数理計画法

第9回：線形計画問題と多面体

前回（第8回）授業と演習問題の復習

復習：双対問題と双対定理

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

主問題

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題

双対問題は、
最大化問題の最小上界、
最小化問題の最大下界
を求める数理計画問題である。
行列表現を用いた一般的な表現は
左記の通り

双対定理

上式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき $\boldsymbol{x}^{*\mathrm{T}}=({x^*}_1,\ldots,{x^*}_m)$と$\boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}}=({y^*}_1,\ldots,{y^*}_n)$がそれぞれ主問題、双対問題の実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、$\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*$は、それぞれの問題の最適解である。

$$\exists \boldsymbol{x}^*, \exists \boldsymbol{y}^* \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^* \geq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$
$$\Longrightarrow \forall \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^* \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

また、どちらか一方に最適解$\boldsymbol{x}^*$が存在すれば、もう一方にも最適解$\boldsymbol{y}^*$が存在し、双方の最適解が与える目的関数値は等しい。

復習:双対問題と相補性定理

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

主問題

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題

相補性定理

左式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、

$$\boldsymbol{x}^{*\mathrm{T}} = (x_1^*, \ldots, x_m^*) \quad \boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}} = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$$

がそれぞれ、主問題、双対問題の最適解であるならば、次の関係式が成立する。

$$x_j^* > 0 \Longrightarrow a_{1j}y_1^* + \cdots + a_{nj}y_n^* = c_j$$

$$y_k^* > 0 \Longrightarrow a_{k1}x_1^* + \cdots + a_{km}x_m^* = b_k$$

$$a_{1j}y_1^* + \cdots + a_{nj}y_n^* < c_j \Longrightarrow x_j^* = 0$$

$$a_{k1}x_1^* + \cdots + a_{km}x_m^* > b_k \Longrightarrow y_k^* = 0$$

minimize	maximize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$	$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to	subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$
主問題	双対問題

双対定理:

$\boldsymbol{x}^*$と$\boldsymbol{y}^*$が実行可能解かつ$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*$

$\Leftrightarrow\boldsymbol{x}^*$と$\boldsymbol{y}^*$は最適解

弱双対定理:

$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$が実行可能解　$\Rightarrow \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$

$\because \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqq (A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$

相補性定理:

$\boldsymbol{x}^*$と$\boldsymbol{y}^*$は最適解なので $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*$ この不等式の等号が成立する。

$\therefore (\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}-A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-(A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$

j行目k行目に注目すれば、

$[c_j\text{-}(a_{1j}\, y^*{}_1+\ldots+a_{nj}\, y^*{}_n)]x_j=0,\quad [b_k\text{-}(a_{k1}\, x^*{}_1+\ldots+a_{km}\, x^*{}_m)]y_k=0$

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n = c_j$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m = b_k$$

$$a_{1j}y_1^* + \cdots + a_{nj}y_n^* < c_j \Longrightarrow x_j^* = 0$$

$$a_{k1}x_1^* + \cdots + a_{km}x_m^* > b_k \Longrightarrow y_k^* = 0$$

復習：主問題と双対問題の等式標準形

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

主問題

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

主問題の主変数：$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$

$\boldsymbol{x}$ の双対変数：$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_m)$

主問題のスラック変数：$\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_n)$

$\boldsymbol{s}$ の双対変数：$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

双対問題の主変数：$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

$\boldsymbol{y}$ の双対変数：$\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_n)$

双対問題のスラック変数：$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_m)$

$\boldsymbol{t}$ の双対変数：$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$

復習：等式標準形と相補性定理

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

相補性定理

左式のような線形計画問題とその双対問題の等式標準形が与えられているとき、

$$\boldsymbol{x}^{*\mathrm{T}} = (x_1^*, \ldots, x_m^*) \qquad \boldsymbol{s}^{*\mathrm{T}} = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$$
$$\boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}} = (y_1^*, \ldots, y_n^*) \qquad \boldsymbol{t}^{*\mathrm{T}} = (t_1^*, \ldots, t_m^*)$$

