数理計画法

第12回：内点法2

前回（第11回）授業と演習問題の復習

復習：演習問題11

課題1：次の線形計画問題を書換えて自己双対型線形計画問題を
導きなさい。

minimize $z = x_1 + 2x_2$

subject to
$$
\begin{aligned}
& x_1 + x_2 \geq 4 \\
& x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

課題2：元の問題の最適解が求めた自己双対型線形計画問題の実行可能
解になっていることを確認してください。

復習：演習問題11

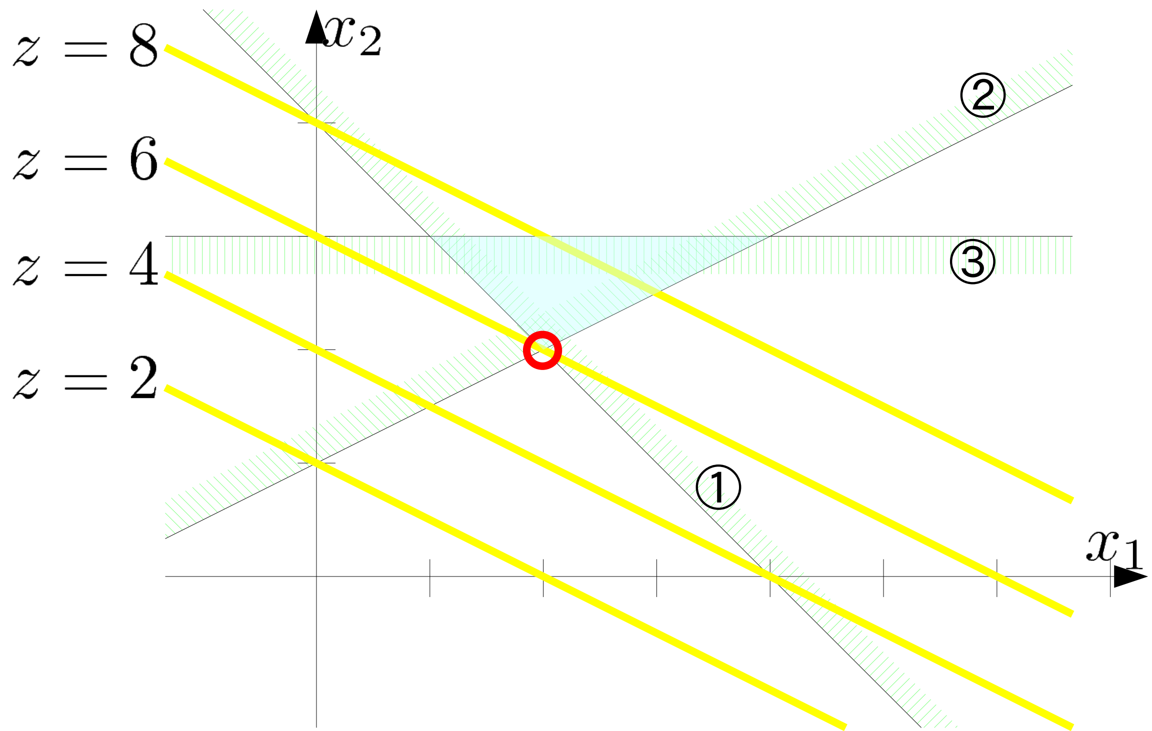
主問題は2変数

$$\text{minimize}$$
$$z=x_1+2x_2$$
$$\text{subject to}$$
① $x_1+x_2\geq 4$

② $x_2-2x_2+2\leq 0$

③ $x_2\leq 3$

$x_1,x_2\geq 0$



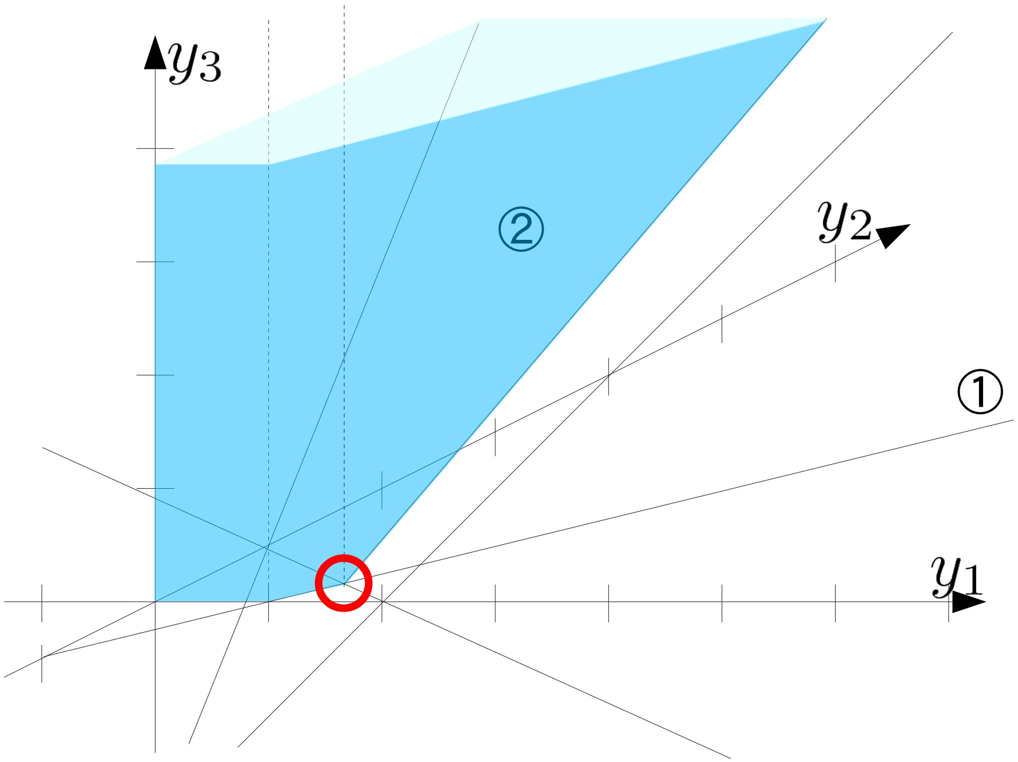
最適解：

$$z=6,s_1=0,s_2=0,s_3=1,x_1=2,x_2=2$$

復習:演習問題11

双対問題は3変数

maximize
$w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3$
subject to
① $y_1 - y_2 \leq 1$
② $y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$
$y_1, y_2, y_3 \geq 0$



最適解:

$$w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$$

復習:演習問題11

主問題・双対問題を整理すると、

minimize
$z = x_1 + 2x_2$
subject to
$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & \geq & 4 \\ -x_1 & +2x_2 & \geq & 2 \\ 0x_1 & -x_2 & \geq & -3 \end{array}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

maximize
