

線形計画問題と多面体

3次元問題のグラフ

演習問題の双対問題についてもグラフを描く

maximize

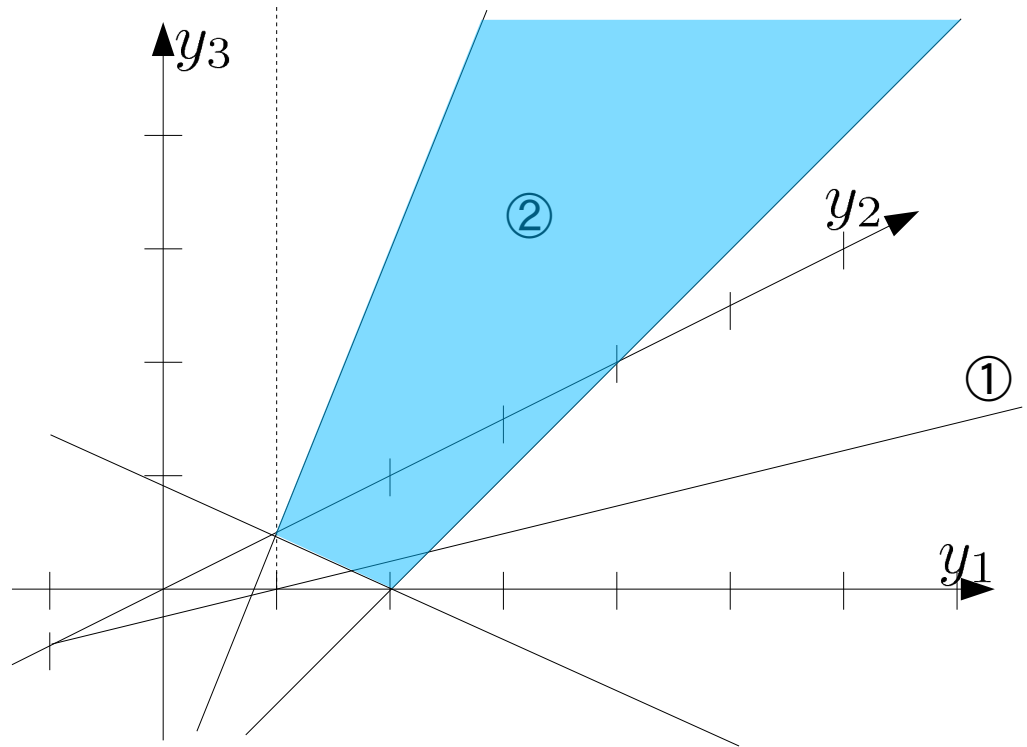
$$w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3$$

subject to

① $y_1 - y_2 \leq 1$

② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



3次元問題のグラフ

演習問題の双対問題についてもグラフを描く

maximize

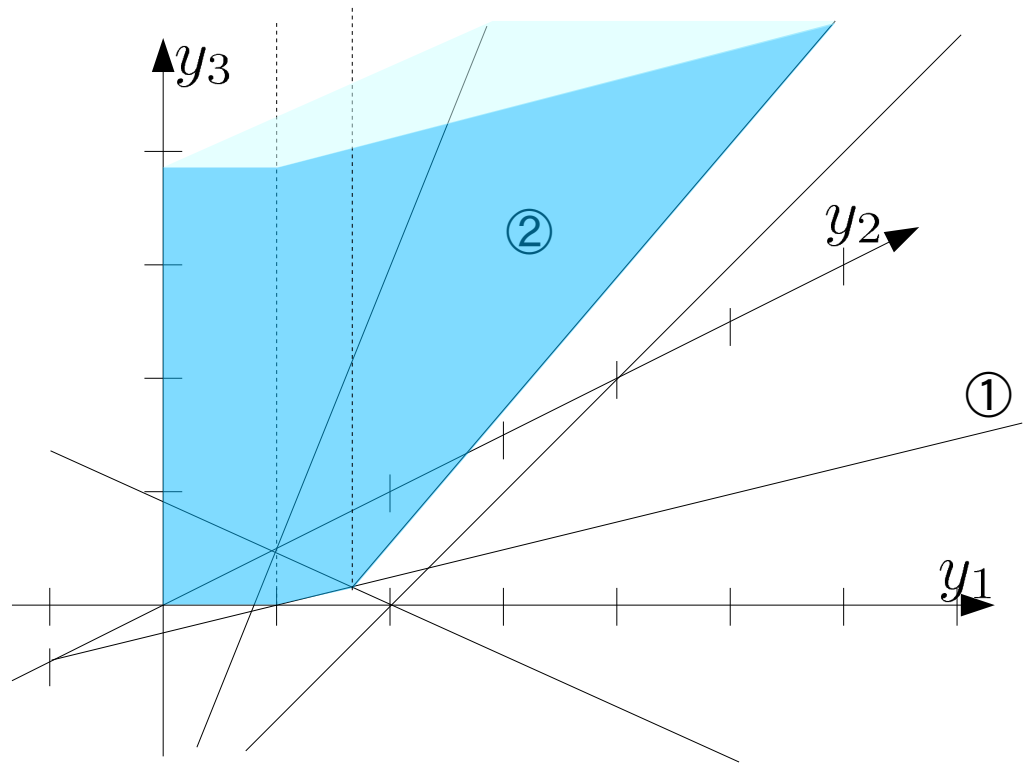
$$w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3$$

