連立方程式を解く
2.変数の非負条件を満たす解について目的関数を求める
3.最小（最大）の目的関数値を与える解が最適解となる。

問題点、

・連立方程式の組み合わせ数が爆発的に増加する
・不必要な連立方程式も解く必要がある

次回：単体法
次々回：巡回と最小添字規則

演習問題2

所定の用紙に回答を記入し提出してください。

ミックスジュース5Lの生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題:利益を最大化する2種類のミックスジュースの生産量は?

課題1: 対応する線形計画問題の不等式標準形を示しなさい。

課題2: 不等式標準形を等式標準形に書換えなさい。

課題3: 総当たりによる解法を用いて最適解を求めなさい。

演習問題2 解答例

課題1: 対応する線形計画問題の不等式標準形を示しなさい。

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to
$$
\begin{aligned}
-3x_1 - 1x_2 &\geq -45000 \\
-x_1 - 2x_2 &\geq -40000 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

課題2: 不等式標準形を等式標準形に書換えなさい。

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to
$$
\begin{aligned}
3x_1 + 1x_2 + x_3 &= 45000 \\
1x_1 + 2x_2 + x_4 &= 40000 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

演習問題2 解答例

2つの方程式で定める2つの変数の組合せと式を全て書き出す

課題3: 総当たりによる解法を

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

①

②

③

④

⑤

⑥

$$ {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6 $$

組合せは6通り

演習問題2 解答例

2つの方程式で定める2つの変数の組合せと式を全て書き出す

課題3: 総当たりによる解法を

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

①
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \end{aligned}$$

④

②

⑤

③

⑥

演習問題2 解答例

2つの方程式で定める2つの変数の組合せと式を全て書き出す

課題3: 総当たりによる解法を

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & -600x_1 - 500x_2 \\
\text{subject to} \quad & 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 45000 \\
& 1x_1 + 2x_2 + 1x_4 = 40000 \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

①

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\
1x_1 + 2x_2 &= 40000
\end{aligned}
$$

②

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\
1x_1 + 0x_3 &= 40000
\end{aligned}
$$

③

④

⑤

⑥

演習問題2 解答例

2つの方程式で定める2つの変数の組合せと式を全て書き出す

課題3: 総当たりによる解法を

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned} \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

①
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \end{aligned}$$

②
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

③
$$\begin{aligned} 3x_1 + 0x_4 &= 45000 \\ 1x_1 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

④

⑤

⑥

演習問題2 解答例

2つの方程式で定める2つの変数の組合せと式を全て書き出す

課題3: 総当たりによる解法を

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to
$$
\begin{aligned}
3x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\
1x_1 + 2x_2 + 1x_4 &= 40000
\end{aligned}
\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
$$

①
$$
\begin{aligned}
3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\
1x_1 + 2x_2 &= 40000
\end{aligned}
$$

②
$$
\begin{aligned}
3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\
1x_1 + 0x_3 &= 40000
\end{aligned}
$$

③
$$
\begin{aligned}
3x_1 + 0x_4 &= 45000 \\
1x_1 + 1x_4 &= 40000
\end{aligned}
$$

④
$$
\begin{aligned}
1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\
2x_2 + 0x_3 &= 40000
\end{aligned}
$$

⑤

⑥

演習問題2 解答例

2つの方程式で定める2つの変数の組合せと式を全て書き出す

課題3: 総当たりによる解法を

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned} \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

①
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \end{aligned}$$

④
$$\begin{aligned} 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 2x_2 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

②
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

⑤
$$\begin{aligned} 1x_2 + 0x_4 &= 45000 \\ 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

③
$$\begin{aligned} 3x_1 + 0x_4 &= 45000 \\ 1x_1 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

⑥

演習問題2 解答例

2つの方程式で定める2つの変数の組合せと式を全て書き出す

課題3: 総当たりによる解法を

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \qquad &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 \qquad + 1x_4 &= 40000 \end{aligned} \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

