双対問題と双対定理･相補性定理

双対定理

線形計画問題とその双対問題が右のように与えられ、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_m),\ \tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}=(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n)$ 実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、最適解である。

主問題	双対問題
minimize $z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$	maximize $w=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}$	subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}$

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}},\exists\tilde{\boldsymbol{y}}\geq\boldsymbol{0}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\leq\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$

$$\Longrightarrow\forall\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c},\ \text{then}\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}\leq\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\geq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

また、一方に最適解が存在すれば、もう一方にも最適解が存在し、
最適解が与える双方の目的関数値は等しい。

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{0}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}},\ \text{for}\ \forall\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}$$

$$\Longrightarrow\exists\tilde{\boldsymbol{y}}\geq\boldsymbol{0}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\leq\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}},$$

$$\text{for}\ \forall\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$

双対定理

線形計画問題とその双対問題が右のように与えられ、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_m)$, $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}=(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n)$ 実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、最適解である。

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}},\exists\tilde{\boldsymbol{y}}\geq\mathbf{0}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\leq\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$
$$\Longrightarrow\forall\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{y}\geq\mathbf{0},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}\leq\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\geq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

主問題	双対問題
minimize $z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}\geq\mathbf{0}$	maximize $w=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y}\geq\mathbf{0}$

証明：
$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$をそれぞれの問題の任意の実行可能解とする。
$z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ の各項を不等式 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leqq\boldsymbol{c}$ で評価すれば次の関係式が得られる。

$$z=c_1x_1+\cdots+c_mx_m\geq(a_{11}y_1+\cdots+a_{n1}y_n)x_1+\cdots+(a_{1m}y_1+\cdots+a_{nm}y_n)x_m$$

同様に$w=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{b}$ から次の関係式が得られる。

$$w=b_1y_1+\cdots+b_ny_n\leq(a_{11}x_1+\cdots+a_{1m}x_m)y_1+\cdots+(a_{n1}x_1+\cdots+a_{nm}x_m)y_n$$

両式の右辺を比較すれば、一般に $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 　$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ の成立することが分かる。
$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$であれば任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対して次式が成立し定理が証明される。

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}$$

双対定理

$$\exists \tilde{\boldsymbol{x}}, \exists \tilde{\boldsymbol{y}} \geq \mathbf{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$

$$\Longrightarrow \forall \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

証明:

$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ をそれぞれの問題の任意の実行可能解とする。

制約式より $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$ すなわち

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m \geq b_1, \qquad a_{11}y_1 + \cdots + a_{n1}y_n \leq c_1,$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m \geq b_n, \qquad a_{1m}y_1 + \cdots + a_{nm}y_n \leq c_m.$$

それぞれ両辺に $y_1,\ldots,y_n$, $x_1,\ldots,x_m \geq 0$ をかけても不等号はそのまま

$$y_1(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m) \geq y_1 b_1, \quad x_1(a_{11}y_1 + \cdots + a_{n1}y_n) \leq x_1 c_1,$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$y_n(a_{n1}x_1! + \ldots + a_{nm}x_m) \geq y_n b_n, \quad x_m(a_{1m}y_1 + \ldots + a_{nm}y_n) \leq x_m c_m.$$

左右それぞれを加えて行列で表現すれば $\boldsymbol{y}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{c}$

$(\boldsymbol{y}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathbf{T}} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$ より $\boldsymbol{x}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{b}$.

双対定理

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}}, \exists\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$

$$\Longrightarrow \forall\boldsymbol{x}, \forall\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

証明つづき:

任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ について $\boldsymbol{x}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{y}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{c}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{y}$ なので

ある $\tilde{\boldsymbol{x}}$, $\tilde{\boldsymbol{y}}$, についても $\boldsymbol{c}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{c}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{y}$

このとき、$\boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{c}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}$ なら $\boldsymbol{c}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{c}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{c}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{y}$

したがって、定理の通り

ある実行可能解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$, $\tilde{\boldsymbol{y}}$, について $\boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{c}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}$ なら、

任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ について $\boldsymbol{c}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{c}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{y}$