subject to

① $y_1 - y_2 \leq 1$

② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



3次元問題のグラフ

演習問題の双対問題についてもグラフを描く

maximize

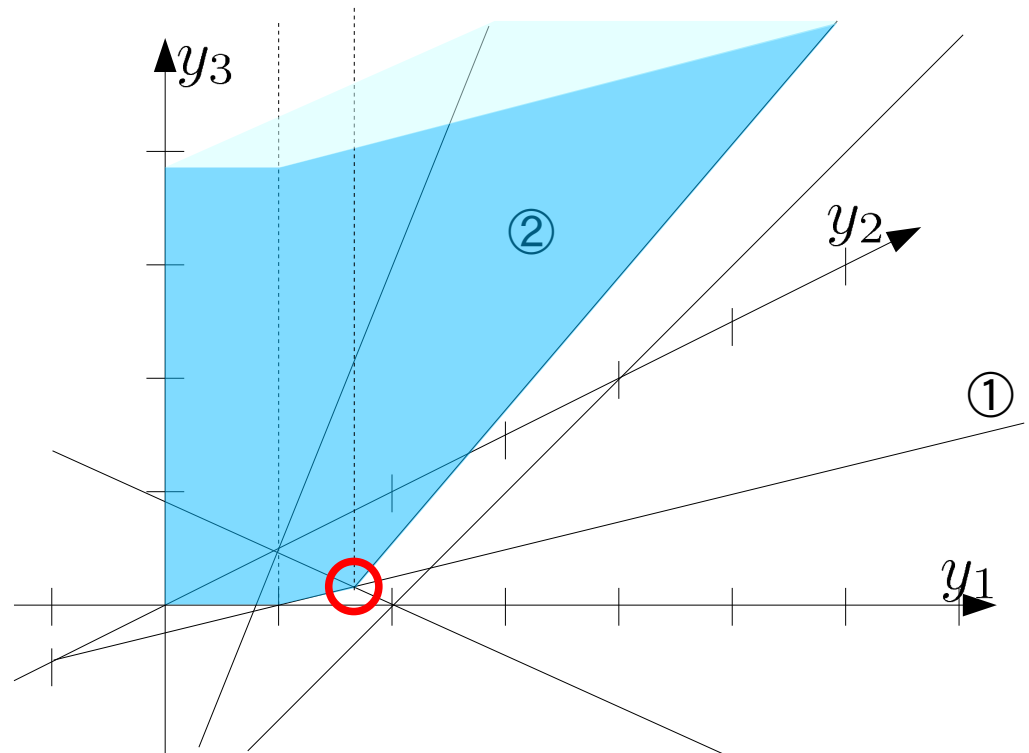
$$w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3$$

subject to

① $y_1 - y_2 \leq 1$

② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



最適解: $w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$

線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1x = b_1, A_2x \leq b_2\}$$

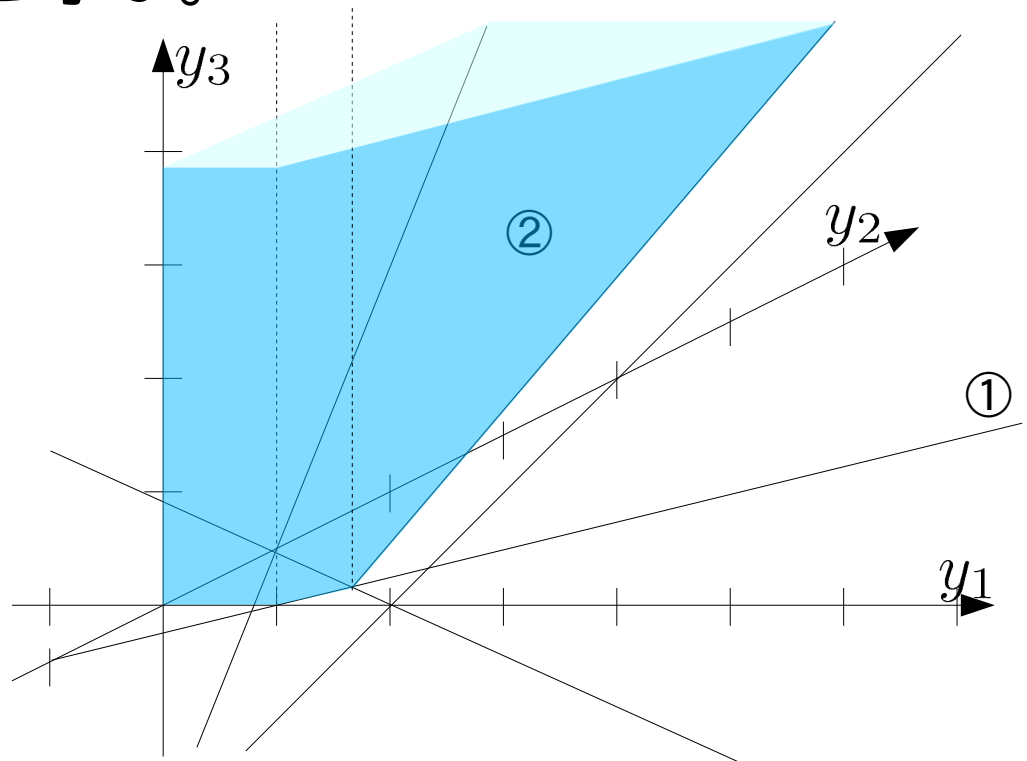
のとき、 \mathcal{P} を \mathbb{R}^n の多面体と呼ぶ。

maximize

$$w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3$$

subject to

- ① $y_1 - y_2 \leq 1$
- ② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$
- $y_1, y_2, y_3 \geq 0$



線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

のとき、 \mathcal{P} を \mathbb{R}^n の多面体と呼ぶ。

この定義では、面や直線、点、半平面等も多面体となる。

定義: 有界多面体

$$\forall x \in \mathcal{P}, \|x\| \leq \exists M$$

となる、 M が存在するとき \mathcal{P} を有界多面体と呼ぶ。

線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

このように行列 A_1, A_2 、ベクトル b_1, b_2 で表わされる部分集合 \mathcal{P} を \mathbb{R}^n の多面体と呼ぶ。

※この定義では面や直線、点、半平面も多面体となる

面:	$A_1 = (a_1, a_2, a_3)$	点:	$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{pmatrix}$
直線:	$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{pmatrix}$		

※上は全て 3次元の場合

定義: 有界多面体

$\forall x \in \mathcal{P}, \|x\| \leq \exists M$ を満たす定数 M が存在するとき、 \mathcal{P} を有界多面体と呼ぶ。

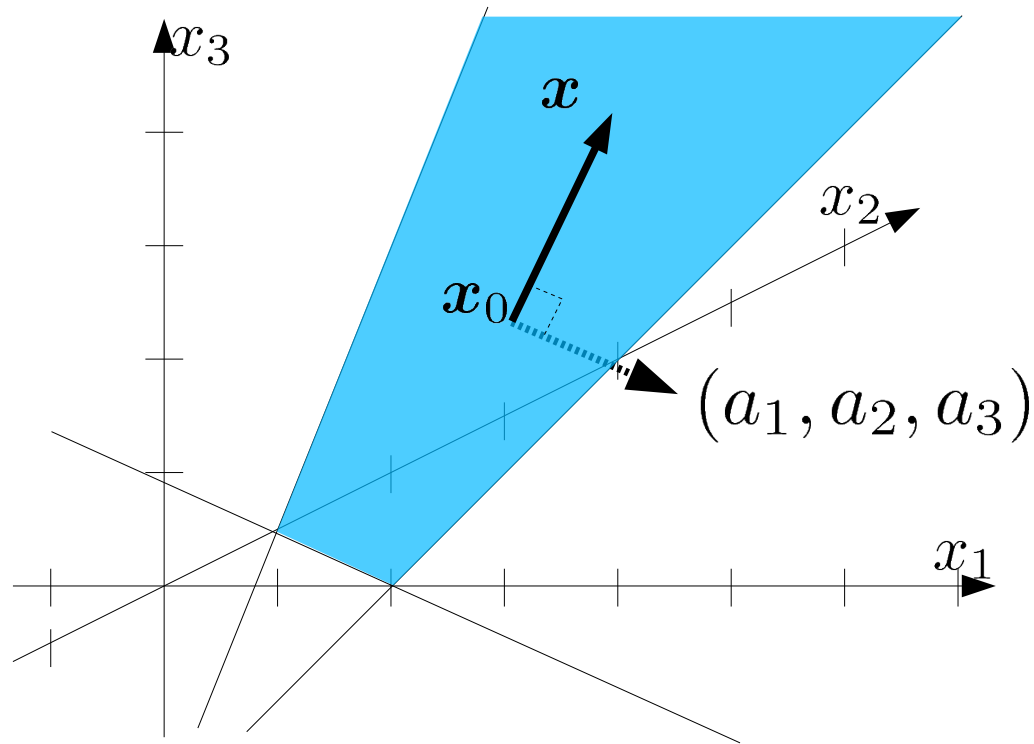
線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体:

$$A_1 = (a_1, a_2, a_3), b_1 = b_1 \quad A_1 x_0 = b_1$$

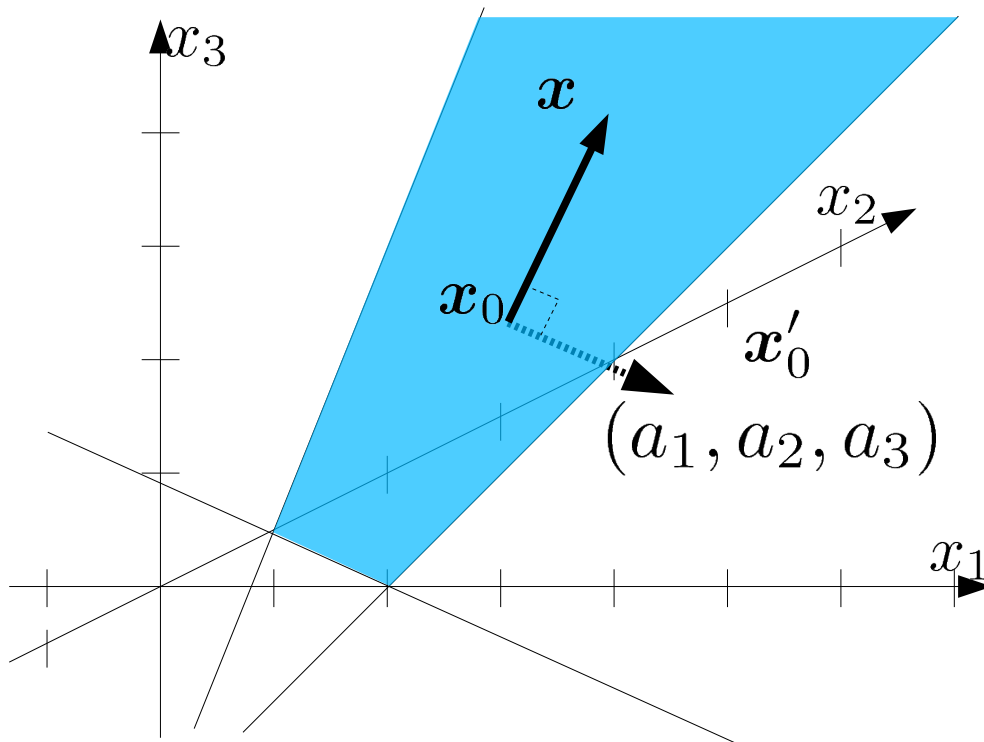


線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体: $A_1 = (a_1, a_2, a_3), b_1 = b_1$



$$\{x \mid A_1(x - x_0) = 0\}$$

$$A_1 x_0 = b_1$$

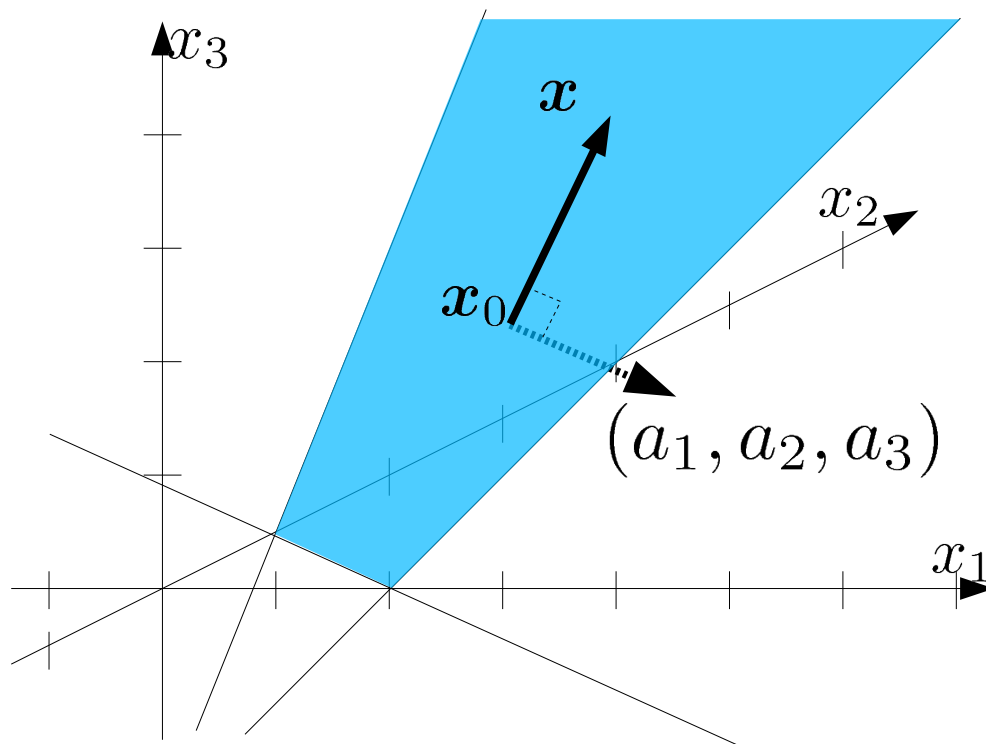
x_0 を通り、 A_1 に直交する平面

線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体: $A_1 = (a_1, a_2, a_3), b_1 = b_1$