がそれぞれ、主問題、双対問題の最適解であるとする。

このとき、次の関係式が成立する。

$$x_j^* > 0 \Longrightarrow t_j^* = 0 \qquad t_j^* > 0 \Longrightarrow x_j^* = 0$$

$$y_k^* > 0 \Longrightarrow s_k^* = 0 \qquad s_k^* > 0 \Longrightarrow y_k^* = 0$$

復習:相補性定理と双対変数

主問題と双対問題の変数の対応と、正・零の対応

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

主変数: $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$ $\qquad$ $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

双対変数

スラック変数: $\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_n)$ $\qquad$ $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_m)$

相補性定理:

$$x_j^* > 0 \Longrightarrow t_j^* = 0 \qquad t_j^* > 0 \Longrightarrow x_j^* = 0$$

$$y_k^* > 0 \Longrightarrow s_k^* = 0 \qquad s_k^* > 0 \Longrightarrow y_k^* = 0$$

復習:相補性定理を用いた解法

主問題の等式標準形

maximize
$z = x_1 + 2x_2$
subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & -x_2 & +s_1 & = & 7 \\ 3x_1 & +x_2 & +s_2 & = & 10 \\ -x_1 & +2x_2 & +s_3 & = & 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_4 \geq 0$$

双対問題の等式標準形

minimize
$w = 7y_1 + 10y_2 + 18y_3$
subject to

$$\begin{array}{rrrrcr} 2y_1 & +3y_2 & -y_3 & -t_1 & = & 1 \\ -y_1 & +y_2 & +2y_3 & -t_2 & = & 2 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0$$

相補性定理

$$x_j^* > 0 \Longrightarrow t_j^* = 0 \quad t_j^* > 0 \Longrightarrow x_j^* = 0$$

$$y_k^* > 0 \Longrightarrow s_k^* = 0 \quad s_k^* > 0 \Longrightarrow y_k^* = 0$$

$$x_1^* = \frac{2}{7} \qquad x_2^* = \frac{64}{7} \qquad s_1^* = \frac{109}{7} \qquad s_2^* = 0 \qquad s_3^* = 0 \qquad z^* = \frac{130}{7}$$

$$t_1^* = 0 \qquad t_2^* = 0 \qquad y_1^* = 0 \qquad y_2^* = ? \qquad y_3^* = ? \qquad w^* = \frac{130}{7}$$

$$3y_2^* - y_3^* = 1, \quad y_2^* + 2y_3^* = 2$$

$$y_2^* = \frac{4}{7} \qquad y_3^* = \frac{5}{7}$$

主問題の最適解から、双対問題の最適解が定まる。(逆も同様)

復習:相補性定理と双対変数

主問題と双対問題の変数の対応と、正・零の対応

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

主変数: $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$ $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

双対変数

スラック変数: $\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_m)$ $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_n)$

相補性定理: $\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0$ $\tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$

$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0$ $\tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$

復習：演習問題8

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize $z = x_1 + 2x_2$

subject to $x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0,\ \ x_2 \leq 3,$

$x_1, x_2 \geq 0.$

課題2：双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

課題3：課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する。

復習：演習問題8

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$\text{minimize}$$
$$z = x_1 + 2x_2$$
$$\text{subject to}$$
$$x_1 + x_2 \geq 4$$
$$x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0$$
$$x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

復習：演習問題8

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize}\\
&z = x_1 + 2x_2\\
&\text{subject to}\\
&x_1 + x_2 \geq 4\\
&x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0\\
&x_2 \leq 3\\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize}\\
&z = x_1 + 2x_2\\
&\text{subject to}\\
&\quad x_1 \ \ + x_2 \geq 4\\
&-x_1 + 2x_2 \geq 2\\
&\qquad\quad -x_2 \geq -3\\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

