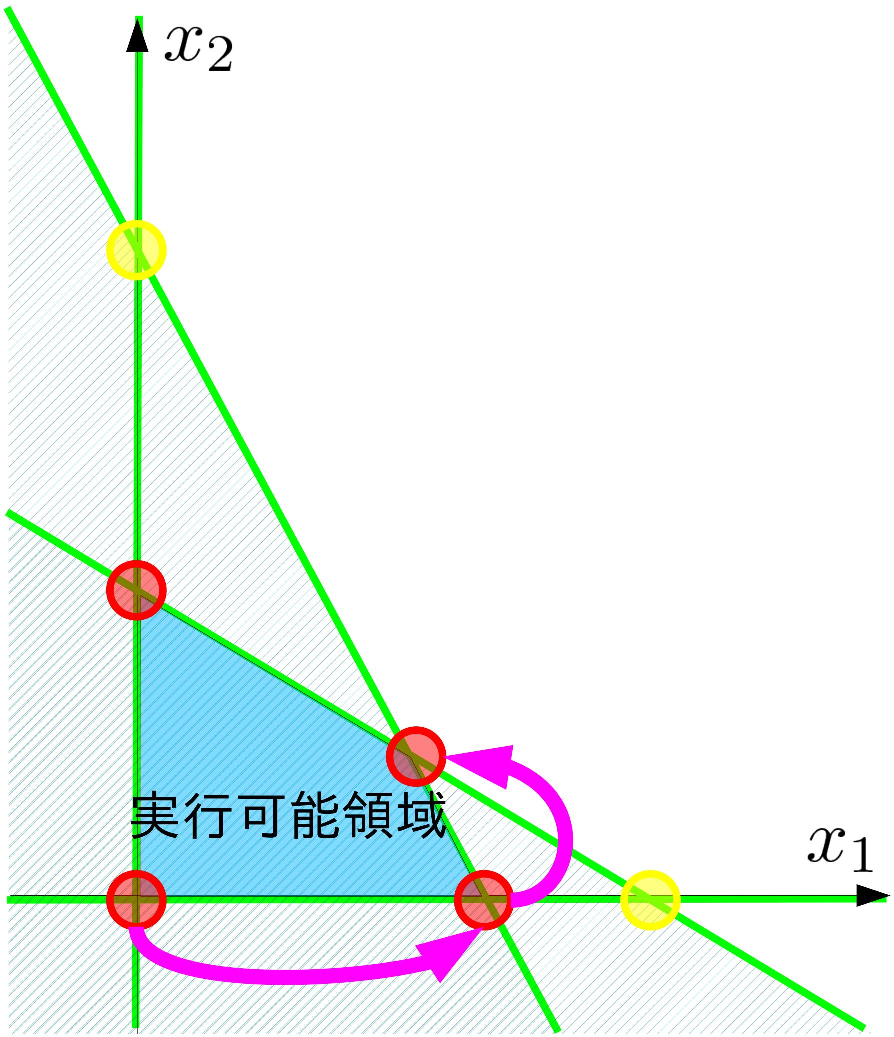
第5回：単体法の2段解法
(初期基本解の決定方法)

復習:単体法

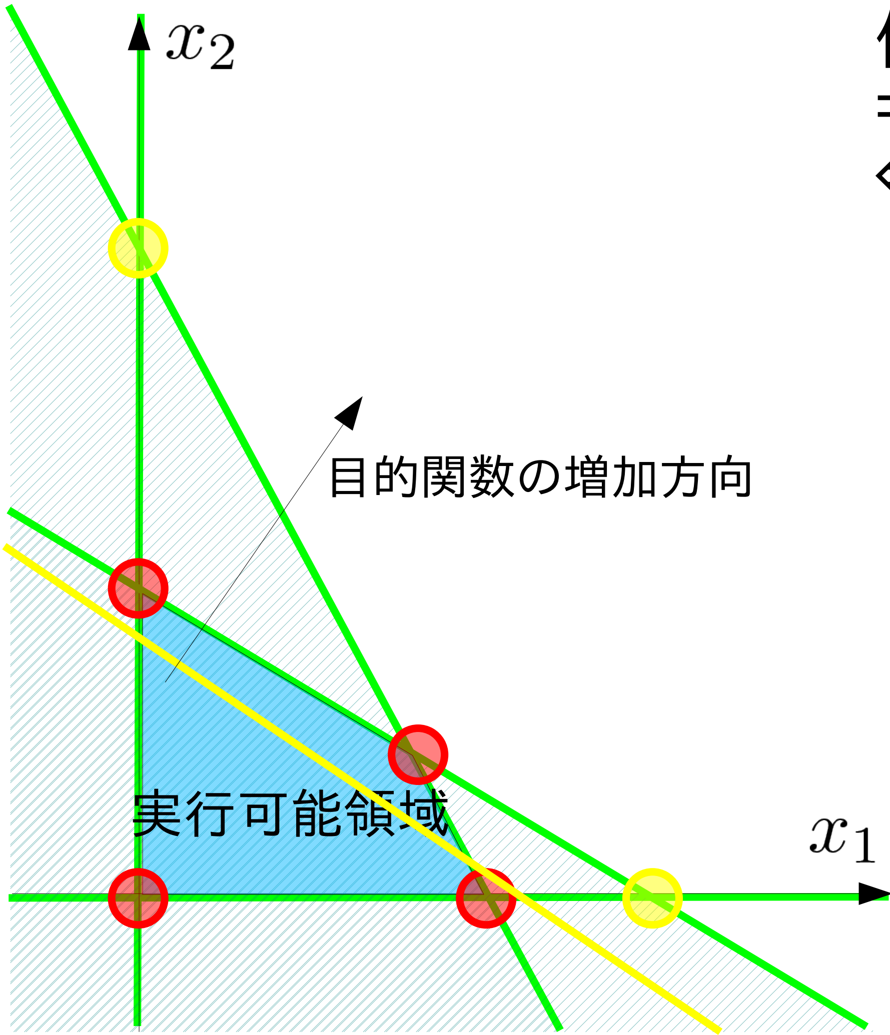


z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4	定数
0	3	1	1	0	45×10^3
0	1	2	0	1	40×10^3
1	600	500	0	0	0

z	x_1	x_2 非	x_3 非	x_4	定数
0	1	1/3	1/3	0	15000
0	0	5/3	-1/3	1	25000
1	0	300	-200	0	-9000000

