

数理計画法

第10回：多面体と双対定理・相補性定理

前回(第9回)授業と演習問題の復習

復習：線形計画問題と多面体

定義： n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A_1 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, A_2 \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2 \}$$

このように行列 A_1, A_2 とベクトル $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ で表わされる部分集合 \mathcal{P} を \mathbb{R}^n の多面体と呼ぶ。

※この定義では面や直線、点、半平面も多面体となる

面：

$$A_1 = (a_1, a_2, a_3)$$

点：

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{pmatrix}$$

直線：

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{pmatrix}$$

※上は全て3次元の場合

定義：有界多面体

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{P} \Rightarrow \|\boldsymbol{x}\| \leq \exists M$ を満たす定数 M が存在するとき、 \mathcal{P} を有界多面体と呼ぶ。

復習：線形計画問題と多面体

定義： n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A_1 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, A_2 \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2 \}$$

3次元平面を $\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0 \}$ と表わせる

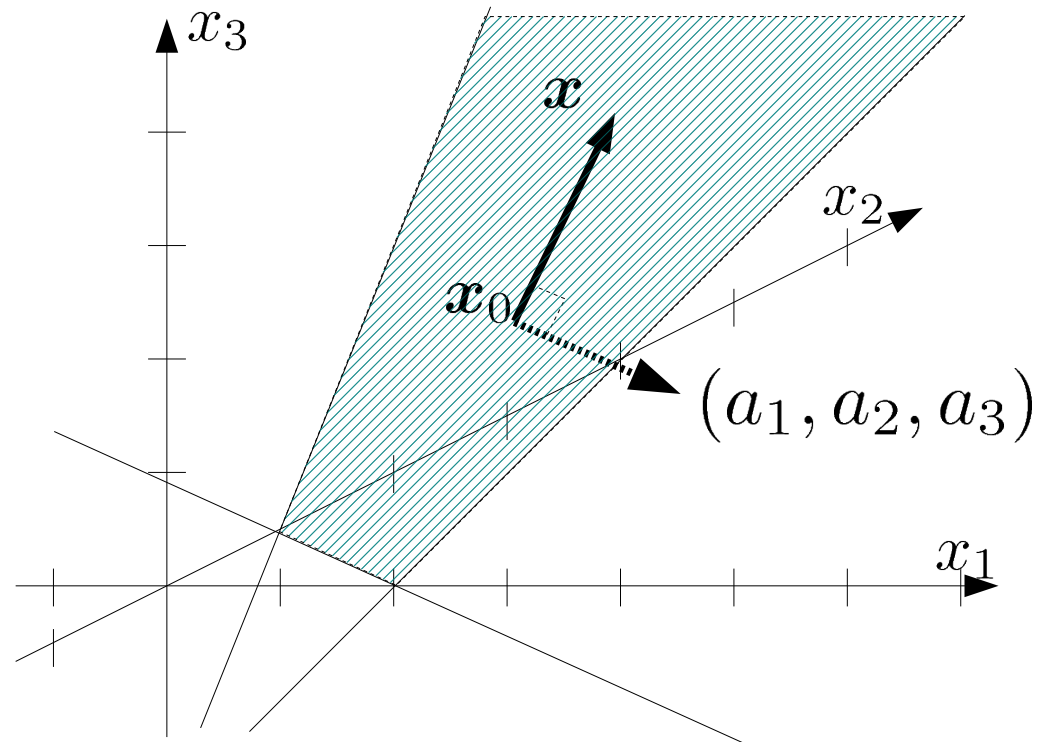
ただし、 \boldsymbol{x}_0 は $(a_1, a_2, a_3)\boldsymbol{x}_0 = b_1$ を満たす定数

このとき、

$$A_1 = (a_1, a_2, a_3), \quad \boldsymbol{b}_1 = b_1$$

$$A_2 = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \mathbf{0}$$

とすれば、多面体の定義により、この平面を定めることができる。



復習：線形計画問題と多面体

定義： n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A_1 \mathbf{x} = \mathbf{b}_1, A_2 \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_2 \}$$

$A_1 = \mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$, $A_2 = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}_2 = b_2$ ならば(但し $A_2 \mathbf{x}_0 = b_2$)