$$\{x \mid A_1(x - x_0) = 0\}$$
$$A_1 x_0 = b_1$$

平行移動

$$\{x' \mid A_1(x' - x'_0) = 0\}$$

$$A_1(x' - x'_0 + x_0 - x_0) = 0 \Rightarrow A_1 x' = A_1(x_0 + (x'_0 - x_0))$$

$$= b_1 + A_1(x'_0 - x_0) > b_1 \text{ 元の平面に対して } A_1 \text{ と同じ側}$$

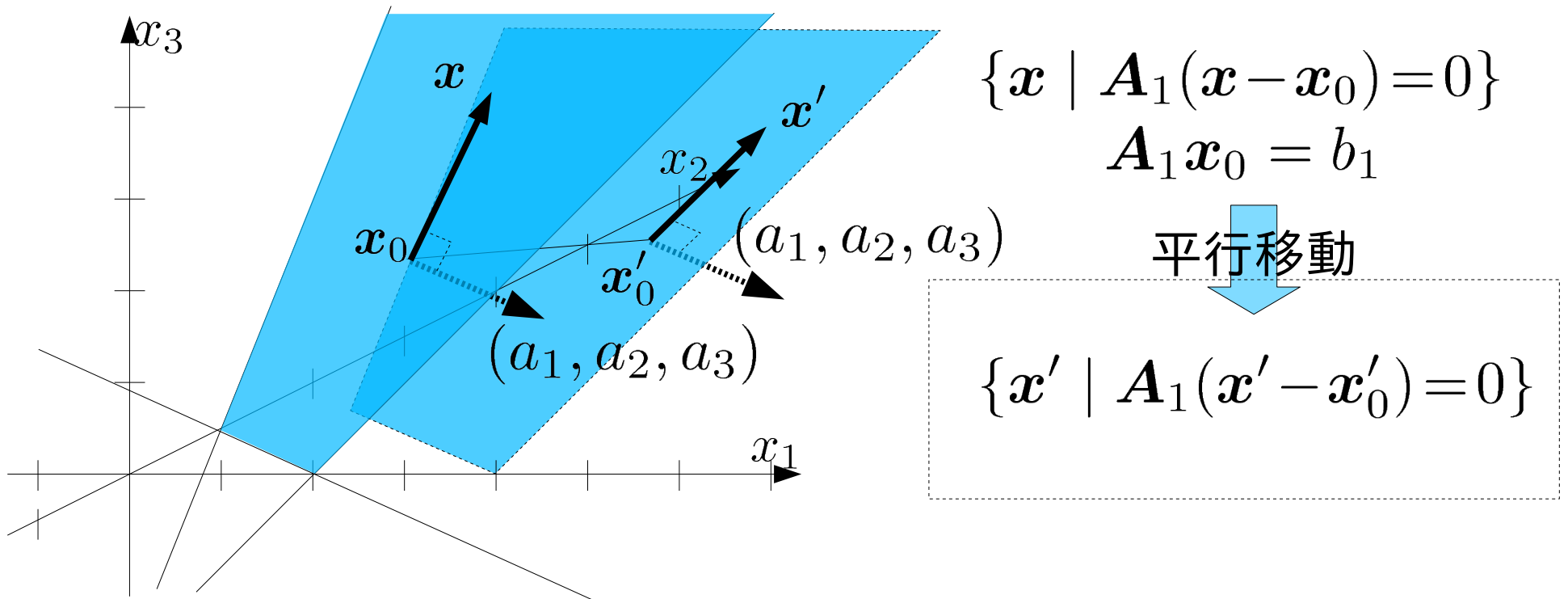
$$< b_1 \text{ 元の平面に対して } A_1 \text{ と反対側}$$

線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体: $A_1 = (a_1, a_2, a_3), b_1 = b_1$



$$A_1(x' - x'_0 + x_0 - x_0) = 0 \Rightarrow A_1 x' = A_1(x_0 + (x'_0 - x_0))$$

$= b_1 + A_1(x'_0 - x_0) > b_1$ 元の平面に対して A_1 と同じ側
 $< b_1$ 元の平面に対して A_1 と反対側

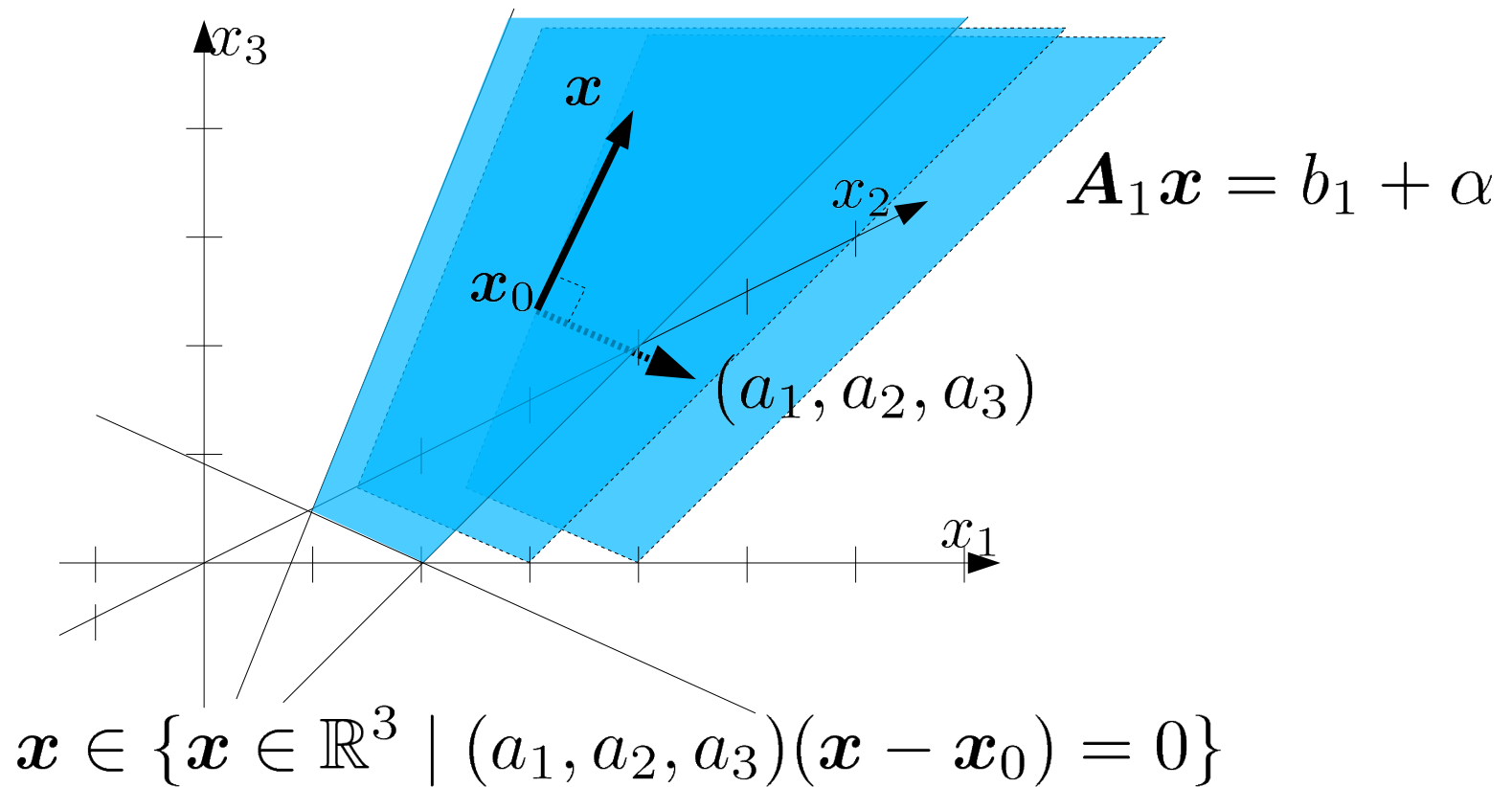
線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体:

$$A_1 = (a_1, a_2, a_3), b_1 = b_1 \quad A_1 x_0 = b_1$$



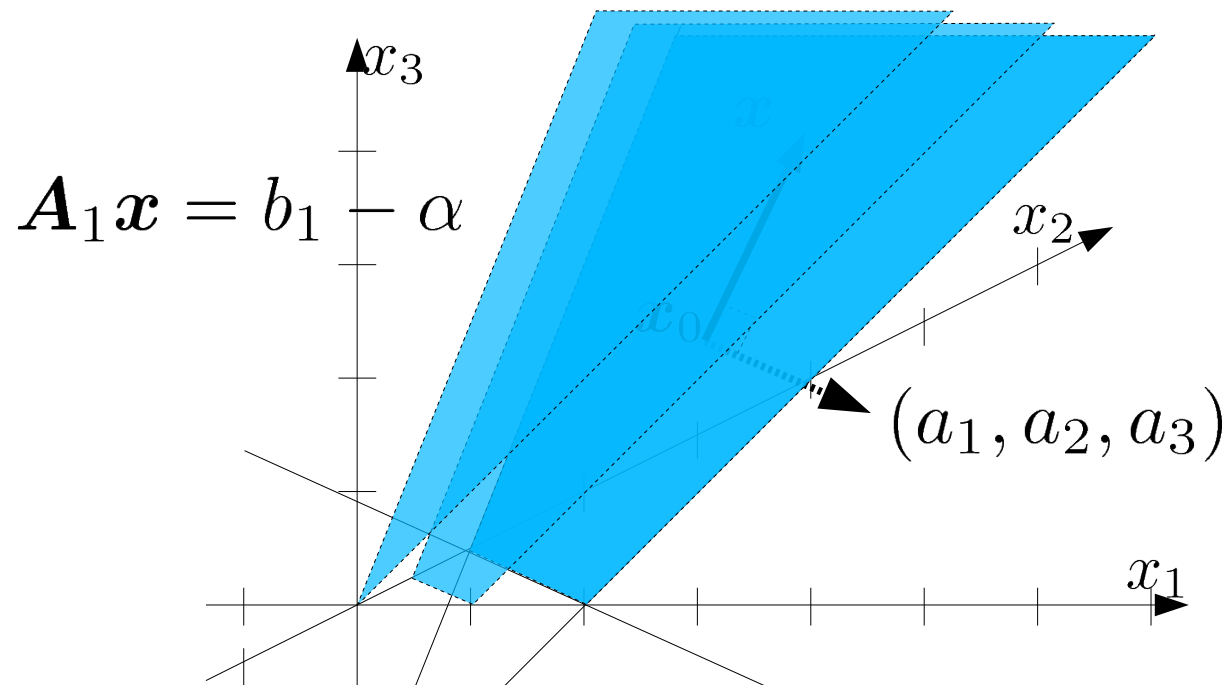
線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

3次元の平面を構成する多面体:

$$A_1 = (a_1, a_2, a_3), b_1 = b_1 \quad A_1 x_0 = b_1$$



$$x \in \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(x - x_0) = 0\}$$

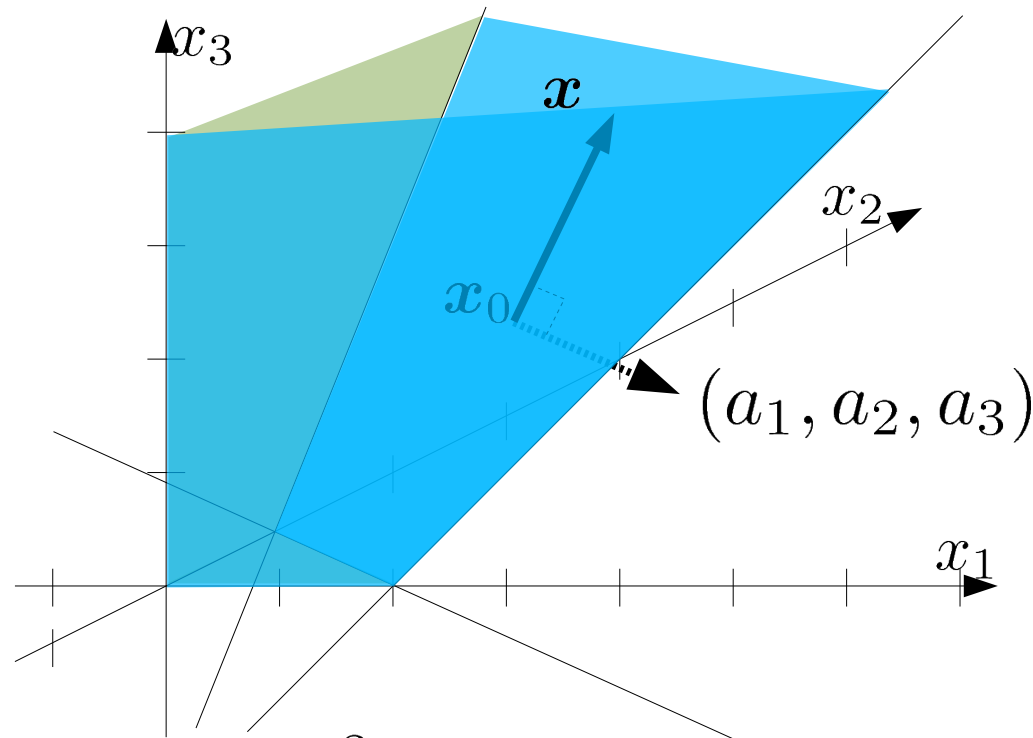
線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