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4 非	定数
0	1	0	2/5	-1/5	10000
0	0	1	-1/5	3/5	15000
1	0	0	-140	-180	-13500000

初期基本解の決定法



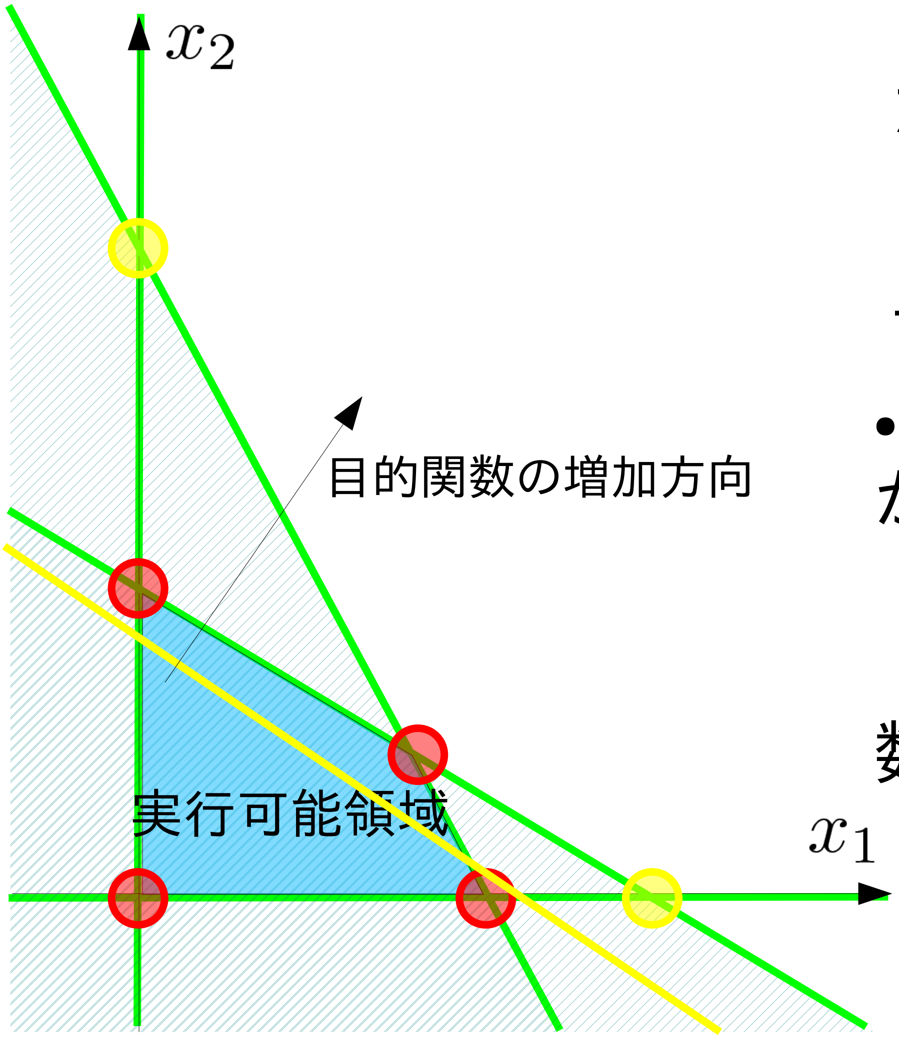
ここまでの例では原点から出発する単体法が使えた
⇒原点が実行可能領域に有る
⇔全ての変数がゼロでも制約を満たす

（不等式制約の場合）

maximize
$600x_1 + 500x_2$
subject to
$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$
$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$
$x_1, x_2 \geq 0$