$w = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3$
subject to
$$\begin{array}{rrrcr} y_1 & -y_2 & 0y_3 & \leq & 1 \\ y_1 & +2y_2 & -y_3 & \leq & 2 \end{array}$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

等式標準形を用いれば、

minimize
$z = c^{\mathrm{T}} x$
subject to
$Ax - s = b \quad x, s \geq 0$

maximize
$w = b^{\mathrm{T}} y$
subject to
$A^{\mathrm{T}} y + t = c \quad y, t \geq 0$

ただし

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b^{\mathrm{T}} = [4\ 2\ {-3}] \quad c^{\mathrm{T}} = [12] \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

復習：演習問題11

自己双対型の問題の制約式を考える

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} O & A & -b \\ A^{\mathrm{T}} & O & c \\ b^{\mathrm{T}} & -c^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

制約式を考えて、$\mathcal{A}[y^{\mathrm{T}}, x^{\mathrm{T}}, \tau]^{\mathrm{T}} \geq O$

なので、その実行可能解は元の主・双対問題の実行可能解

さらに元の最適解を考えれば、$[y^{\mathrm{T}}, x^{\mathrm{T}}] = [4/3, 1/3, 0, 2, 2]$

となり、自己双対型問題の制約式を満たし、$\tau = 1$において

$$\mathcal{A}[y^{\mathrm{T}}, x^{\mathrm{T}}, \tau]^{\mathrm{T}} = [s^{\mathrm{T}}, t^{\mathrm{T}}, 0]^{\mathrm{T}} \geq O$$