3次元領域を2分する多面体:

$$A_2 = (a_1, a_2, a_3), b_2 = b \quad A_2 x_0 = b$$



$$x \in \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(x - x_0) = 0\}$$

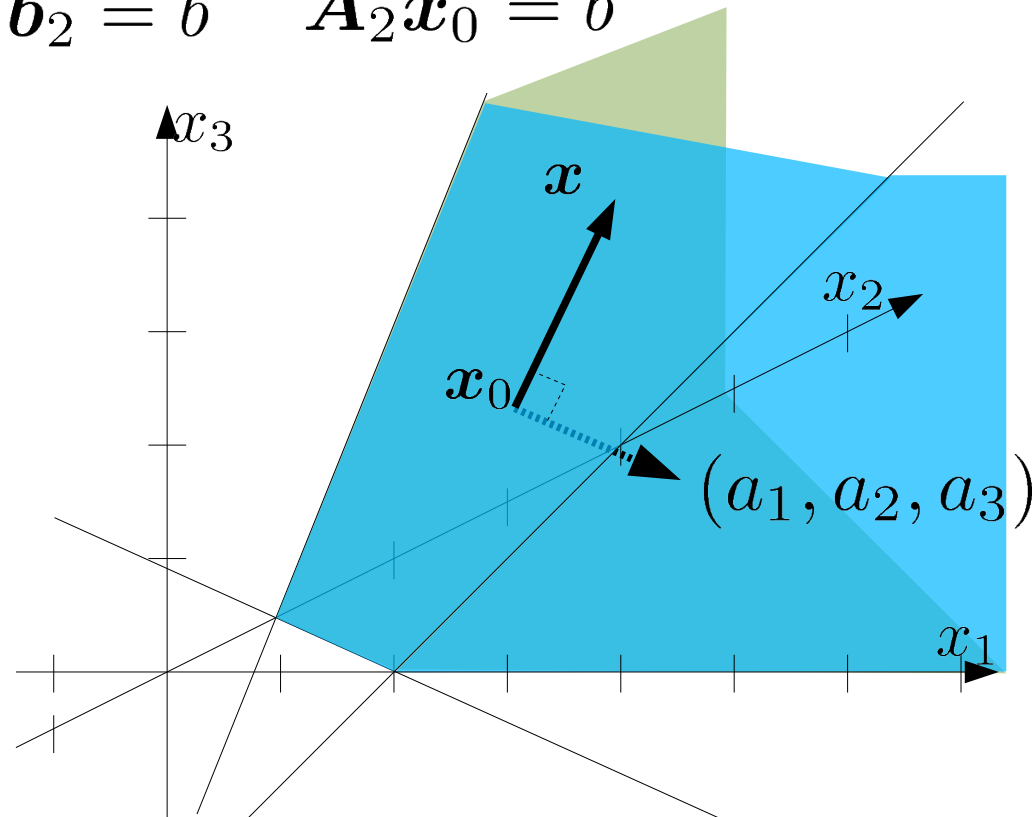
線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

3次元領域を2分する多面体:

$$A_2 = -(a_1, a_2, a_3), b_2 = b \quad A_2 x_0 = b$$



$$x \in \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(x - x_0) = 0\}$$

線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

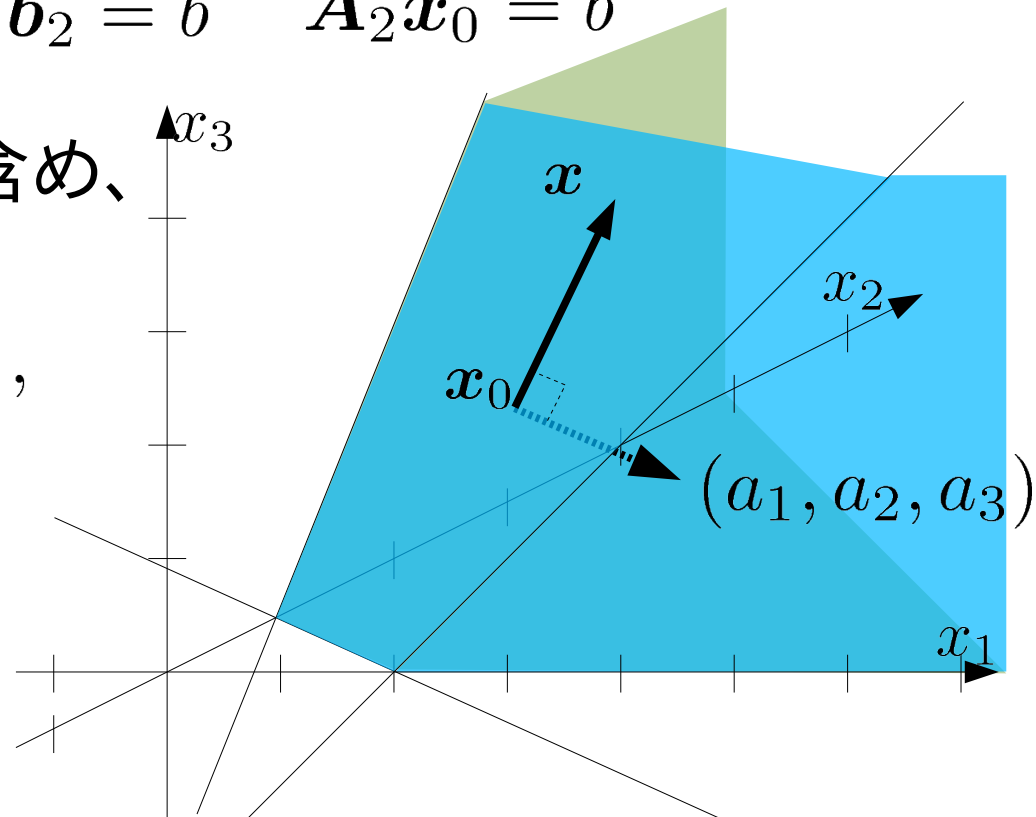
3次元領域を2分する多面体:

$$A_2 = -(a_1, a_2, a_3), b_2 = b \quad A_2 x_0 = b$$

正確には非負条件も含め、

$$A_2 = \begin{pmatrix} -(a_1, a_2, a_3) \\ -I \end{pmatrix},$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} b \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$



