線形計画問題の行列表現と単体法

線形計画問題の行列表現(等式標準形)

minimize
$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$

subject to

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \\
x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0
\end{gathered}
$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)
$$

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

定義:ベクトルの不等式

$$\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{q} \Leftrightarrow p_j \leq q_j,\ j = 1, \ldots,$$

$$\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{q} \Leftrightarrow p_j \geq q_j,\ j = 1, \ldots,$$

線形計画問題の行列表現(不等式標準形)

minimize

$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m$

subject to

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &\geq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &\geq b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &\geq b_n
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$

minimize

$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}$

subject to

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &\geq \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{x} &\geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

線形計画問題の行列表現(単体法)

minimize
$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$
subject to
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

minimize
$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

基底変数： $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}\} \subset \{x_1, \ldots, x_m\} \qquad (n \leq m)$

非基底変数： $\{x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m}\} = \{x_1, \ldots, x_m\} \setminus \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}\}$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}) \qquad \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} = (x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m})$$

$$\{c_{j_1}, \ldots, c_{j_m}\} = \{c_1, \ldots, c_m\} \quad \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} = (c_{j_1}, \ldots, c_{j_n}) \quad \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} = (c_{j_{n+1}}, \ldots, c_{j_m})$$

$$\{a_{kj_1}, \ldots, a_{kj_m}\} = \{a_{k1}, \ldots, a_{km}\} \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & \ldots & a_{1j_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & \ldots & a_{nj_n} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} a_{1j_{n+1}} & \ldots & a_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nj_{n+1}} & \ldots & a_{nj_m} \end{pmatrix}$$

線形計画問題の行列表現

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \\
&z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
&\text{subject to} \\
&\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
&\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

minimize

$$
z = \underbrace{c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}} + \underbrace{c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}}
$$

subject to

$$
\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} & & \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} & & \\
a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} & + & a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} & = & b_1 \\
a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} & + & a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} & = & b_2 \\
 & & \vdots & & \\
a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n} & + & a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} & = & b_n
\end{array}
$$

$$
\underbrace{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}}, \underbrace{x_{j_{n+1}} \ldots, x_{j_m}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}} \geq 0
$$

線形計画問題の行列表現

minimize

$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$

subject to

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \geq \boldsymbol{0}$$

単体法の各段階での操作は z が減少するように $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}},$ を更新するものになる。

minimize

$$z = \underbrace{c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}} + \underbrace{c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}}$$

subject to

$$\begin{array}{llll}
a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} & + a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} & = b_1 \\
a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} & + a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} & = b_2 \\
\quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} & \quad \vdots \quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} & \\
a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n} & + a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} & = b_n
\end{array}$$

$$\underbrace{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}}, \underbrace{x_{j_{n+1}} \ldots, x_{j_m}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}} \geq 0$$

線形計画問題の行列表現（単体法）

minimize
$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

原点を実行可能領域に
持つ線形計画問題の
不等式標準形を考える。

minimize
$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \geq \boldsymbol{0}$$

スラック変数 $\boldsymbol{x}'^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_n)$
を導入して等式標準形とsimplex
表を得る。

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

線形計画問題の行列表現（単体法）

$$-\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$$

最初のsimplex表

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{A}$

基底変数の連立方程式とその解は

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = -\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = -\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}$

非基底変数はゼロなので、

目的関数値もゼロ

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{b}$$
$$z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = 0$$

更新されたsimplex表

単体法の操作により各行列要素が更新されるが$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{I}$と$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{0}$は保たれるので基底解は常に$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{b}$と$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{0}$

終了時の$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{b}$が最適解となる。

※更新される必要があるのは非基底変数の選択時に必要な $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$ と基底変数の選択時に必要な $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}$ と $\boldsymbol{b}$ だけ。

※単体法の操作で繰り返される $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I}$ を維持するピボット変換により誤差が蓄積する（誤差を含む係数行列を元に計算が繰り返される。）