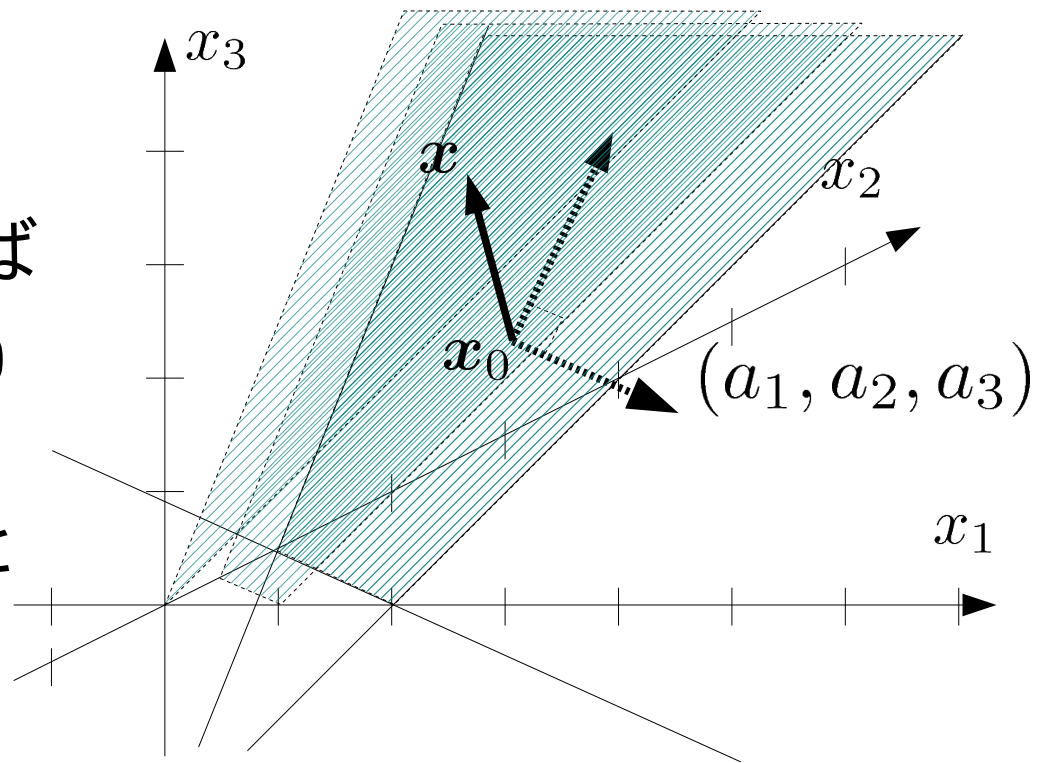
$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leq 0 \}$$

法線 (a_1, a_2, a_3) とベクトル
 $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ のなす角を θ とすれば

$$|(a_1, a_2, a_3)| |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \cos \theta \leq 0$$

$\therefore \theta \geq \pi/2$ なので

\mathcal{P} は平面 $A_2 \mathbf{x} = b_2$ の法線とは反対側の全ての点からなる多面体となる。



復習：線形計画問題と多面体

定義： n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A_1 \mathbf{x} = \mathbf{b}_1, A_2 \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_2 \}$$

3次元の平面を構成する多面体： $A_2 \mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_2$, $A_2 = (a_1, a_2, a_3)$