$$x \in \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(x - x_0) = 0\}$$

線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

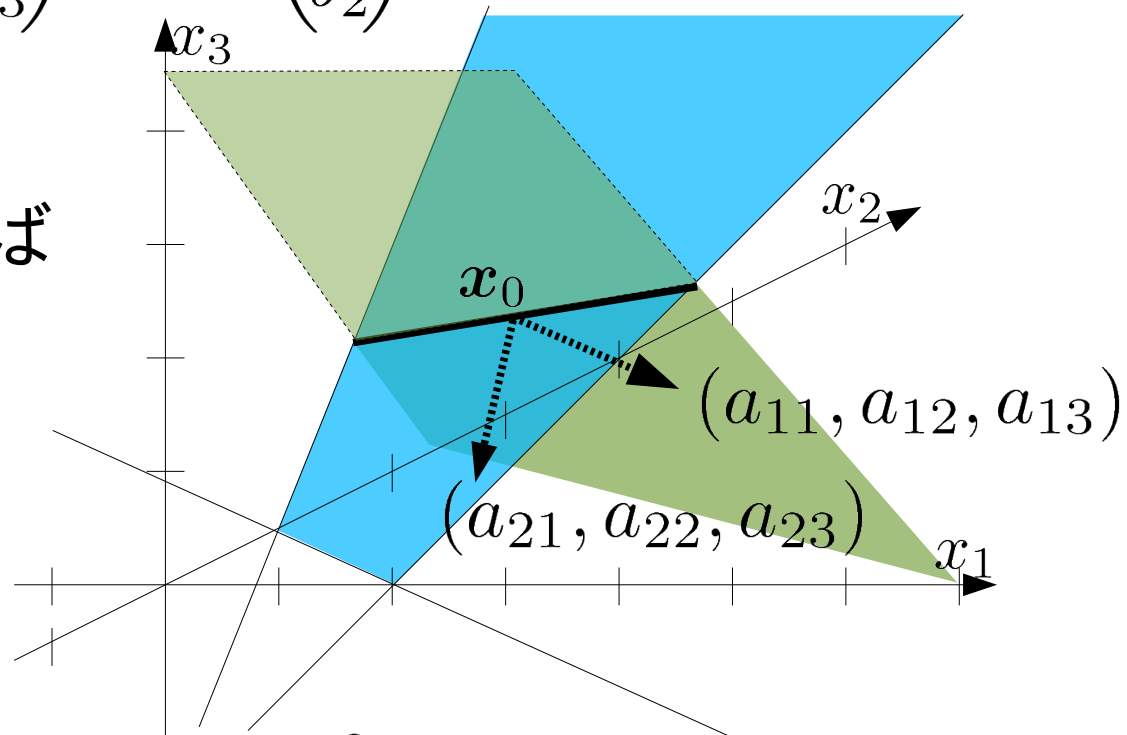
$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

3次元の直線を構成する多面体:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$A_1 x_0 = b_1$$

非負条件を入れれば
線分になる



$$x \in \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (a_1, a_2, a_3)(x - x_0) = 0\}$$

線形計画問題と多面体

- 妥当不等式

P が \mathbb{R}^n の多面体のとき、 $\forall x \in P \Rightarrow a^T x \leq b$ なら
 $a^T x \leq b$ は P の妥当不等式

- 図の多面体を P とすれば

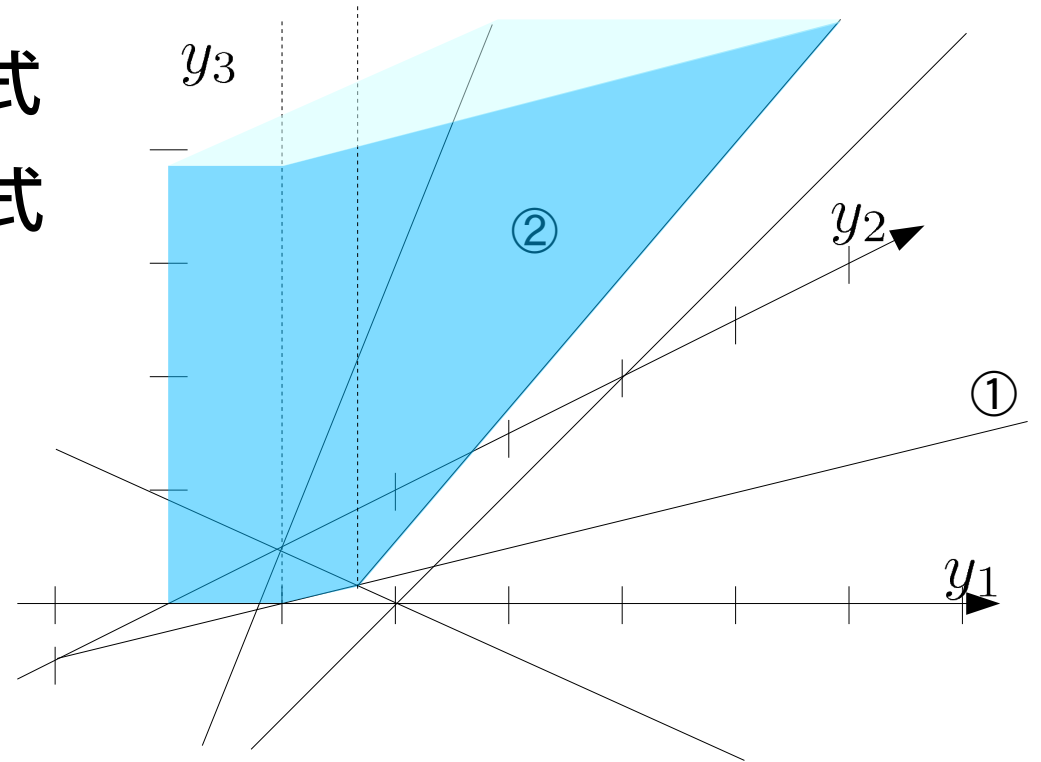
$y_1 - y_2 \leq 2$ は P の妥当不等式

P を与える①②③も妥当不等式

① $y_1 - y_2 \leq 1$

② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$

③ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$



線形計画問題と多面体

- 支持超平面

P が \mathbb{R}^n の多面体、 $a^T x \leq b$ が P の妥当不等式するとき、 $a^T x \leq b$ の境界が P と交わりを持つならこの境界を支持超平面と呼ぶ