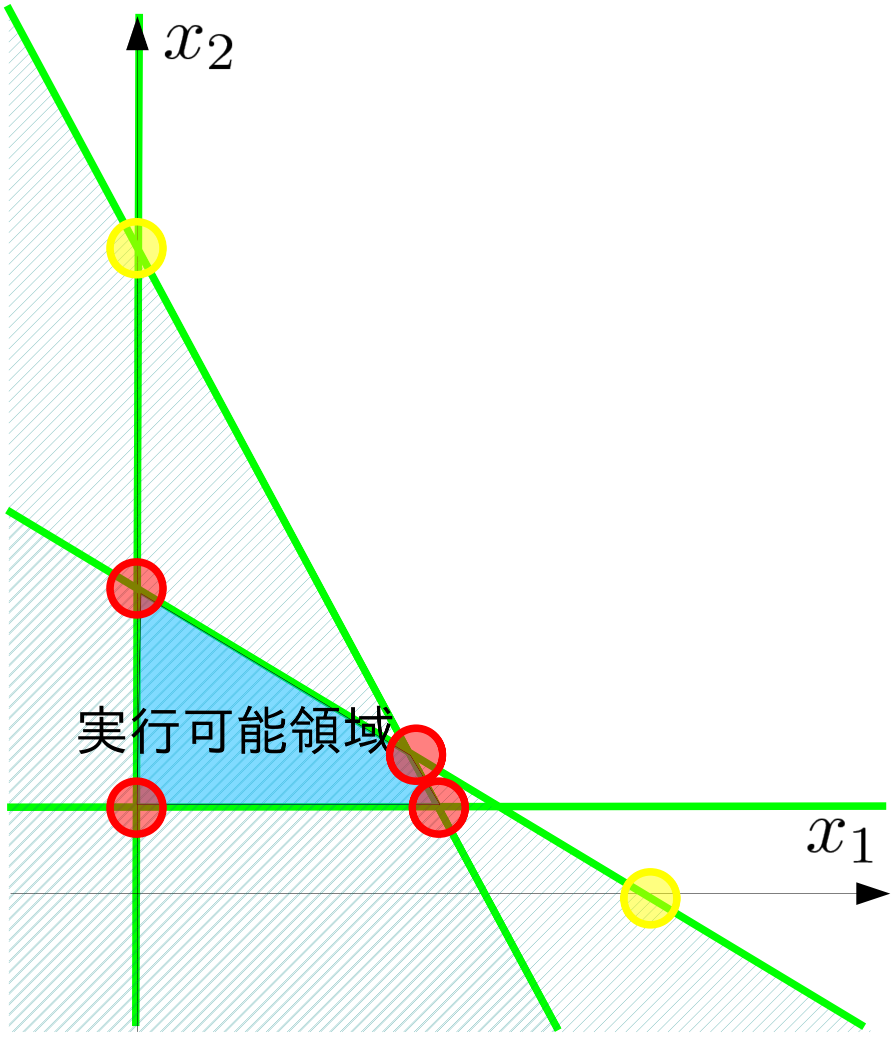
$x_1 = x_2 = 0$ でも制約式は満たされる
⇔原点は実行可能解

初期基本解の決定法



- 不等式標準形において、
  原点が実行可能領域中にある
  ためには、不等式制約
  $a_1x_1+a_2x_2+\ldots\geqq b$
  を $x_1=x_2=\ldots=0$ で満たす必要がある
  すなわち、定数は負になる。
- 等式標準形では、座標軸となる変数が全てゼロで制約を満たす必要がある
  $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+cy=b$
  であれば、座標軸でない変数 y の係数 c と定数 b の符号が一致する。

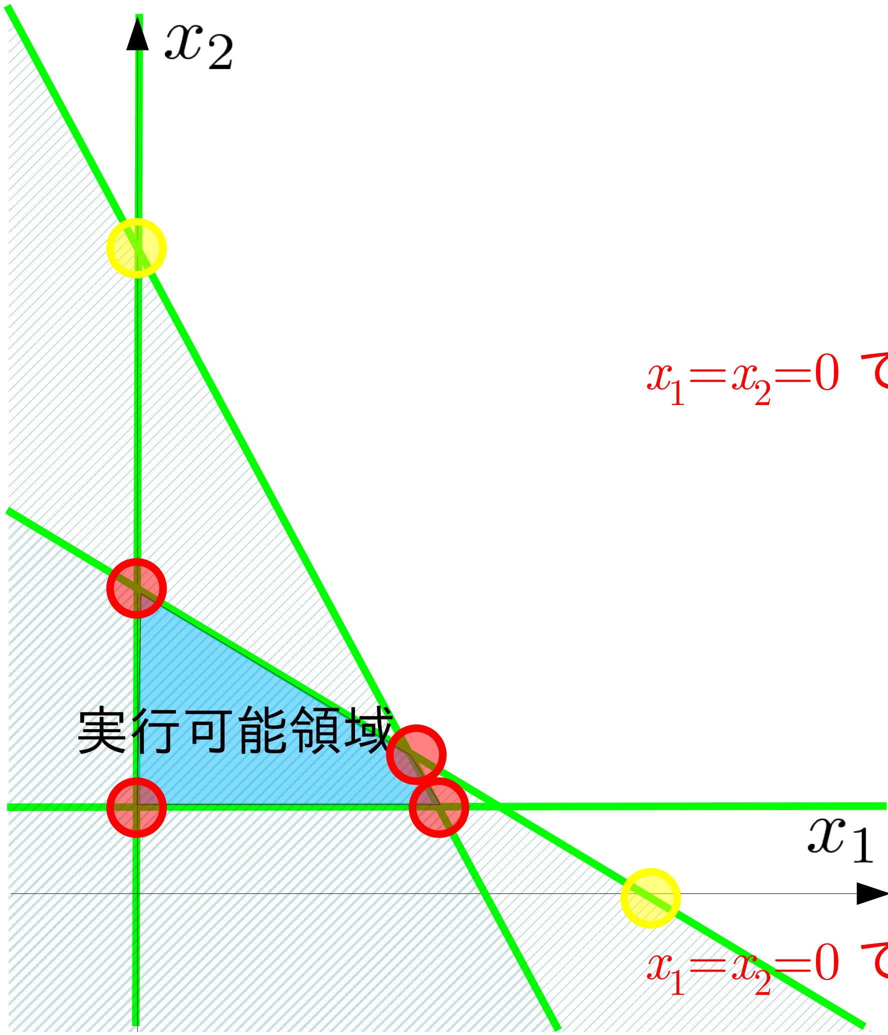
初期基本解の決定法



- 原点が実行可能領域に無い

maximize
$$600x_1 + 500x_2$$
subject to
$$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_2 \geq 10 \times 10^3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

初期基本解の決定法



•不等式標準形

$$
\begin{aligned}
&\texttt{minimize} -600x_1 - 500x_2\\
&\texttt{subject to}\\
&-3x_1 - x_2 \geq -45\times 10^3\\
&-x_1 - 2x_2 \geq -40\times 10^3\\
&\qquad\qquad x_2 \geq 10\times 10^3\\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

