

数理計画法

第11回:内点法1

前回(第10回)授業と演習問題の復習

復習：演習問題10

次の線形計画問題の双対問題を求め、主問題・双対問題の実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

また、制約式・目的関数に関わる平面の法線ベクトルを描き、双対変数どうしの関係を説明せよ

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \\ z = x_1 + x_2 & \\ \text{subject to} & \\ x_1 + 2x_2 \leq 2 & \\ 2x_1 + x_2 \leq 2 & \\ x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \\ w = 2y_1 + 2y_2 & \\ \text{subject to} & \\ y_1 + 2y_2 \geq 1 & \\ 2y_1 + y_2 \geq 1 & \\ y_1, y_2 \geq 0 & \end{array}$$

復習：演習問題10

実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

主問題

maximize

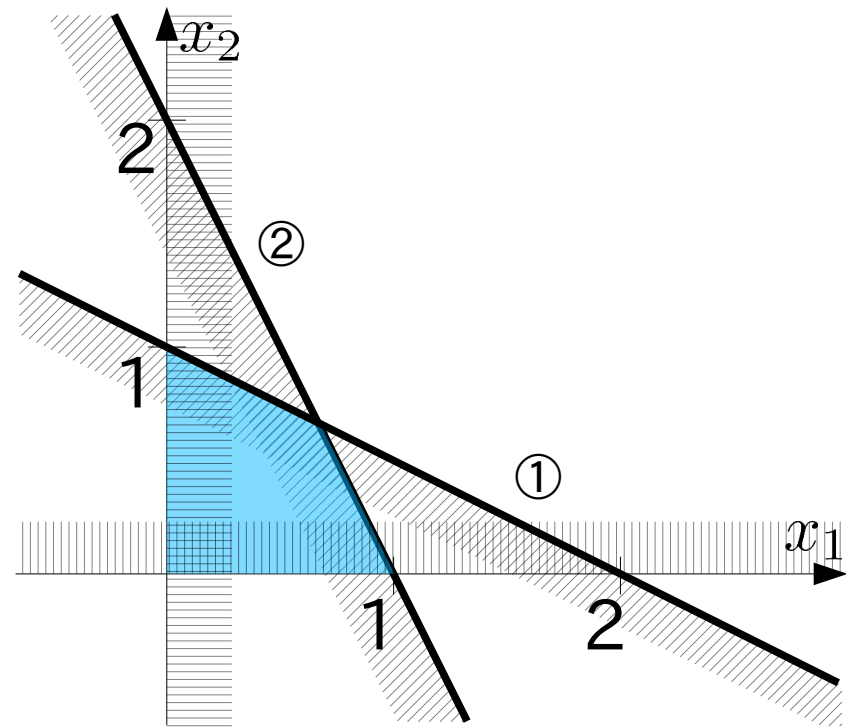
$$z = x_1 + x_2$$

subject to

$$x_1 + 2x_2 \leq 2 \quad \textcircled{1}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2 \quad \textcircled{2}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