①
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \end{aligned}$$

④
$$\begin{aligned} 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 2x_2 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

②
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

⑤
$$\begin{aligned} 1x_2 + 0x_4 &= 45000 \\ 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

③
$$\begin{aligned} 3x_1 + 0x_4 &= 45000 \\ 1x_1 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

⑥
$$\begin{aligned} 1x_3 + 0x_4 &= 45000 \\ 0x_3 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

演習問題2 解答例

2つの方程式で定める2つの変数の組合せと式を全て書き出す

課題3: 総当たりによる解法を

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \qquad &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 \qquad + 1x_4 &= 40000 \end{aligned} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

①
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \end{aligned}$$

④
$$\begin{aligned} 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 2x_2 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

②
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

⑤
$$\begin{aligned} 1x_2 + 0x_4 &= 45000 \\ 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

③
$$\begin{aligned} 3x_1 + 0x_4 &= 45000 \\ 1x_1 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

⑥
$$\begin{aligned} 1x_3 + 0x_4 &= 45000 \\ 0x_3 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

演習問題2 解答例

方程式の解を求め、非負条件を満たさないものを除く

課題3：総当たりによる解法を

minimize $\quad -600x_1 - 500x_2$

subject to
$$3x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 45000$$
$$1x_1 + 2x_2 + 1x_4 = 40000$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

①
$$3x_1 + 1x_2 = 45000$$
$$1x_1 + 2x_2 = 40000$$
$$x_1 = 10000$$
$$x_2 = 15000$$

②
$$3x_1 + 1x_3 = 45000$$
$$1x_1 + 0x_3 = 40000$$
$$x_1 = 40000$$
$$\cancel{x_3 = -75000}$$

③
$$3x_1 + 0x_4 = 45000$$
$$1x_1 + 1x_4 = 40000$$
$$x_1 = 15000$$
$$x_4 = 25000$$

④
$$1x_2 + 1x_3 = 45000$$
$$2x_2 + 0x_3 = 40000$$
$$x_2 = 20000$$
$$x_3 = 25000$$

⑤
$$1x_2 + 0x_4 = 45000$$
$$2x_2 + 1x_4 = 40000$$
$$x_2 = 45000$$
$$\cancel{x_4 = -50000}$$

⑥
$$1x_3 + 0x_4 = 45000$$
$$0x_3 + 1x_4 = 40000$$
$$x_3 = 45000$$
$$x_4 = 40000$$

演習問題2 解答例

非負条件を満たすものの目的関数値を求め、最適解を見つける

課題3: 総当たりによる解法を

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to $3x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 45000$

$1x_1 + 2x_2 + 1x_4 = 40000 \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

①
$$3x_1 + 1x_2 = 45000$$
$$1x_1 + 2x_2 = 40000$$
目的関数値 $-13,500,000$
$$x_1 = 10000$$
$$x_2 = 15000$$

②
$$3x_1 + 1x_3 = 45000$$
$$1x_1 + 0x_3 = 40000$$
$$x_1 = 40000$$
$$\cancel{x_3 = -75000}$$

③
$$3x_1 + 0x_4 = 45000$$
$$1x_1 + 1x_4 = 40000$$
目的関数値 $-8,000,000$
$$x_1 = 15000$$
$$x_4 = 25000$$

④
$$1x_2 + 1x_3 = 45000$$
$$2x_2 + 0x_3 = 40000$$
目的関数値 $-10,000,000$
$$x_2 = 20000$$
$$x_3 = 25000$$

⑤
$$1x_2 + 0x_4 = 45000$$
$$2x_2 + 1x_4 = 40000$$
$$x_2 = 45000$$
$$\cancel{x_4 = -50000}$$

⑥
$$1x_3 + 0x_4 = 45000$$
$$0x_3 + 1x_4 = 40000$$
目的関数値 0
$$x_3 = 45000$$
$$x_4 = 40000$$