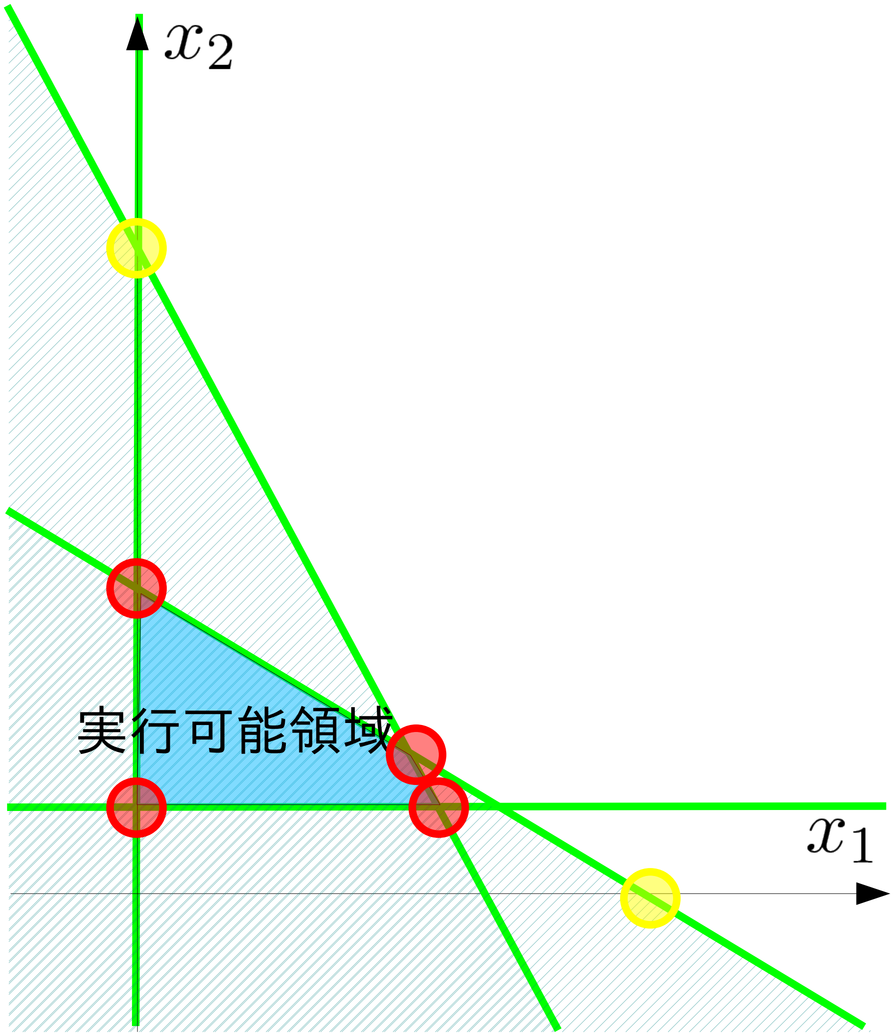
$x_1 = x_2 = 0$ で満たせない式

•等式標準形

$$
\begin{aligned}
&\texttt{minimize} -600x_1 - 500x_2\\
&\texttt{subject to}\\
&3x_1 + x_2 + x_3 = 45\times 10^3\\
&x_1 + 2x_2 + x_4 = 40\times 10^3\\
&\qquad\qquad x_2 \boxed{-} x_5 = 10\times 10^3\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