線形計画問題の行列表現(改訂単体法)

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= 0 \end{aligned}$$

最初のsimplex表

単体法の操作では基底部分と非基底部分の分類が変更されるだけと考え、行列のデータはそのまま、変数の基底・非基底の区別だけを更新する。

minimize

$$z = \underbrace{c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}} + \underbrace{c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}}$$

subject to

$$\begin{array}{lll} a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} & + a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} & = b_1 \\ a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} & + a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} & = b_2 \\ \quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} & \quad \vdots \quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} & \\ a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n} & + a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} & = b_n \end{array}$$

$$\underbrace{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}}, \underbrace{x_{j_{n+1}} \ldots, x_{j_m}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}} \geq 0$$

線形計画問題の行列表現(改訂単体法)

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= 0 \end{aligned}$$

最初のsimplex表

単体法の操作では基底部分と非基底部分の分類が変更されるだけと考え、行列のデータはそのまま、変数の基底・非基底の区別だけを更新する。

minimize

$$z = c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n} + c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}$$

subject to

$$\begin{aligned} a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} + a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} &= b_1 \\ a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} + a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n} + a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} &= b_n \end{aligned}$$

$$x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}, x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m} \geq 0$$

線形計画問題の行列表現(改訂単体法)

$$\boxed{\begin{aligned} -\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= 0 \end{aligned}}$$

最初のsimplex表

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{A}$

基底変数の連立方程式とその解は

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}=-\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}=-\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{b}$

非基底変数はゼロなので、
目的関数値もゼロ

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0 \end{aligned}}$$

更新されたsimplex表

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}$が正則なら変数の交換に必要な情報は計算で求まる。

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}{}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}{}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$

$z=\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}{}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}{}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}})+\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$

(必要なのは$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$の係数：

$-\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}{}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}+\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}{}^{\mathrm{T}}$)

※基底・非基底変数の分類(と$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}{}^{-1}$)だけを更新する改訂単体法が考えられる。

単体法

単体法は次の行列表現に対応するsimplex表の更新により最適解を得る。

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{b}$

$z-\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}-\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}=0$

simplex 表の更新は基底変数と非基底変数一つずつの交換に対応しzが減少するように交換する変数が選ばれる。

また、その過程で必要となる $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$ の値や $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ の係数 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}$ を求めるために $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{I}$ を保つピボット変換が実施される。

改訂単体法

改訂単体法は行列やベクトルの値は更新せず、代りに基底・非基底変数

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{b}$

$z-\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}-\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}=0$

の分類を記憶し$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}$や$\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}$は変数の分類を元に制約式全体の係数行列から求める。その過程で$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}$が正則であれば変数の交換に必要な情報は

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}{}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}{}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$

$z=\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}{}^{-1}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}{}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}{}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}})\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$

の式から求まる。

双対問題

$$\begin{array}{c}\text{minimize} \\ z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\end{array}$$

主問題

$$\begin{array}{c}\text{maximize} \\ w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} \\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\end{array}$$

双対問題

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

双対問題

minimize

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \geq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \geq b_n$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

主問題

maximize

$$w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_ny_n$$

subject to

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{n1}y_n \leq c_1$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{n2}y_n \leq c_2$$
$$\vdots$$
$$a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \cdots + a_{nm}y_n \leq c_m$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$$

双対問題

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

n 行 *m* 列の係数行列と *m* 個の変数、
n 通りの制約式からなる主問題

m 行 *n* 列の係数行列と *n* 個の変数、
m 通りの制約式からなる双対問題

双対問題

主問題

minimize
$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$
subject to
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &\geq b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &\geq b_n \end{aligned}$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