復習：演習問題10

実行可能領域に対応する多面体をグラフに描け

双対問題

minimize

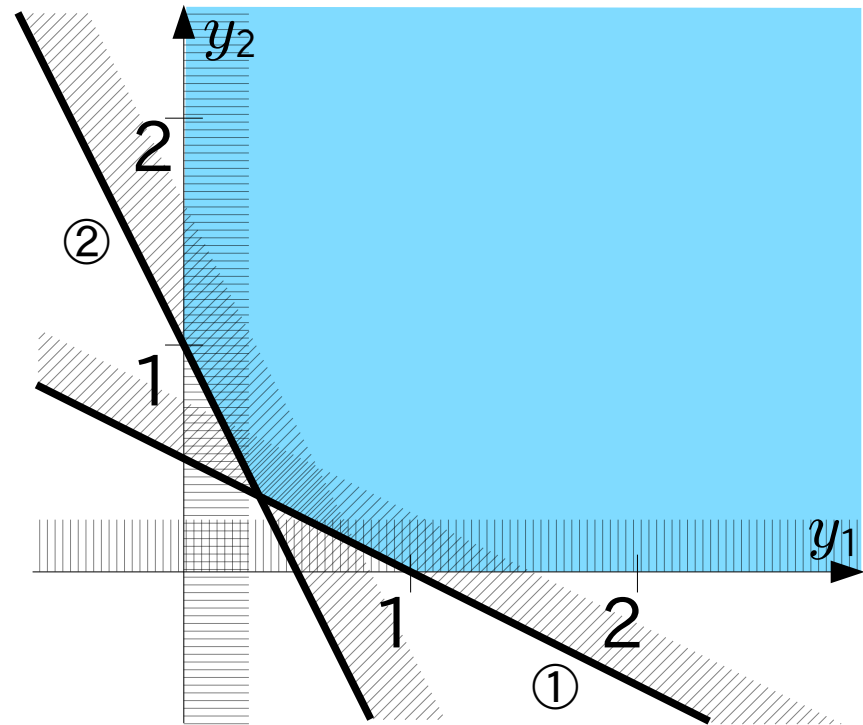
$$w = 2y_1 + 2y_2$$

subject to

$$y_1 + 2y_2 \geq 1 \quad \textcircled{1}$$

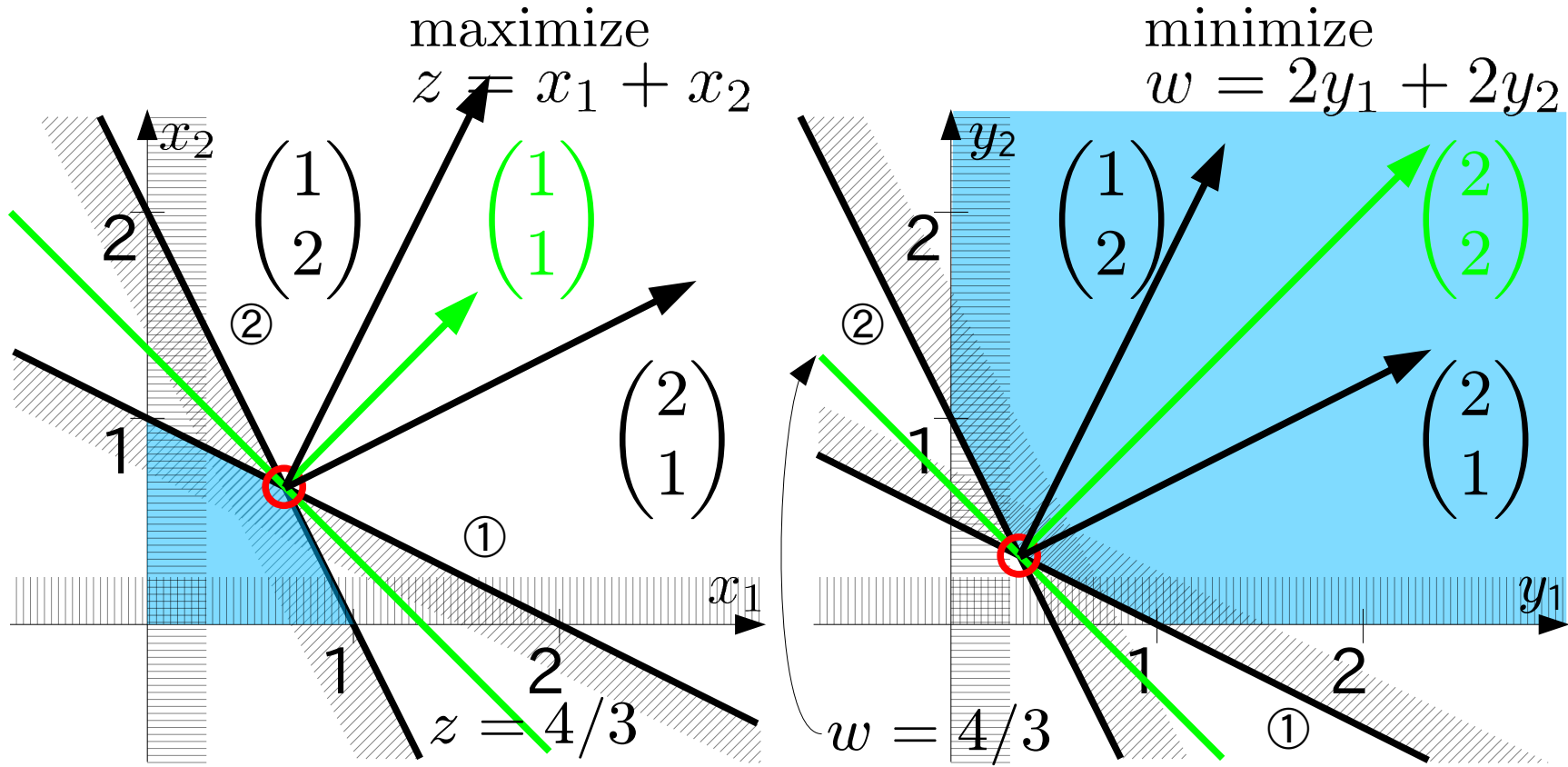
$$2y_1 + y_2 \geq 1 \quad \textcircled{2}$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$



復習：演習問題10

最適解を与える制約式・目的関数に関する平面の法線ベクトルを描き、



復習：演習問題10

双対変数同士の関係を説明せよ

目的関数の法線ベクトル
= y_1 × ①の法線ベクトル
+ y_2 × ②の法線ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

目的関数
= y_1 × 制約式① + y_2 × 制約式②

$$z = x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} 2 + \frac{1}{3} 2 = \frac{4}{3}$$

主問題

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \\ & z = x_1 + x_2 \\ &\text{subject to} \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \quad \text{①} \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \quad \text{②} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

最適解：

$$\begin{aligned} &(z, x_1, x_2, s_1, s_2) \\ &= \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0 \right) \end{aligned}$$

復習：演習問題10

双対変数同士の関係を説明せよ

目的関数の法線ベクトル
= x_1 × ①の法線ベクトル
+ x_2 × ②の法線ベクトル

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

目的関数

= x_1 × 制約式① + x_2 × 制約式②

$$w = 2y_1 + 2y_2 \geq \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$$

双対問題

minimize

$$w = 2y_1 + 2y_2$$

subject to

$$y_1 + 2y_2 \geq 1 \quad \text{①}$$

$$2y_1 + y_2 \geq 1 \quad \text{②}$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

最適解

$$\begin{aligned} & (w, y_1, y_2, t_1, t_2) \\ & = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0 \right) \end{aligned}$$