$x_1 = x_2 = 0$ で満たせない式

初期基本解の決定法



•原点が実行可能領域に無い
⇒全ての変数がゼロでは満たされない制約がある

左図の例では

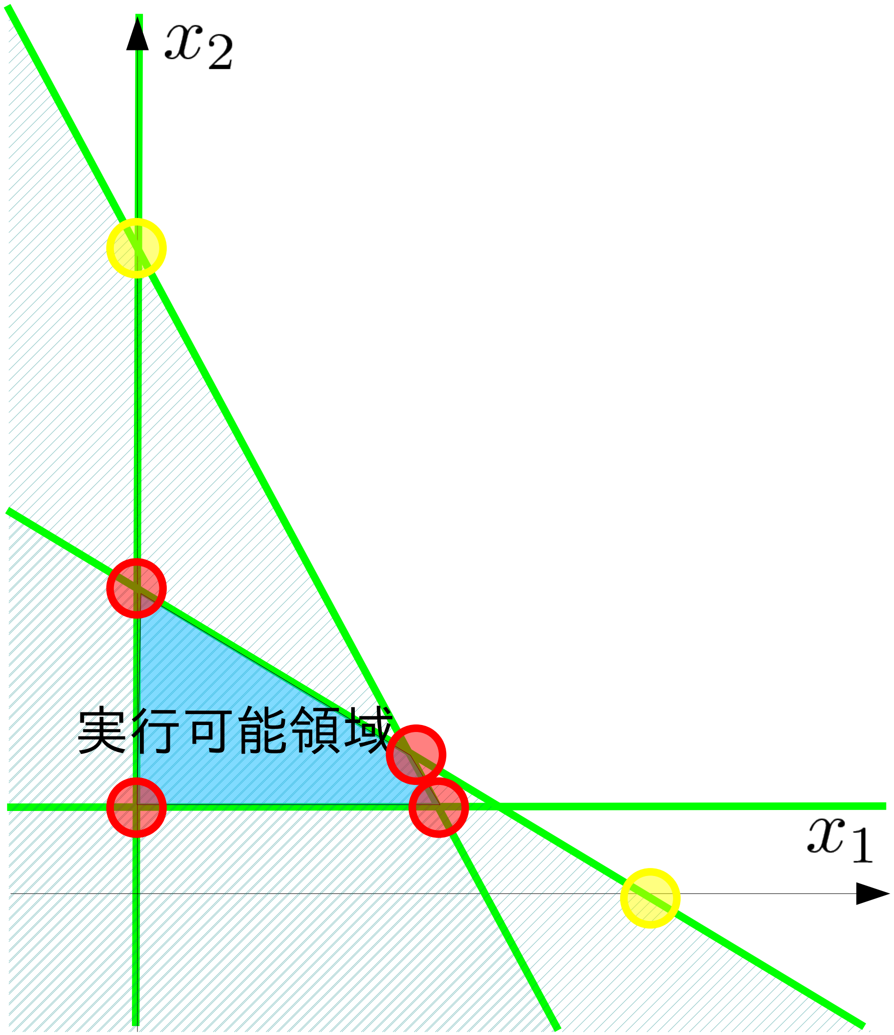
$$x_2 \geq 10 \times 10^3$$

•不等式標準形において、定数が正の制約式

•等式標準形において、グラフの座標軸とならない変数(slack変数、surplus変数)の係数と定数の符号が異なる制約式

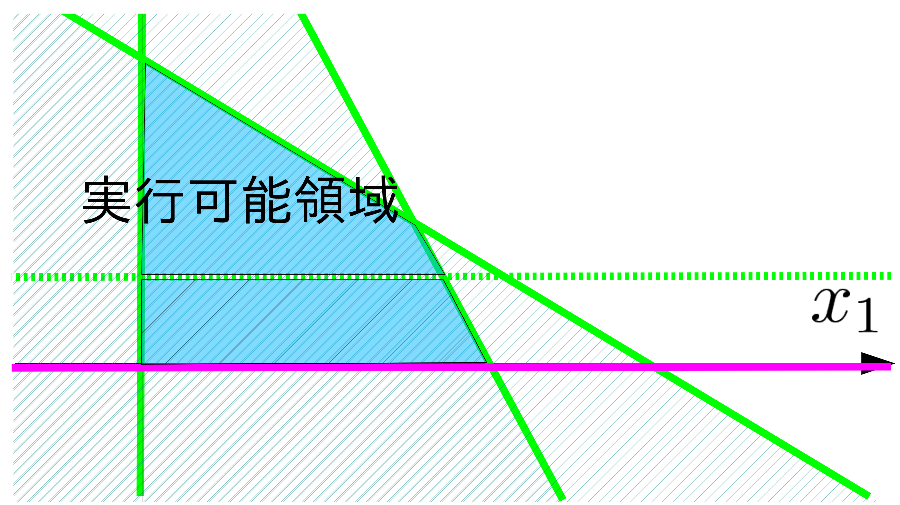
$$x_2 - x_5 = 10 \times 10^3$$

初期基本解の決定法



2段階単体法のアイディア

- 原点が実行可能解でなくなる原因となる制約式に変数を加え実行可能領域を広げる
- 元の実行可能領域の端で最小となる目的関数を定め、単体法で端点を求める



2段階単体法

原点を実行可能領域に含む人工線形計画問題を作り
人工問題の最適解から元の問題の初期解を得る。

等式標準形

minimize

$$z = -6x_1 + 6x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 \phantom{{}+x_3} &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

人工問題の等式標準形

minimize

$$z = \boxed{x_5 + x_6}$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \phantom{{}+x_5} &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 \phantom{{}+x_3} \boxed{+x_5} &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 \boxed{+x_6} &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \boxed{x_5, x_6} \geq 0$$

人工問題は z, x_3, x_5, x_6 を基底変数、 x_1, x_2, x_4 を非基底変数とした基本解を実行可能領域に含む。→ (x_1, x_2) の原点から単体法を実行できる。
人工問題の最適解が $z = 0 \Rightarrow x_5 = x_6 = 0$ であれば、その基本解は元の問題で実行可能領域に含まれる。

2段階単体法

原点を実行可能領域に含む人工線形計画問題を作り
人工問題の最適解から元の問題の初期解を得る。

1段目の単体法

人工問題の等式標準形
minimize

$$z = \boxed{x_5 + x_6}$$

subject to

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad &= 6\\
-5x_1 + 9x_2 \quad \boxed{+x_5} &= 15\\
-6x_1 + 3x_2 - x_4 \boxed{+x_6} &= 3\\
z - x_5 - x_6 &= 0\\
x_1, x_2, x_3, x_4, \boxed{x_5, x_6} &\geq 0
\end{aligned}$$

この問題から直接simplex表を作るとうまくいかない。
$\because x_5$ とx_6 が 目的関数の式に含まれるので、連立方程式が解けていない
そこで、制約式から得られる関係式

$$x_5 = 5x_1 - 9x_2 + 15$$
$$x_6 = 6x_1 - 3x_2 + x_4 + 3$$

を使い目的関数からx_5 とx_6 を消去する

人工問題は z, x_3, x_5, x_6 を基底変数、 x_1, x_2, x_4 を非基底変数とした基本解を実行可能領域に含む。→ (x_1, x_2) の原点から単体法を実行できる。
人工問題の最適解が $z = 0 \Rightarrow x_5 = x_6 = 0$ であれば、その基本解は元の問題で実行可能領域に含まれる。

2段階単体法

原点を実行可能領域に含む人工線形計画問題を作り
人工問題の最適解から元の問題の初期解を得る。

1段目の単体法

人工問題の等式標準形
minimize
$z(= x_5 + x_6)$
subject to

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & = 6 \\
 & -5x_1 & +9x_2 & & \boxed{+x_5} & = 15 \\
 & -6x_1 & +3x_2 & -x_4 & \boxed{+x_6} & = 3 \\
z & -11x_1 & +12x_2 & -x_4 & & = 18
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$\longrightarrow x_5 = 5x_1 - 9x_2 + 15$$

$$\longrightarrow x_6 = 6x_1 - 3x_2 + x_4 + 3$$

$$z - x_5 - x_6 =$$
$$z - (11x_1 - 12x_2 + x_4 + 18)$$

人工問題は z, x_3, x_5, x_6 を基底変数、 x_1, x_2, x_4 を非基底変数とした基本解を
実行可能領域に含む。→ (x_1, x_2) の原点から単体法を実行できる。
人工問題の最適解が $z = 0 \Rightarrow x_5 = x_6 = 0$ であれば、その基本解は元の問題で
実行可能領域に含まれる。

初期のsimplex表

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	定数
0	2	3	1	0	0	0	6
0	-5	9	0	0	1	0	15
0	-6	3	0	-1	0	1	3
1	-11	12	0	-1	0	0	18