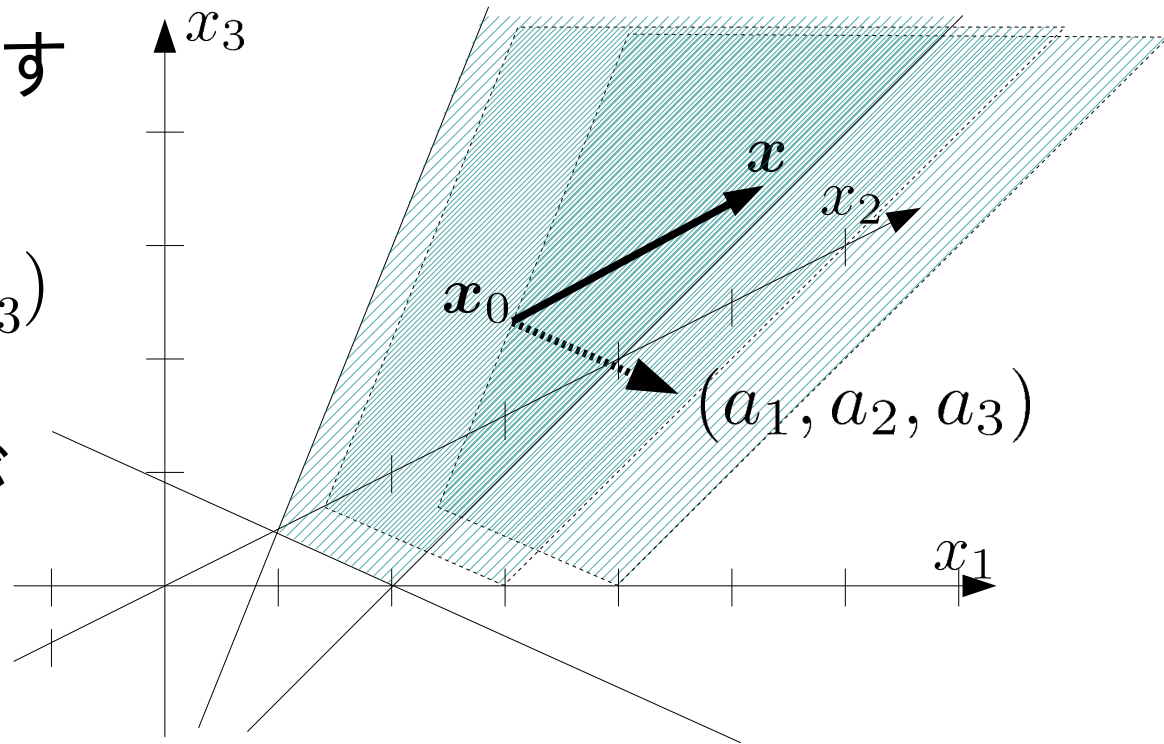
逆の法線側は $|(a_1, a_2, a_3)| |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \cos \theta \geq 0 \Rightarrow \theta \leq \pi/2$

すなわち $A_2 \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_2$ を満たす
全ての \mathbf{x} からなる多面体

そこで、 $A_2 = (-a_1, -a_2, -a_3)$

$A_2 \mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_2$ とすれば

\mathcal{P} の定義により表すことができる。



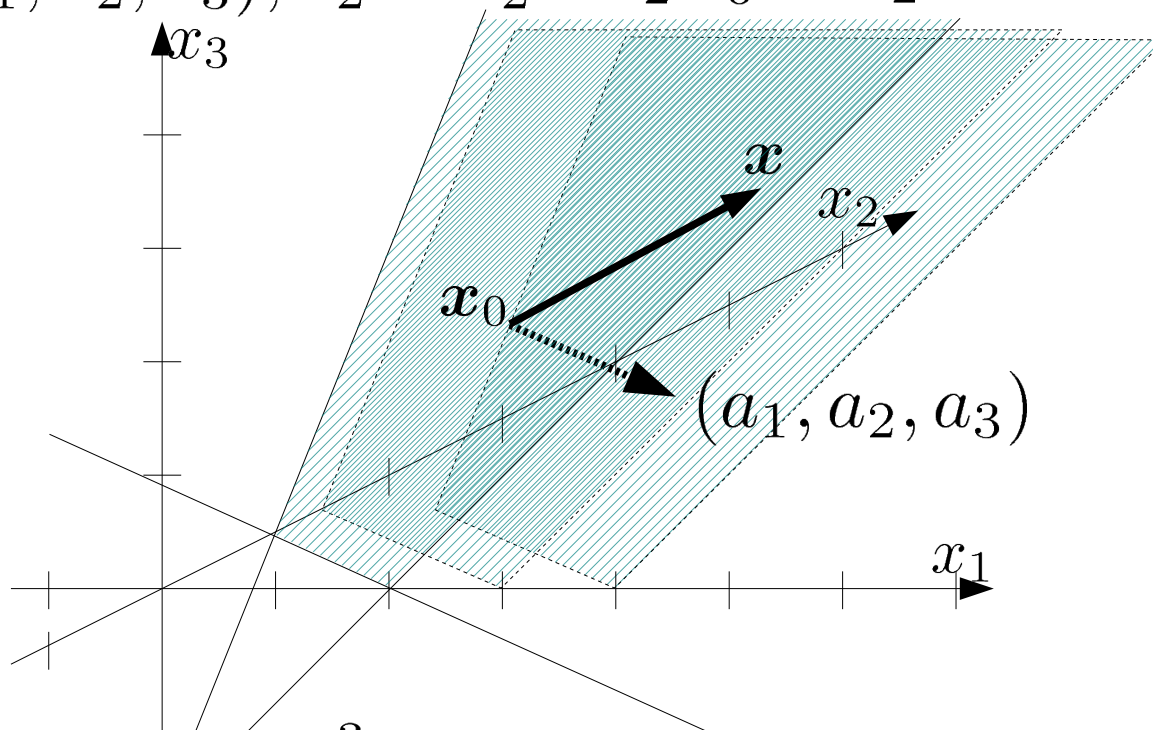
復習：線形計画問題と多面体

定義： n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \cancel{A_1 x = b_1}, A_2 x \leq b_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体：