双対問題

maximize
$$w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_ny_n$$
subject to
$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{n1}y_n &\leq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{n2}y_n &\leq c_2 \\ &\vdots \\ a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \cdots + a_{nm}y_n &\leq c_m \end{aligned}$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$$

minimize
$$z = 4x_1 + 4x_2 + x_3$$
subject to
$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +2x_2 & -4x_3 & \geq & 2 \\ 2x_1 & & +2x_3 & \geq & 1 \\ -x_1 & +4x_2 & -x_3 & \geq & 1 \end{array}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

maximize
$$w = 2y_1 + y_2 + y_3$$
subject to
$$\begin{array}{rrrcr} 2y_1 & +2y_2 & -y_3 & \leq & 4 \\ 2y_1 & & +4y_3 & \leq & 4 \\ -4y_1 & +2y_2 & -y_3 & \leq & 1 \end{array}$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

双対問題

maximize

$z = -4x_1 - 4x_2 - x_3$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} -2x_1 & -2x_2 & +4x_3 & \leq & -2 \\ -2x_1 & & -2x_3 & \leq & -1 \\ x_1 & -4x_2 & +x_3 & \leq & -1 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

minimize

$w = -2y_1 - y_2 - y_3$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} -2y_1 & -2y_2 & +y_3 & \geq & -4 \\ -2y_1 & & -4y_3 & \geq & -4 \\ 4y_1 & -2y_2 & +y_3 & \geq & -1 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

↑と同等の問題=→の双対問題

主問題

↑と同等の問題

双対問題

minimize

$z = 4x_1 + 4x_2 + x_3$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +2x_2 & -4x_3 & \geq & 2 \\ 2x_1 & & +2x_3 & \geq & 1 \\ -x_1 & +4x_2 & -x_3 & \geq & 1 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

maximize

$w = 2y_1 + y_2 + y_3$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2y_1 & +2y_2 & -y_3 & \leq & 4 \\ 2y_1 & & +4y_3 & \leq & 4 \\ -4y_1 & +2y_2 & -y_3 & \leq & 1 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

双対問題

maximize
$$-z = -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
subject to
$$-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

双対問題

minimize
$$-w = -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$
subject to
$$-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq -\boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$$

主問題

同等の問題

同等の問題

minimize
$$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

主問題

maximize
$$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$
subject to
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$$

双対問題

双対定理

線形計画問題とその双対問題が右のように与えられ、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_m)$, $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}=(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n)$ 実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、最適解である。

主問題	双対問題
minimize $z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}$	maximize $w=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}$

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}},\exists\tilde{\boldsymbol{y}}\geq\boldsymbol{0}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\leq\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$

$$\Longrightarrow\forall\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}\leq\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\geq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

また、一方に最適解が存在すれば、もう一方にも最適解が存在し、最適解が与える双方の目的関数値は等しい。

演習問題7

次の線形計画問題の双対問題を求め、単体法**等**を用いてこれを解き、最適解の与える両者の目的関数値が等しいことを確認してください。

maximize

$$z = x_1 + x_2$$

subject to

$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

演習問題7

次の線形計画問題の双対問題を求め、単体法等を用いてこれを解き、最適解の与える両者の目的関数値が等しいことを確認してください。

maximize

$$z = [1\ 1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

subject to

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

minimize

$$w = [2\ 2]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

subject to

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

maximize

$$z = x_1 + x_2$$

subject to

$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

演習問題7

次の線形計画問題の双対問題を求め、単体法等を用いてこれを解き、最適解の与える両者の目的関数値が等しいことを確認してください。

maximize

$$z = [1\ 1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

subject to

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

minimize

$$w = [2\ 2]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

subject to

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

maximize

$$z = x_1 + x_2$$

subject to

$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

minimize

$$w = 2y_1 + 2y_2$$

subject to

$$\begin{array}{rrcl} y_1 & +2y_2 & \geq & 1 \\ 2y_1 & +y_2 & \geq & 1 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

maximize

$z = x_1 + x_2$

subject to

$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +2x_2 & \leq & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

minimize

$\tilde{z}(= -z = -x_1 - x_2)$

subject to

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ \tilde{z} + x_1 + x_2 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