終了時のsimplex表

基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	定数
0	1	0	3/11	0	-1/11	0	3/11
0	0	0	-13/11	1	8/11	-1	9/11
0	0	1	5/33	0	2/33	0	20/11
1	0	0	0	0	-1	-1	0

こうして得た人工問題の基本解は元の問題の実行可能領域の端点になっている。さらに目的関数を元に戻して、simplex 法を実行することで、元の問題の最適解を得ることができる。

- 最初のsimplex表

z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	x_6	定数	最大増加量
0	2	3	1	0	0	0	6	
0	-5	9	0	0	1	0	15	
0	-6	3	0	-1	0	1	3	
1	-11	12	0	-1	0	0	18	

- 最初の基本解
  非基底変数: $(x_1, x_2, x_4) = (0, 0, 0)$
  基底変数: $(z, x_3, x_5, x_6) = (18, 6, 15, 3)$

- 制約式を満たす＝非負条件を満たす

z	x_1 非	x_2 ~~非~~	x_3	x_4 非	x_5	x_6 非	定数	最大増加量
0	2	3	1	0	0	0	6	$/3 = 2$
0	-5	9	0	0	1	0	15	$/9 = 5/3$
0	-6	3	0	-1	0	1	3	$/3 = 1$
1	-11	12	0	-1	0	0	18	

- 連立方程式を解く

	z	x_1 非	x_2	x_3	x_4 非	x_5	x_6 非	定数	最大増加量
	0	2	3	1	0	0	0	6	
	0	-5	9	0	0	1	0	15	
$\times 1/3$	0	-6	3	0	-1	0	1	3	
	1	-11	12	0	-1	0	0	18	

	z	x_1 非	x_2	x_3	x_4 非	x_5	x_6 非	定数	最大増加量
$-\times 3$	0	2	3	1	0	0	0	6	
$-\times 9$	0	-5	9	0	0	1	0	15	
	0	-2	1	0	-1/3	0	1/3	1	
$-\times 12$	1	-11	12	0	-1	0	0	18	

z	x_1 非	x_2	x_3	x_4 非	x_5	x_6 非	定数	最大増加量
0	8	0	1	1	0	-1	3	
0	13	0	0	3	1	-3	6	
0	-2	1	0	-1/3	0	1/3	1	
1	13	0	0	3	0	-4	6	

- 制約式を満たす＝非負条件を満たす

- 変数の交換

z	x_1 ~~非~~	x_2	x_3 非	x_4 非	x_5	x_6 非	定数	最大増加量
0	8	0	1	1	0	-1	3	$/8=3/8$
0	13	0	0	3	1	-3	6	$/13=6/13$
0	-2	1	0	-1/3	0	1/3	1	$/-2=-1/2$
1	13	0	0	3	0	-4	6	

	z	x_1	x_2	x_3 非	x_4 非	x_5	x_6 非	定数	最大増加量
$\times 1/8$	0	8	0	1	1	0	-1	3	
	0	13	0	0	3	1	-3	6	
	0	-2	1	0	-1/3	0	1/3	1	
	1	13	0	0	3	0	-4	6	

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4 非	x_5	x_6 非	定数	最大増加量
0	1	0	1/8	1/8	0	-1/8	3/8	
0	0	0	-13/8	11/8	1	-11/8	9/8	
0	0	1	1/4	-1/12	0	1/12	7/4	
1	0	0	-13/8	11/8	0	-19/8	9/8	

- 制約式を満たす＝非負条件を満たす

- 変数の交換

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4 ~~非~~	x_5 非	x_6 非	定数	最大増加量
0	1	0	1/8	1/8	0	-1/8	3/8	$\times 8 = 3$
0	0	0	-13/8	11/8	1	-11/8	9/8	$/\frac{11}{8} = 9/11$
0	0	1	1/4	-1/12	0	1/12	7/4	
1	0	0	-13/8	11/8	0	-19/8	9/8	

	z	x_1	x_2	x_3 非	x_4	x_5 非	x_6 非	定数	最大増加量
	0	1	0	1/8	1/8	0	-1/8	3/8	
$\times 8/11$	0	0	0	-13/11	1	8/11	-1	9/11	
	0	0	1	1/4	-1/12	0	1/12	7/4	
	1	0	0	-13/8	11/8	0	-19/8	9/8	

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4	x_5 非	x_6 非	定数	最大増加量
0	1	0	3/11	0	-1/11	0	3/11	
0	0	0	-13/11	1	8/11	-1	9/11	
0	0	1	5/33	0	2/33	0	20/11	
1	0	0	0	0	-1	-1	0	

- 制約式を満たす＝非負条件を満たす

- 1段目の単体法が完了し、人工問題の最適解が求まる

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4	x_5 非	x_6 非	定数	最大増加量
0	1	0	3/11	0	-1/11	0	3/11	
0	0	0	-13/11	1	8/11	-1	9/11	
0	0	1	5/33	0	2/33	0	20/11	
1	0	0	0	0	-1	-1	0	

- 最適解は元の問題の端点を成す

人工問題の等式標準形

minimize

$$z$$

subject to

$$\begin{aligned}
2x_1 &+ 3x_2 + x_3 &&= 6\\
-5x_1 &+ 9x_2 + x_5 &&= 15\\
-6x_1 &+ 3x_2 - x_4 + x_6 &&= 3\\
z - 11x_1 &+ 12x_2 - x_4 &&= 18
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

等式標準形

minimize

$$z = -6x_1 + 6x_2$$

subject to

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6\\
-5x_1 + 9x_2 &= 15\\
-6x_1 + 3x_2 - x_4 &= 3
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

演習問題5

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{subject to} \quad & -x_1 - x_2 \geq -1 \\
& x_1 + x_2 \geq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