$$A_2 = -(a_1, a_2, a_3), b_2 = b_2 \quad A_2 x_0 = b_2$$



$$x \in \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(x - x_0) \geq 0\}$$

$$|(a_1, a_2, a_3)| |x - x_0| \cos \theta \geq 0 \Rightarrow \theta \leq \pi/2$$

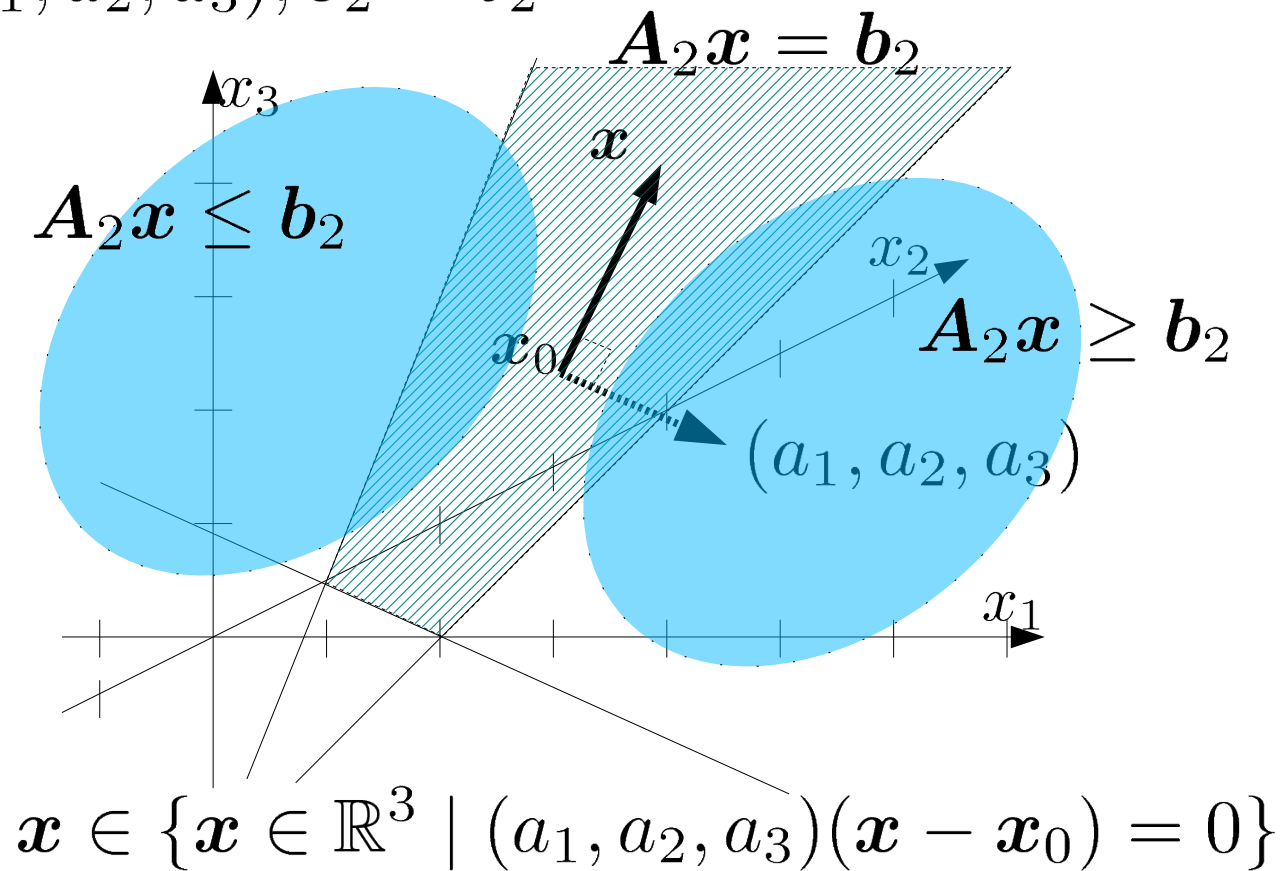
復習：線形計画問題と多面体

定義： n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体：

$$A_2 = (a_1, a_2, a_3), b_2 = b_2$$



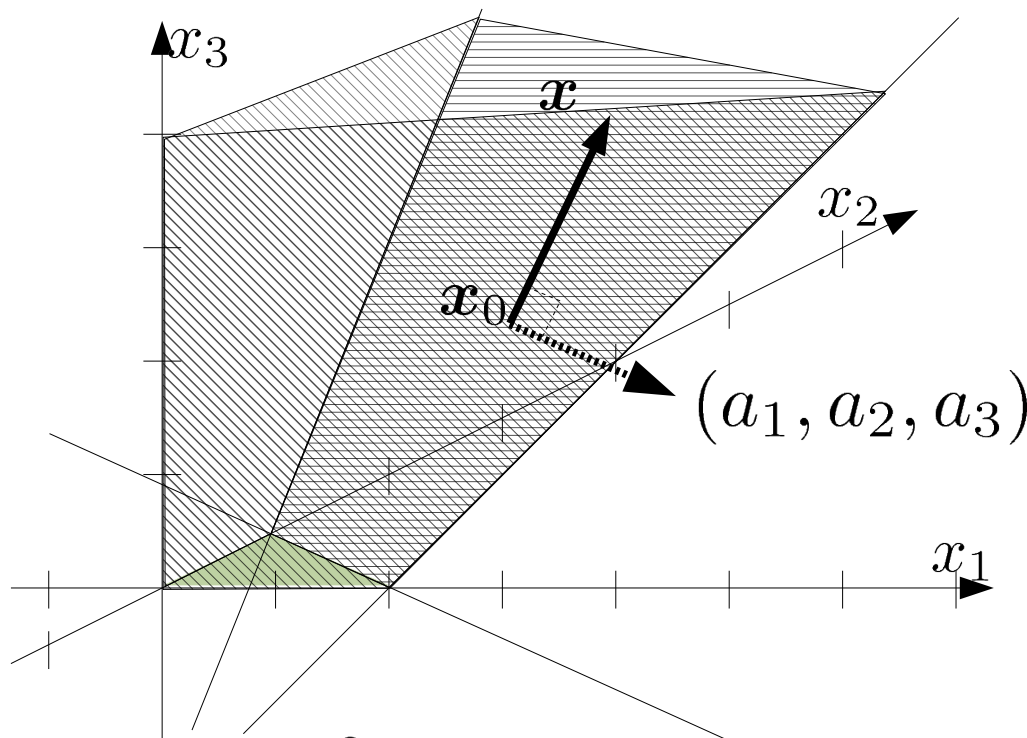
復習：線形計画問題と多面体

定義： n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \cancel{A_1 x \leq b_1}, A_2 x \leq b_2\}$$

3次元領域を2分する多面体：

$$A_2 = (a_1, a_2, a_3), b_2 = b \quad A_2 x_0 = b$$



$$x \in \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(x - x_0) \leq 0\}$$

復習：線形計画問題と多面体

定義： n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \cancel{A_1 x \leq b_1}, A_2 x \leq b_2\}$$