	~~非~~	非		非		
z	x1	x2	x3	x4	定数	
	1	2	1		2	/1=2
	2	1		1	2	/2=1
1	1	1			0	

	~~非~~	非		非		
z	x1	x2	x3	x4	定数	
	~~1~~ 0	~~2~~ 3/2	1	-1/2	~~2~~ 1	/1=2
	~~2~~ 1	~~1~~ 1/2		~~1~~ 1/2	~~2~~ 1	/2=1
1	~~1~~ 0	~~1~~ 1/2		-1/2	~~0~~ -1	

		~~非~~	非	非		
z	x1	x2	x3	x4	定数	
		3/2	1	-1/2	1	/(3/2)=2/3
	1	1/2		1/2	1	/(1/2)=2
1		1/2		-1/2	-1	

		~~非~~	非	非		
z	x1	x2	x3	x4	定数	
		~~3/2~~ 1	~~1~~ 2/3	~~-1/2~~ -1/3	~~1~~ 2/3	/(3/2)=2/3
	1	~~1/2~~ 0	-1/3	~~1/2~~ 2/3	~~1~~ 2/3	/(1/2)=2
1		~~1/2~~ 0	-1/3	~~-1/2~~ 1/3	~~1~~ -4/3	

$$x_1 = x_2 = 2/3, \tilde{z} = -4/3 \Rightarrow z = 4/3$$

minimize

$w = 2y_1 + 2y_2$

subject to

$$
\begin{array}{rrcl}
y_1 & +2y_2 & \geq & 1 \\
2y_1 & +y_2 & \geq & 1 \\
 & y_1, y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

minimize

w^*, then w

subject to

$$
\begin{array}{l}
y_1+2y_2-y_3 \qquad +y_5=1 \\
2y_1 \ +y_2 \qquad -y_4+y_6=1 \\
w-2y_1-2y_2 \qquad\qquad =0 \\
w^*+3y_1+3y_2-y_3-y_4 \qquad =2 \\
x_1, x_2, x3, x4, y_5, y_6 \geq 0
\end{array}
$$

	w,w*	y1 ~~非~~	y2 非	y3 非	y4 非	y5	y6 非	定数
-×1		-1 1	-1/2 2	-1	1/2	1	-1/2	-1/2 1/1
×1/2		1 2	1/2 1		-1/2 -1		1/2 1	1/2 1/2
+×2	1	2 -2	1 -2		-1		1	1 0
-×3	1	-3 3	-3/2 3	-1	3/2 -1		-3/2	-3/2 2

w,w*	y1	y2	y3 非	y4 非	y5 非	y6 非	定数
		1	-2/3	1/3	2/3	-1/3	1/3
	1	0	1/3	-2/3	-1/3	2/3	1/3
1		0	-2/3	-2/3	2/3	2/3	4/3
1		0	0	0	-1	-1	0

	w,w*	y1	y2 ~~非~~	y3 非	y4 非	y5 非	y6 非	定数	
×2/3		0	1 3/2	-2/3 -1	1/3 1/2	2/3 1	-1/3 -1/2	1/3 1/2	/(3/2) =1/3
-×1/2		1	-1/2 1/2	1/3	-1/6 -1/2	-1/3	1/6 1/2	-1/6 1/2	/(1/2) =1
+×1	1	0	1 -1	-2/3	1/3 -1	2/3	-1/3 1	1/3 1	
-×3/2	1	0	-3/2 3/2	1 -1	-1/2 1/2	-1	1/2 -3/2	-1/2 1/2	

w,w*	y1	y2	y3 非	y4 非	y5 非	y6 非	定数
		1	-2/3	1/3	2/3	-1/3	1/3
	1		1/3	-2/3	-1/3	2/3	1/3
1			-2/3	-2/3	2/3	2/3	4/3
1			0	0	-1	-1	0

演習問題7

次の線形計画問題の双対問題を求め、単体法等を用いてこれを解き、最適解の与える両者の目的関数値が等しいことを確認してください。