課題1: グラフを描き、原点が実行可能領域ではないことを確認してください。

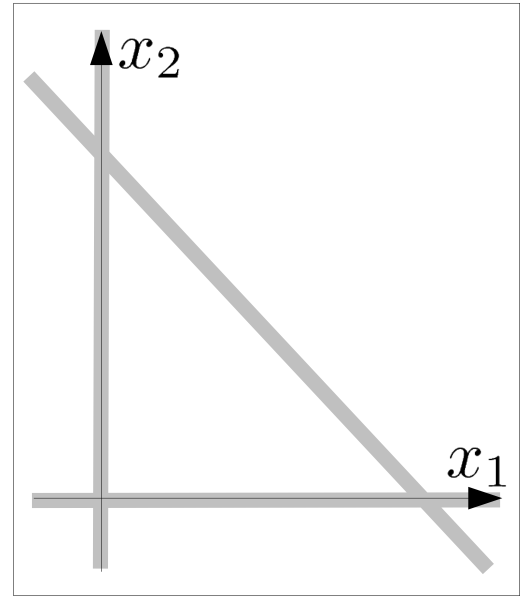
課題2: 2段階 simplex 法の第1段階を用いて実行可能領域の端点を見つけてください。

hint　2段階 simplex 法の第1段階では、
1. 等式標準形を導く
2. 正の係数の slack 変数を持たない制約式に人工変数を追加する
3. 人工変数に負の係数をつけて加えた人工目的関数の最大化問題を解く

という手順が必要です。

復習:演習問題5

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} & -x_1 - x_2 \geq -1 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



課題1: グラフを描き、原点が実行可能領域ではないことを確認する。

課題2: 2段階 simplex 法の第1段階を用いて実行可能領域の端点を見つける。

復習:演習問題5

等式標準形

minimize z

subject to

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad +x_2+x_3 &= 1\\
x_1 \quad +x_2-x_4 &= 1\\
z-x_1-2x_2 \qquad &= 0\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

人工問題

minimize $z(= x_5)$

subject to

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3 \qquad\qquad &= 1\\
x_1+x_2-x_4+x_5 &= 1\\
z \qquad\qquad\qquad -x_5 &= 0\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

課題1: グラフを描き、原点が実行可能領域ではないことを確認する。

課題2: 2段階 simplex 法の第1段階を用いて実行可能領域の端点を見つける。

復習:演習問題5

- 人工問題の等式標準形からsimplex 表を準備する

人工問題

minimize $z(=x_5)$

$= -x_1 - x_2 + x_4 + 1$

subject to

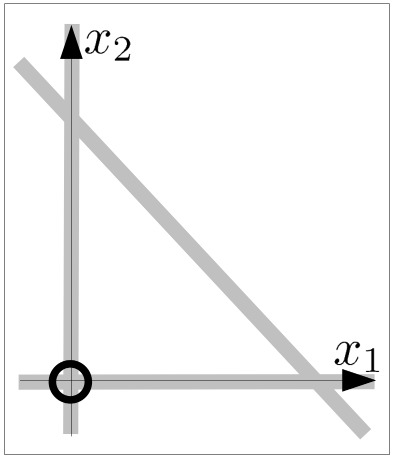
$$
\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3 \qquad\qquad &= 1\\
x_1+x_2 \qquad -x_4+x_5 &= 1\\
z+x_1+x_2 \qquad -x_4 \qquad &= 1\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

- simplex 表

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数	最大増加量
1	1	1	0	0	1	
1	1	0	−1	1	1	
1	1	0	−1	0	1	

復習：演習問題5

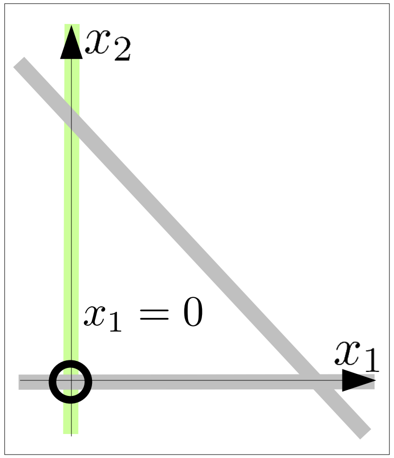
z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	−1	1	1	
1	1	1	0	−1	0	1	



$$z = 1, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1$$

復習:演習問題5

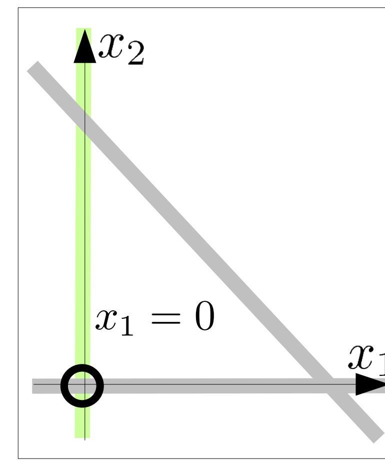
z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	−1	1	1	
1	1	1	0	−1	0	1	



$$z = 1, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1$$

復習:演習問題5

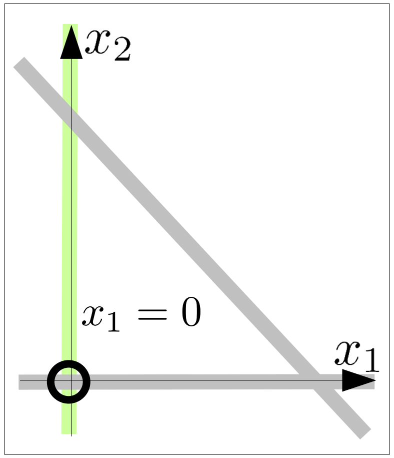
z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	$/1=1$
0	1	1	0	-1	1	1	$/1=1$
1	1	1	0	-1	0	1	



$$z=1, x_1=0, x_2=0, x_3=1, x_4=0, x_5=1$$

復習:演習問題5

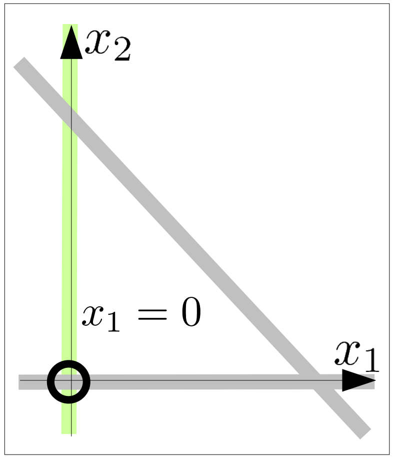
z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	$/1 = 1$
0	1	1	0	-1	1	1	$/1 = 1$
1	1	1	0	-1	0	1	



$$z = 1, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1$$

復習：演習問題5

z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	$/1 = 1$
0	1	1	0	-1	1	1	$/1 = 1$
1	1	1	0	-1	0	1	