すなわち $\tilde{\boldsymbol{x}}$, $\tilde{\boldsymbol{y}}$, はそれぞれ最適解

主問題と双対問題の関係

maximize
$z = 2x_1 + x_2 + x_3$
subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & \leq & 4 \\ 2x_1 & & 4x_3 & \leq & 4 \\ -4x_1 & +3x_2 & -x_3 & \leq & 1 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

最大化問題

minimize
$w = 4y_1 + 4y_2 + y_3$
subject to

$$2y_1 + 2y_2 - 4y_3 \geq 2$$
$$2y_1 + 3y_3 \geq 1$$
$$-y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 1$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

最小化問題

$$\text{maximize} \quad z = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{minimize} \quad w = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

主問題と双対問題の関係

maximize

$z = 2x_1 + x_2 + x_3$

subject to

$$\begin{array}{rrrcll} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & \leq & 4 & ① \\ 2x_1 & & 4x_3 & \leq & 4 & ② \\ -4x_1 & +3x_2 & -x_3 & \leq & 1 & ③ \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

最大化問題

minimize

$w = 4y_1 + 4y_2 + y_3$

subject to

$$2y_1 + 2y_2 - 4y_3 \geq 2$$
$$2y_1 + 3y_3 \geq 1$$
$$-y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

最小化問題

最大化問題は、制約式の定める
上界に一番近い実行可能解を探す問題
2つの制約式から分かる上界の例:

$$z \leq (①+②)/2 = 2x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 \leq 4$$

（係数を比較すれば不等式の成立が分かる）

①②③の組み合わせで得られる関係式

$$y_1 \times ① + y_2 \times ② + y_3 \times ③$$

を考える。

$y_1, y_2, y_3 \geqq 0$ であれば、各式の両辺を加えて

$$= (2y_1 + 2y_2 - 4y_3)x_1 + (2y_1 + 3y_3)x_2$$
$$+(-y_1 + 4y_2 - y_3)x_3 \leq (4y_1 + 4y_2 + y_3)$$

関係式の係数が目的関数の係数より大きければ、

$z \leq 4y_1 + 4y_2 + y_3$ により

目的関数の上界を得ることができる。

このとき、最も厳しい上界を求める問題、
すなわち $4y_1 + 4y_2 + y_3$ の最小化問題が
z の上限を求める問題に対応する。

主問題と双対問題の関係

maximize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

最大化問題

minimize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

最小化問題

一般化して考えると;

主問題の制約$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}$ と非負条件$\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}$ から
$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$
主問題の制約$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{c}$ と非負条件$\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$ から
$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}$
スカラを転置しても値は変わらないので
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c} \leqq \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = w$

$\boldsymbol{y}$を変化させて最小のwを探す
⇒$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}$ のもとで最も厳しい z の上界を探す
$\boldsymbol{x}$を変化させて最大のzを探す
⇒$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{c}$ のもとで最も厳しい w の下界を探す

双対問題と双対定理のまとめ

minimize $z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	maximize $w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$
主問題	双対問題

双対問題は、
最大化問題の最小上界、
最小化問題の最大下界
を求める数理計画問題である。
行列表現を用いた一般的な表現は
左記の通り

双対定理

上式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$と $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$ がそれぞれ主問題、双対問題の実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、これは、それぞれの問題の最適解である。

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}}, \exists\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$
$$\Longrightarrow \forall\boldsymbol{x}, \forall\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

また、どちらか一方に最適解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ が存在すれば、もう一方にも最適解 $\tilde{\boldsymbol{y}}$ が存在し、双方の最適解が与える目的関数値は等しい。

主問題と双対問題の等式標準形

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

主問題

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

主問題の主変数： $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$

$\boldsymbol{x}$ の双対変数： $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_m)$

主問題のスラック変数： $\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_n)$

$\boldsymbol{s}$ の双対変数： $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

双対問題の主変数： $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

$\boldsymbol{y}$ の双対変数： $\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_n)$

双対問題のスラック変数： $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_m)$

$\boldsymbol{t}$ の双対変数： $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$

双対問題と相補性定理

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

主問題

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題

相補性定理

左式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m) \quad \tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$$

がそれぞれ、主問題、双対問題の最適解であるならば、次の関係式が成立する。

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n = c_j$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m = b_k$$

$$a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n < c_j \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m > b_k \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