復習：演習問題8

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

minimize

$$z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 \; + x_2 &\geq 4 \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\ -x_2 &\geq -3 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

minimize

$$z = (1, 2)\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

復習:演習問題8

課題1:次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0$

$x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0.$

minimize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_2 &\geq 4 \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\ -x_2 &\geq -3 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \geq 0.$

minimize

$z = (1, 2)\boldsymbol{x}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$

maximize

$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$

復習:演習問題8

課題1:次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$\begin{aligned}&\text{minimize}\\ &z = x_1 + 2x_2\\ &\text{subject to}\\ &x_1 + x_2 \geq 4\\ &x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0\\ &x_2 \leq 3\\ &x_1, x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{minimize}\\ &z = x_1 + 2x_2\\ &\text{subject to}\\ &\quad x_1 \;\; + x_2 \geq 4\\ &-x_1 + 2x_2 \geq 2\\ &\qquad\quad -x_2 \geq -3\\ &x_1, x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{minimize}\\ &z = (1, 2)\boldsymbol{x}\\ &\text{subject to}\\ &\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\\ &\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{maximize}\\ &w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3\\ &\text{subject to}\\ &y_1 \;\; - y_2 \qquad\; \leq 1\\ &y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2\\ &y_1, y_2, y_3 \geq 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{maximize}\\ &w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}\\ &\text{subject to}\\ &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\\ &\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

復習：演習問題8

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize

$$z=(1,2)\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

maximize

$$w=(4,2,-3)\boldsymbol{y}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

minimize

$$z=(1,2)\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}},(s_1,s_2,s_3)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

maximize

$$w=(4,2,-3)\boldsymbol{y}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}},(t_1,t_2)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

復習:演習問題8

課題2:双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

$$\text{maximize}$$
$$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$$
$$\text{subject to}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0$$

$$\text{minimize} - w$$
$$\text{subject to}$$
$$\begin{array}{rcl} y_1 - y_2 + t_1 &=& 1 \\ y_1 + 2y_2 - y_3 + t_1 &=& 2 \\ -w + 4y_1 + 2y_2 - 3y_3 &=& 0 \end{array}$$
$$y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0.$$

定数項とスラック変数の係数が正→原点が実行可能領域

$-w$	y_1 非	y_2 非	y_3 非	t_1	t_2	定数
0	1	-1	0	1	0	1
0	1	2	-1	0	1	2
1	4	2	-3	0	0	0

復習：演習問題8

課題2：双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

$-w$	y_1 ~~非~~	y_2 非	y_3 非	t_1 非	t_2	右辺	
0	1	-1	0	1	0	1	/1=1
0	1	2	-1	0	1	2	/1=2
1	4	2	-3	0	0	0	

$-w$	y_1	y_2 ~~非~~	y_3 非	t_1 非	t_2 非	右辺
0	1	-1	0	1	0	1
0	0	3	-1	-1	1	1
1	0	6	-3	-4	0	-4

$-w$	y_1	y_2	y_3 非	t_1 非	t_2 非	右辺
0	1	0	-1/3	2/3	1/3	4/3
0	0	3/3	-1/3	-1/3	1/3	1/3
1	0	0	-1	-2	-2	-6

最適解：$w=6,\ y_1=4/3,\ y_2=1/3,\ y_3=0,\ t_1=0,\ t_2=0.$

復習:演習問題8

課題2:双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

相補性定理:主･双対問題の最適解に次の関係が成立

$$x^*_j>0 \Rightarrow t^*_j=0 \quad t^*_j>0 \Rightarrow x^*_j=0$$

$$y^*_k>0 \Rightarrow s^*_k=0 \quad s^*_k>0 \Rightarrow y^*_k=0$$

(*は最適解　主問題の主変数:x^*_j、　スラック変数:s^*_k
双対問題の主変数:y^*_k、スラック変数:t^*_j)

双対問題の最適解:$w=6,\ y_1=4/3,\ y_2=1/3,\ y_3=0,\ t_1=0,\ t_2=0$

↓相補性定理より

主問題の最適解:　$z=6,\ s_1=0,\ s_2=0,\ s_3,\ x_1,\ x_2=?$

制約式より:　$x_1+x_2=4,\ -x_1+2x_2=2,\ x_2+s_3=3$

連立方程式を解いて未知の変数を定める

$$x_1=2,\ x_2=2,\ s_3=1$$

主問題の最適解:　$z=6,\ s_1=0,\ s_2=0,\ s_3=1,\ x_1=2,\ x_2=2$

復習:演習問題8

課題3:課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する
課題2の解答:zは$x_1 = x_2 = 2$において最小値6を得る

minimize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

① $x_1 + x_2 \geq 4$

② $x_2 - 2x_2 + 2 \leq 0$

③ $x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$