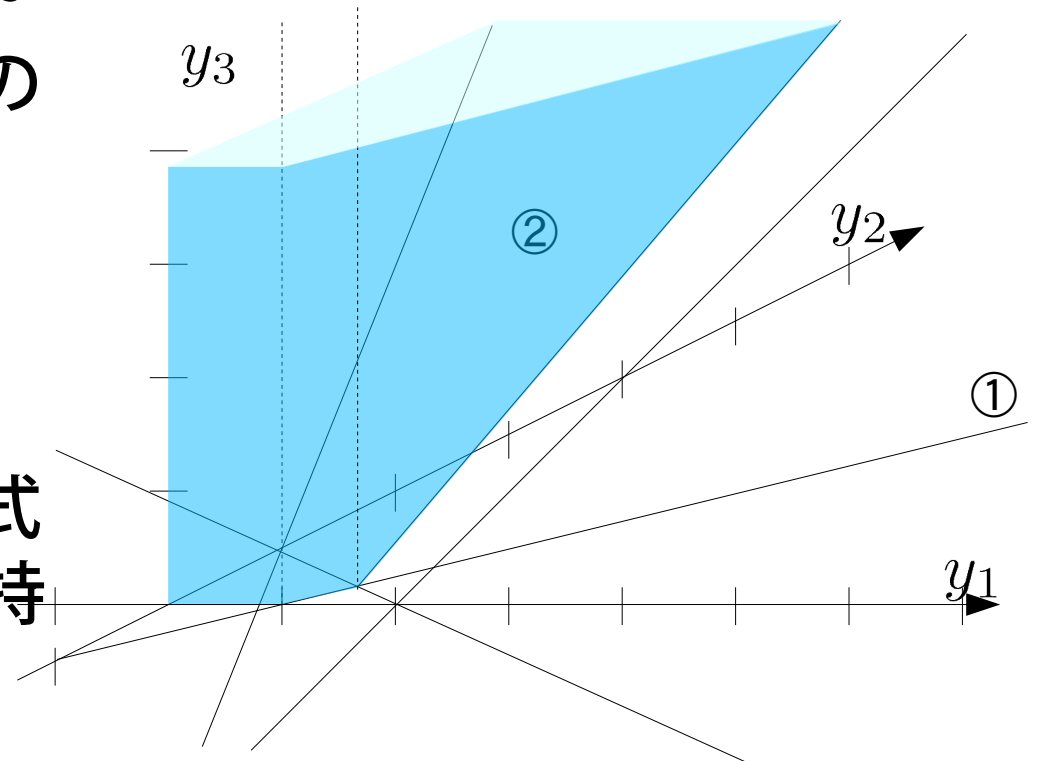
- ①②③の境界は図の多面体の支持超平面

① $y_1 - y_2 \leq 1$

② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$

③ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

$y_1 - y_2 \leq 2$ は P の妥当不等式ではあるが、その境界は支持超平面ではない



線形計画問題と多面体

定義: n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の多面体 \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2\}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{N_1} \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N_1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_{N_2} \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_{N_2} \end{pmatrix}$$

多面体を構成する平面の法線ベクトル:

$$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N_1}, \mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_{N_2}$$

不等式標準形の不等式制約の係数に対応する
「minimize z , subject to $Ax \geq b$ 」のとき、 A の行ベクトル毎に平面が考えられる。

$$A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)^T, b = (b_1, \dots, b_n)$$

$$\text{平面 } \ell : \mathbf{a}_\ell^T x \geq b_\ell \quad \ell = 1, \dots, n$$

演習問題9

課題1: 次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求めよ。

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && z = x_1 + 2x_2 \\ &\text{subject to} && x_1 + x_2 \geq 4, \quad x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0, \quad x_2 \leq 3, \\ &&& x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

課題2: 主問題と双対問題の実行可能領域を、目的関数を表す平面とともに図示し、図を用いてそれぞれの最適解を示せ。

演習問題9

課題1: 次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求めよ。

$$z = x_1 + 2x_2$$

minimize $x_1 + x_2 \geq 4, x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0, x_2 \leq 3,$
subject to $x_1, x_2 \geq 0.$

minimize

$$z = (1, 2)\mathbf{x}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \geq \mathbf{0}$$

maximize

$$w = (4, 2, -3)\mathbf{y}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T \geq \mathbf{0}$$

演習問題9

課題1: 次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

$$z = x_1 + 2x_2$$

minimize $x_1 + x_2 \geq 4, x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0, x_2 \leq 3,$
subject to $x_1, x_2 \geq 0.$

minimize

$$z = (1, 2)\mathbf{x}$$

subject to

3つの平面

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2つの平面

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \geq \mathbf{0}$$

maximize

$$w = (4, 2, -3)\mathbf{y}$$

2つの平面

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T \geq \mathbf{0}$$

3つの平面

練習問題9

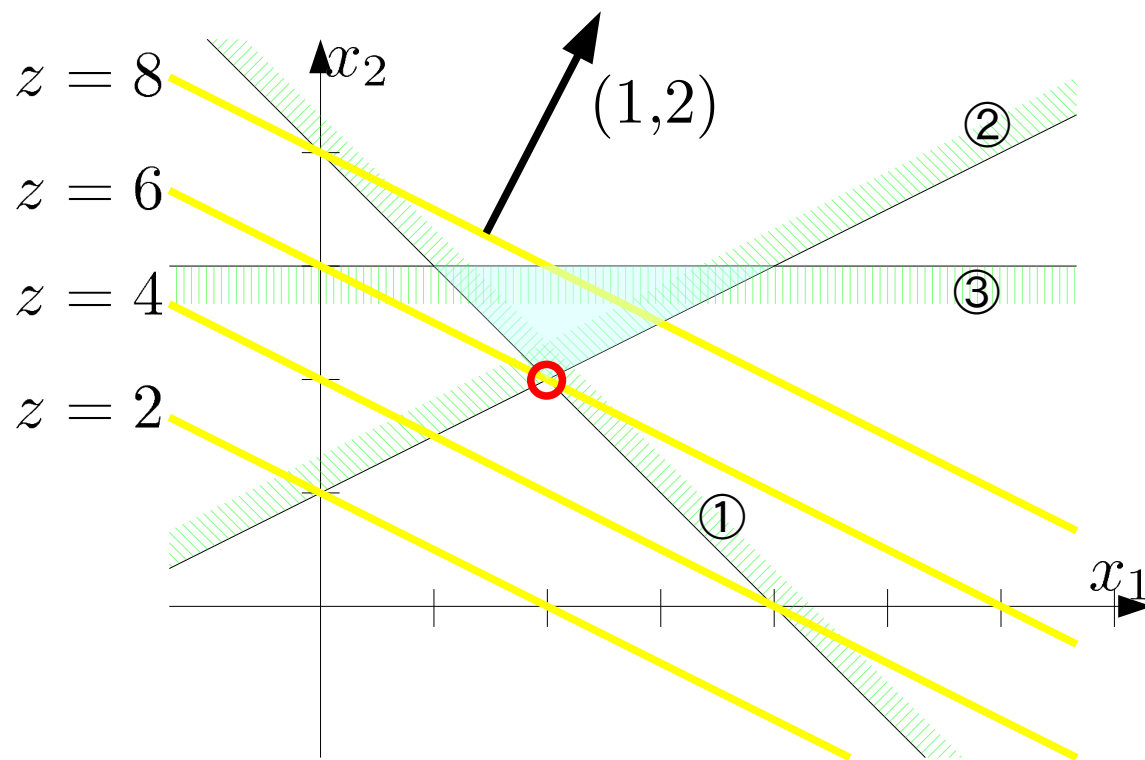
minimize

$$z = (1, 2)\mathbf{x}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \geq \mathbf{0}$$



練習問題9

maximize

$$w = (4, 2, -3)\mathbf{y}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T \geq \mathbf{0}$$