主問題	双対問題
minimize $z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	maximize $w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対定理：

$\tilde{\boldsymbol{x}}$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}$ が実行可能解かつ $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$

$\Longleftrightarrow$ $\tilde{\boldsymbol{x}}$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}$ は最適解

弱双対定理：

$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が実行可能解 $\Longrightarrow \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$

$$\because \; \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

相補性定理：

$\tilde{\boldsymbol{x}}$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}$ は最適解なので $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$ この不等式の等号が成立する。

$$(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 \qquad (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0$$

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n = c_j$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m = b_k$$

$$a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n < c_j \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m > b_k \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

等式標準形と相補性定理

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

相補性定理

左式のような線形計画問題とその双対問題の等式標準形が与えられているとき、

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m) \qquad \tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$$
$$\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n) \qquad \tilde{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{s}_m)$$

がそれぞれ、主問題、双対問題の最適解であるとする。

このとき、次の関係式が成立する。

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \qquad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$
$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \qquad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

主問題の等式標準形

maximize

$z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & -x_2 & +s_1 & = & 7 \\ 3x_1 & +x_2 & +s_2 & = & 10 \\ -x_1 & +2x_2 & +s_3 & = & 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_4 \geq 0$$

双対問題の等式標準形

minimize

$w = 7y_1 + 10y_2 + 18y_3$

subject to

$$\begin{array}{rrrrcr} 2y_1 & +3y_2 & -y_3 & -t_1 & = & 1 \\ -y_1 & +y_2 & +2y_3 & -t_2 & = & 2 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0$$

相補性定理

$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \quad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$

$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \quad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$

$\tilde{x}_1 = \frac{2}{7}$, $\tilde{x}_2 = \frac{64}{7}$, $\tilde{s}_1 = \frac{109}{7}$, $\tilde{s}_2 = 0$, $\tilde{s}_3 = 0$

⇒

$\tilde{t}_1 = 0$, $\tilde{t}_2 = 0$, $\tilde{y}_1 = 0$, $\tilde{y}_2 = ?$, $\tilde{y}_3 = ?$

⇒

$3y_2 - y_3 = 1,$

$y_2 + 2y_3 = 2$

⇓

$\tilde{y}_2 = \frac{4}{7}$

$\tilde{y}_3 = \frac{5}{7}$

$\tilde{z} = \frac{130}{7}$ $\quad \tilde{w} = \frac{130}{7}$

主問題の最適解から、双対問題の最適解が定まる。（逆も同様）

まとめ「相補性定理と双対変数」

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

主変数:
$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$ $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

スラック変数:
$\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_m)$ $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_n)$

双対変数

相補性定理

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \quad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \quad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

演習問題8

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize $\quad z = x_1 + 2x_2$

subject to $\quad x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0,\ \ x_2 \leq 3,$

$\qquad x_1, x_2 \geq 0.$

課題2：双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

課題3：課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する。

演習問題8

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize

$$z = (1,2)\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

minimize

$$z = (1,2)\boldsymbol{x}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}, (s_1, s_2, s_3)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

maximize

$$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

maximize

$$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}, (t_1, t_2)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

演習問題8

課題2：双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

相補性定理：主・双対問題の最適解に次の関係が成立

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \quad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \quad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

(主問題の主変数：$\tilde{x}_j$、スラック変数：$\tilde{s}_k$
双対問題の主変数：$\tilde{y}_k$、スラック変数：$\tilde{t}_j$)

双対問題の最適解：

$$w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$$

↓相補性定理

主問題の最適解： $z = 6, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 > 0, x_1 > 0, x_2 > 0$

制約式より： $x_1 + x_2 = 4, -x_1 + 2x_2 = 2, x_2 + s_3 = 3$

連立方程式を解いて未知の変数を定める

$$x_1 = 2, x_2 = 2, s_3 = 1$$

主問題の最適解： $z = 6, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 1, x_1 = 2, x_2 = 2$

演習問題8

課題3：課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する

課題2の解答：z は $x_1 = x_2 = 2$ において最大値6を得る

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \\
&z = x_1 + 2x_2 \\
&\text{subject to} \\
① \ & x_1 + x_2 \geq 4 \\
② \ & x_2 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\
③ \ & x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$