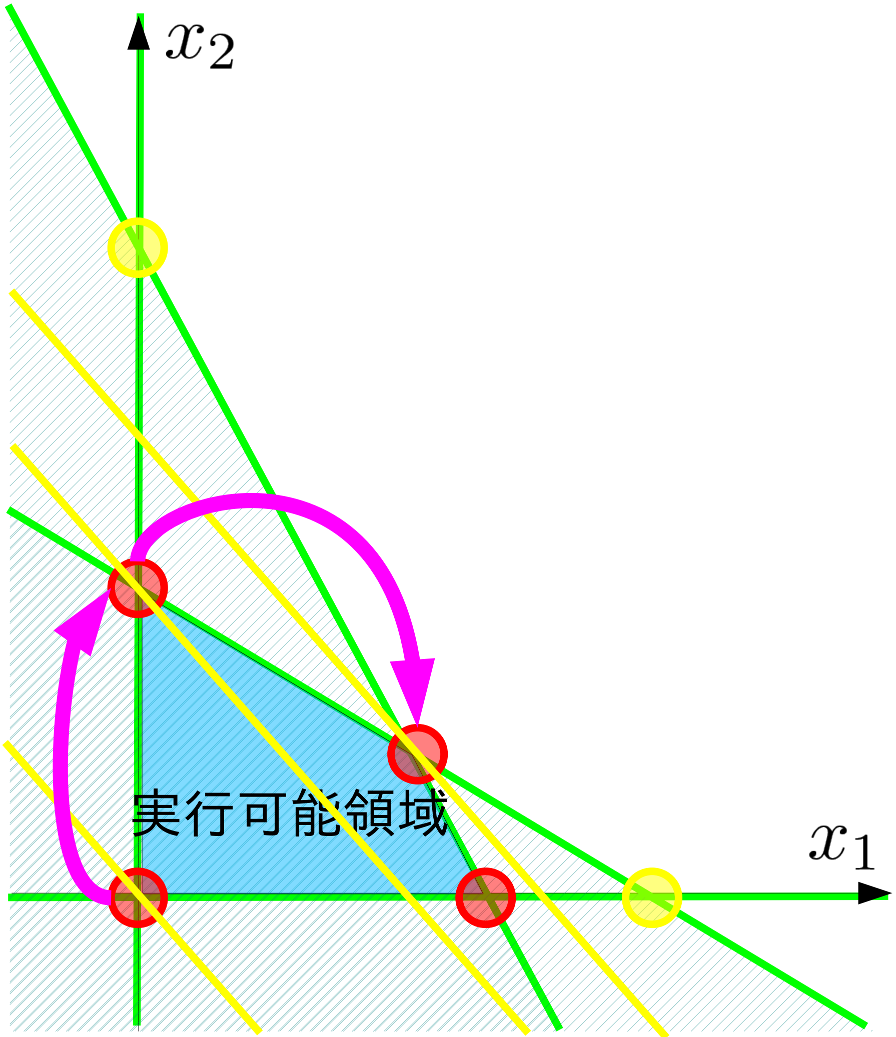
数理計画法

第5回：単体法の2段解法
（初期基本解の決定方法）

前回授業内容の復習

復習：単体法



1. 実行可能領域の端点を1つ見つけ出発点とする
2. 目的関数を改善する隣の端点を実行可能領域から見つけ、次の点とする
3. 端点の改善を繰り返し、それ以上の改善を望めない端点を見つける
4. 辿りついた端点を最適解とする

復習:演習問題4
解答用紙左上に名前･学年･学籍番号を記入

5Lのミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題:利益を最大化するミックスジュースの生産量は?

課題1: simplex 表による単体法を用いて最適解を求めなさい。

課題2: グラフを描き、課題1で辿った端点の経路を示しなさい。

課題3:授業の感想･意見があれば書いてください

復習:演習問題4
解答用紙左上に名前·学年·学籍番号を記入

5Lのミックスジュース生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題:利益を最大化するミックスジュースの生産量は?

トロピカル: $x_1 \times 5$[L]
フレッシュ: $x_2 \times 5$[L]
maximize
$$600x_1 + 500x_2$$
subject to
$$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

る単体法を
課題1で辿っ
見があれば

等式標準形
minimize
$$z(= -600x_1 - 500x_2)$$
subject to
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$
$$z + 600x_1 + 500x_2 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

復習:単体法

- 等式標準形に対応する simplex 表を準備する

等式標準形
minimize
$$z(= -600x_1 - 500x_2)$$
subject to
$$3x_1 + \ \ x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$
$$z + 600x_1 + 500x_2 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- simplex 表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45×10^3	
0	1	2	0	1	40×10^3	
1	600	500	0	0	0	

復習:単体法

5変数、3制約式の等式標準形

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45×10^3	
0	1	2	0	1	40×10^3	
1	600	500	0	0	0	

5-3=2変数を無視すれば連立方程式を解くことができる

$$
\begin{aligned}
3x_1 \quad + x_2 + x_3 \qquad &= 45\times10^3 \\
x_1 \quad + 2x_2 \qquad + x_4 &= 40\times10^3 \\
z + 600x_1 + 500x_2 \qquad\qquad &= 0
\end{aligned}
$$

復習:単体法

5変数、3制約式の等式標準形

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45×10^3	
0	1	2	0	1	40×10^3	
1	600	500	0	0	0	

5-3=2変数を無視すれば連立方程式を解くことができる

$$\begin{aligned} 3x_1 \quad +x_2 &= 45\times10^3 \\ x_1 \quad +2x_2 &= 40\times10^3 \\ z+600x_1+500x_2 &= 0 \end{aligned}$$