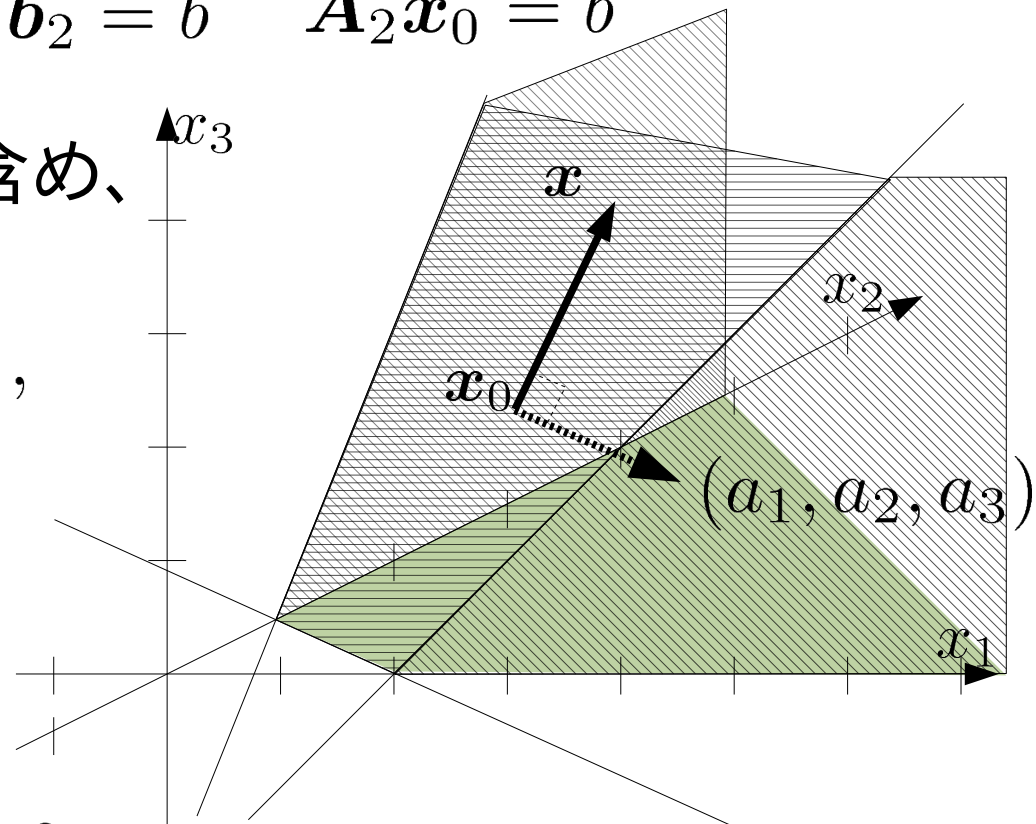
3次元領域を2分する多面体：

$$A_2 = -(a_1, a_2, a_3), b_2 = b \quad A_2 x_0 = b$$

正確には非負条件も含め、

$$A_2 = \begin{pmatrix} -(a_1, a_2, a_3) \\ -I \end{pmatrix},$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} b \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$



$$x \in \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -(a_1, a_2, a_3)(x - x_0) \leq 0\}$$

復習：線形計画問題と多面体

定義： n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

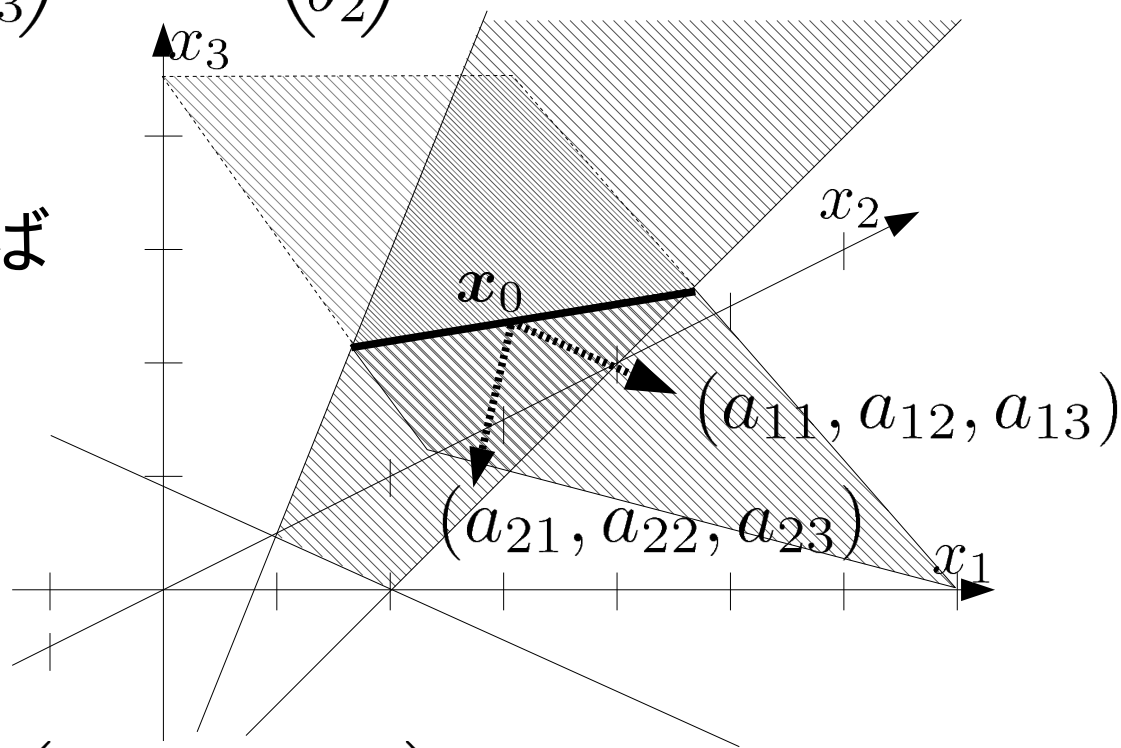
$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, \cancel{A_2 x \leq b_2}\}$$