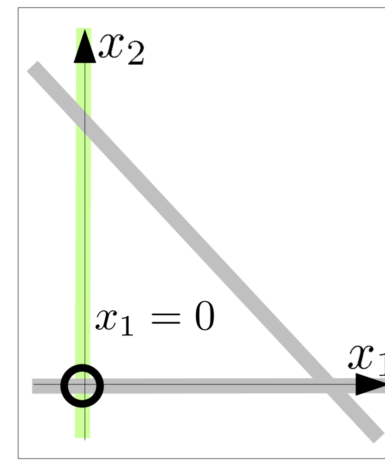


$$z = 1, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1$$

復習:演習問題5

z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	$/1 = 1$
0	1	1	0	-1	1	1	$/1 = 1$
1	1	1	0	-1	0	1	

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 1 \\
x_1 + x_2 \quad - x_4 + x_5 &= 1 \\
z + x_1 + x_2 \quad - x_4 \quad &= 1
\end{aligned}
$$



$$z = 1, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1$$

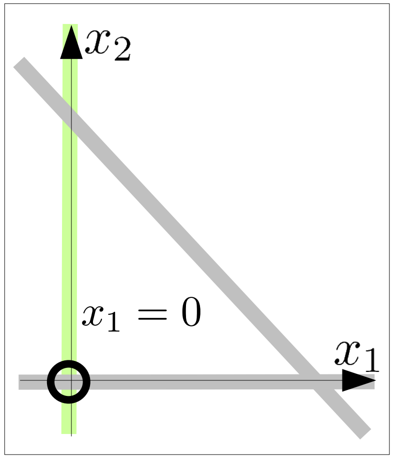
復習:演習問題5

z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	−1	1	1	
1	1	1	0	−1	0	1	

$-\times 1$

$-\times 1$

$$
\begin{array}{rl}
-\times 1 \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
-\times 1 \quad & x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\
& z + x_1 + x_2 - x_4 = 1
\end{array}
$$



$$z = 1, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1$$

復習:演習問題5

z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	$-\times 1$ 1	1	1	0	0	1	
0	1	-1 1	-1 0	−1	1	-1 1	
1	1	-1 1	-1 0	−1	0	-1 1	

$-\times 1$

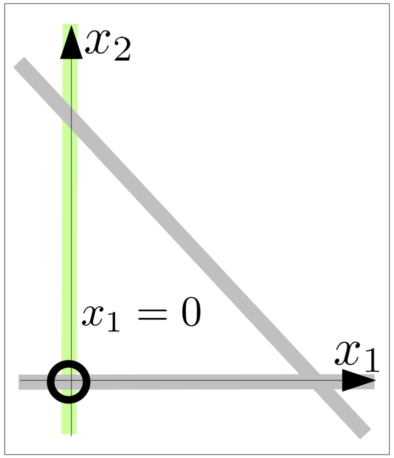
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$-\times 1$ $\quad -x_1 \quad -x_2 \quad -x_3 \quad -1$

$$x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1$$

$-\times 1$ $\quad -x_1 \quad -x_2 \quad -x_3 \quad -1$

$$z + x_1 + x_2 - x_4 = 1$$



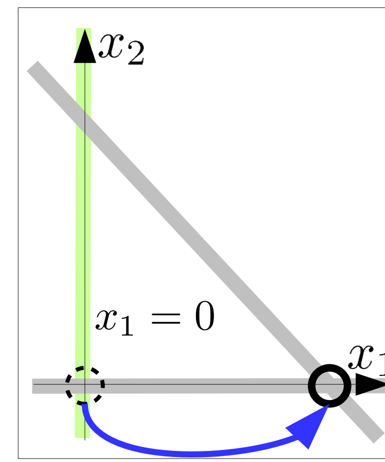
$$z = 1, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1$$

復習：演習問題5

z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	$-\times 1$ 1	1	1	0	0	1	
0	1	-1 1	-1 0	-1	1	-1 1	
1	1	-1 1	-1 0	-1	0	-1 1	

$-\times 1$

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 1 \\
-x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\
z \qquad -x_3 - x_4 \qquad &= 0
\end{aligned}
$$



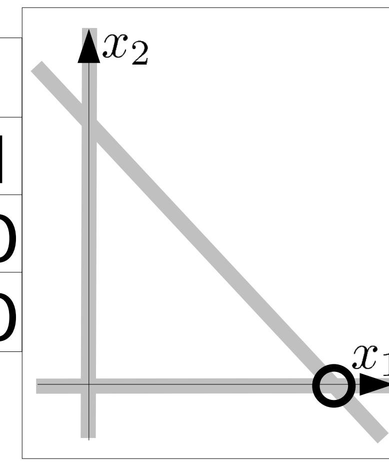
$$z = 0, x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$$

復習：演習問題5

z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	$-\times 1$ 1	1	1	0	0	1	
0	1	-1 1	-1 0	-1	1	-1 1	
1	1	-1 1	-1 0	-1	0	-1 1	

$-\times 1$

z	x_1	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数
0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	-1	-1	1	0
1	0	0	-1	-1	0	0



- 最適解を得る

$$\boxed{z = 0, x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0}$$

- 最適値=0 なので、これを初期解に用いることができる