復習:単体法

5変数、3制約式の等式標準形

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45×10^3	
0	1	2	0	1	40×10^3	
1	600	500	0	0	0	

5-3=2変数を無視すれば連立方程式を解くことができる

$$
\begin{aligned}
3x_1 \qquad\qquad\qquad &= 45\times10^3 \\
x_1 \qquad\qquad +x_4 &= 40\times10^3 \\
z+600x_1 \qquad\qquad\qquad &= 0
\end{aligned}
$$

復習:単体法

5変数、3制約式の等式標準形

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45×10^3	
0	1	2	0	1	40×10^3	
1	600	500	0	0	0	

5-3=2変数を無視すれば連立方程式を解くことができる

$$
\begin{aligned}
+x_3 \quad &= 45 \times 10^3 \\
+x_4 &= 40 \times 10^3 \\
z \quad &= 0
\end{aligned}
$$

復習:単体法

5変数、3制約式の等式標準形

z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45×10³	
0	1	2	0	1	40×10³	
1	600	500	0	0	0	

5-3=2変数を無視すれば連立方程式を解くことができる

$$\begin{aligned} &+x_3 &&= 45\times 10^3 \\ &+x_4 &&= 40\times 10^3 \\ z & &&= 0 \end{aligned}$$

無視した変数：非基底変数、残りの変数を基底変数

基本解として x_1, x_2 を座標軸にとった原点を考える。

→ z, x_3, x_4 を基底変数、 x_1, x_2 を非基底変数とする

$$(z, x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 45\times 10^3, 40\times 10^3)$$

※ 基本解が実行可能(＝全ての変数が非負)であることを確認する

復習:単体法

- 実行可能領域の境界を辿り、目的関数を増加させる隣の基本解を探す

※ 隣の基本解→基底変数、非基底変数を1つずつ交換した基本解

非基底変数→基底変数とした場合に目的関数を減少させる変数を選ぶ
→目的関数の制約式において正の係数を持つ非基底変数を選ぶ

① ※ 複数の候補がある場合は?→一概には言えない
ここでは大きな係数を持つ変数を選ぶ

③

z	x_1 非	x_2 非	x_3 非	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45×10^3	$/3=15\times10^3$ ②
0	1	2	0	1	40×10^3	$/1=40\times10^3$
1	① 600	500	0	0	0	

※ 非基底変数となることで、基本解における変数の値は 0 となる
→その分だけ基底変数となる変数(今回は x_1)が変化する

※基底変数となる変数の変化量を求める
② →係数で定数欄の値を割り、最大変化量を求める
③ →最小の最大変化量を与える制約式に関わる変数を選ぶ
(基底変数→非基底変数とする)

復習:単体法

新しい基底変数からなる連立方程式を解き基本解を求める
→基底変数の係数が 1 となるように掃き出し操作をする

z	x_1	x_2 非	x_3 非	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45×10^3	
0	1	2	0	1	40×10^3	
1	600	500	0	0	0	

$\times 1/3$

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 + x_3 &= 45\times10^3 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 &= 40\times10^3 \\
z + 600x_1 + 500x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

z	x_1	x_2 非	x_3 非	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15×10^3	
0	1	2	0	1	40×10^3	
1	600	500	0	0	0	

$-\times 1$

$-\times 600$

復習:単体法

新しい基底変数からなる連立方程式を解き基本解を求める
→基底変数の係数が 1 となるように掃き出し操作をする

$-\times 1$

z	x_1	x_2 非	x_3 非	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15×10^3	
0	1	2	0	1	40×10^3	
1	600	500	0	0	0	

$-\times 600$

z	x_1	x_2 非	x_3 非	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	5/3	-1/3	1	25000	
1	0	300	-200	0	-9000000	

$$\begin{aligned} x_1 \quad + \tfrac{1}{3}x_2 \quad + \tfrac{1}{3}x_3 \qquad\quad &= 15 \times 10^3 \\ + \tfrac{5}{3}x_2 \quad - \tfrac{1}{3}x_3 + x_4 &= 25 \times 10^3 \\ z \quad + 300x_2 - 200x_3 \qquad\quad &= -9 \times 10^6 \end{aligned}$$

※ 基本解が実行可能(=全ての変数が非負)であることを確認する

復習:単体法

次の基底変数・非基底変数の交換を考える

z	x_1	x_2 ~~非~~	x_3 非	x_4 非	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	$/\frac{1}{3}=45\times10^3$
0	0	5/3	-1/3	1	25000	$/\frac{5}{3}=15\times10^3$
1	0	300	-200	0	-9000000	

正係数を持つ非基底変数は唯1つ→ x_2 を基底変数に変更

最小の最大増加量を与えるのは2段目→ x_4 を非基底変数に変更

$\times 3/5$ (2段目)

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	5/3	-1/3	1	25000	
1	0	300	-200	0	-9000000	

$-\times\frac{1}{3}$ (1段目)

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	1	-1/5	3/5	15000	
1	0	300	-200	0	-9000000	

$-\times 300$ (3段目)

復習:単体法

基本解を求める

$-\times\frac{1}{3}$

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4 非	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	1	-1/5	3/5	15000	
1	0	300	-200	0	-9000000	

$-\times 300$

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4 非	定数	最大増加量
0	1	0	2/5	-1/5	10000	
0	0	1	-1/5	3/5	15000	
1	0	0	-140	-180	-13500000	

正係数を持つ非基底変数は存在しない→最適解