3次元の直線を構成する多面体：

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$A_1 x_0 = b_1$$

非負条件を入れれば
線分になる



$$x \in \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} (x - x_0) = 0\}$$

復習：線形計画問題と多面体

定義： n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, \cancel{A_2 x \leq b_2}\}$$

3次元の直線を構成する多面体：

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$A_1 x_0 = b_1$$

3つのベクトル

$$(a_{11}, a_{12}, a_{13})$$

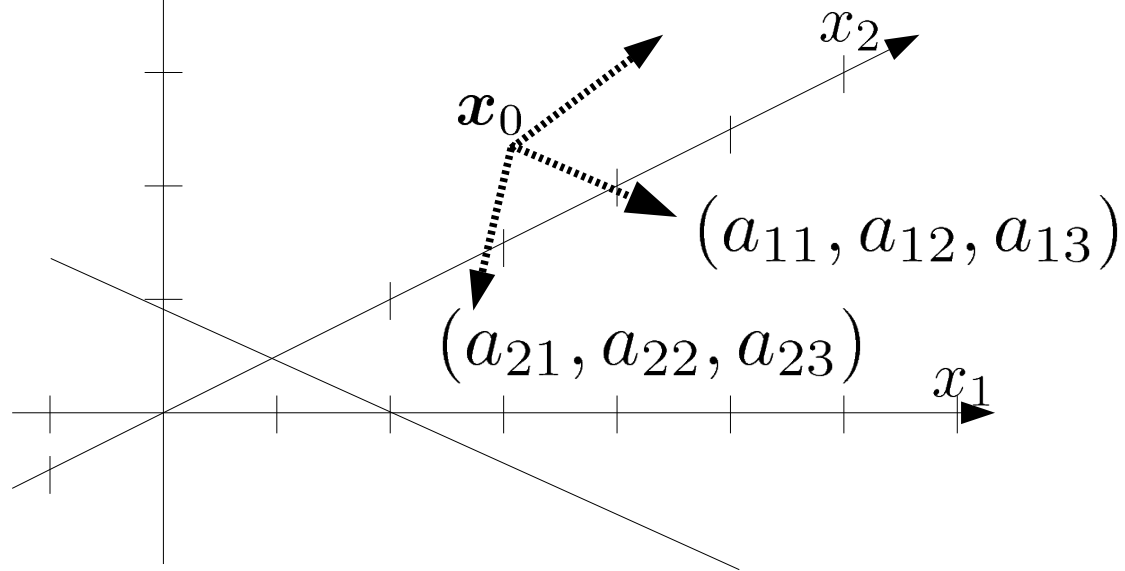
$$(a_{21}, a_{22}, a_{23})$$

$$(a_{31}, a_{32}, a_{33})$$

が一次独立なら

$$\det A_1 \neq 0$$

$\therefore x_0$ が一意に決まる



復習：線形計画問題と多面体

定義： n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{N_1} \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N_1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_{N_2} \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_{N_2} \end{pmatrix}$$

多面体を構成する平面の法線ベクトル：

$$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N_1}, \mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_{N_2}$$

不等式標準形の不等式制約の係数に対応する
「minimize z , subject to $Ax \geq b$ 」のとき、 A の行ベクトル毎に平面が考えられる。

$$A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)^T, b = (b_1, \dots, b_n)$$

$$\text{平面 } \ell : \mathbf{a}_\ell^T x \geq b_\ell \quad \ell = 1, \dots, n$$

復習：演習問題9

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$z = x_1 + 2x_2$$

minimize $x_1 + x_2 \geq 4, x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0, x_2 \leq 3,$
subject to $x_1, x_2 \geq 0.$

課題2：主問題と双対問題の実行可能領域を、目的関数を表す平面とともに図示し、図を用いてそれぞれの最適解を示せ。

復習：演習問題9

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$z = x_1 + 2x_2$$

minimize $x_1 + x_2 \geq 4, x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0, x_2 \leq 3,$
subject to $x_1, x_2 \geq 0.$

minimize

$$z = (1, 2)\mathbf{x}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \geq \mathbf{0}$$

maximize

$$w = (4, 2, -3)\mathbf{y}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T \geq \mathbf{0}$$

復習：演習問題9

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$z = x_1 + 2x_2$$

minimize $x_1 + x_2 \geq 4, x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0, x_2 \leq 3,$
subject to $x_1, x_2 \geq 0.$

minimize

$$z = (1, 2)\mathbf{x}$$

subject to

3つの平面

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2つの平面

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \geq \mathbf{0}$$

maximize

$$w = (4, 2, -3)\mathbf{y}$$

2つの平面

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T \geq \mathbf{0}$$

3つの平面

復習：演習問題9

minimize

$$z = (1, 2)x$$

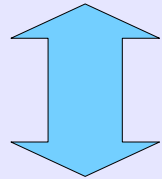
subject to

3つの平面

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2つの平面

$$x = (x_1, x_2)^T \geq 0$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

maximize

$$w = (4, 2, -3)y$$

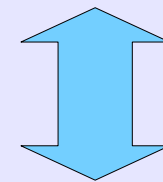
2つの平面

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y = (y_1, y_2, y_3)^T \geq 0$$

3つの平面

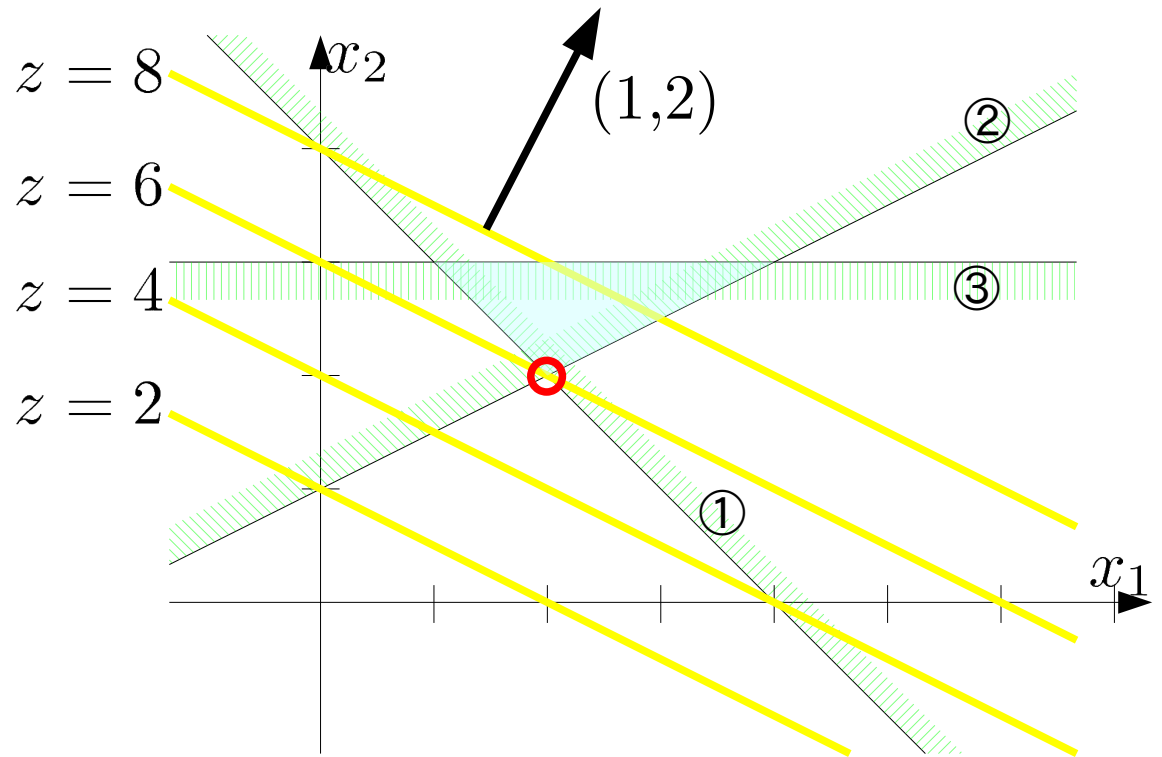


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

復習：演習問題9

minimize
 $z = (1, 2)\mathbf{x}$
subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \geq \mathbf{0}$$



復習：演習問題9

maximize

$$w = (4, 2, -3)y$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y = (y_1, y_2, y_3)^T \geq \mathbf{0}$$

