演習問題1

次の3つの関数を目的関数とした制約なし最小化問題を考える。

(A)　$x_1{}^2 - 2x_1x_2$,　　(B)　$x_1{}^2 - x_2{}^2$,　　(C)　$2x_1{}^2 + x_2{}^2$,

問1：各目的関数の最急降下ベクトルを示せ。

問2：初期点 $x_1 = 1,\ x_2 = 1$から最急降下法を用いて解くことを考える。最初の 1 ステップを解き、更新後の変数値を示せ。直線探索では厳密な解が解けたものとして良い。

（ヒント）

初期点を$\boldsymbol{x}_0$とすれば最急降下法の次のステップの近似解は$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 - t\nabla f\,(\boldsymbol{x}_0)$と表すことができます。直線探索問題は $f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_0 - t\nabla f\,(\boldsymbol{x}_0))$の最小化問題です。

この問題で示された（A）～（C）であれば、1変数tの停留点を求めることは易しいので近似計算をする必要はありません。

演習問題2

次の3つの関数を目的関数とした制約なし最小化問題を考える。

(A)　${x_1}^2 - 2x_1x_2$,　　(B)　${x_1}^2 - {x_2}^2$,　　(C)　$2{x_1}^2 + {x_2}^2$,

問1：各目的関数のニュートン方向ベクトルを示せ。

問2：初期点 $x_1 = 1,\ x_2 = 1$から最急降下法を用いて解くことを考える。最初の 1 ステップを解き、更新後の変数値を示せ。

（演習問題1をニュートン法に置き換えたものです。）

演習問題3

次の最小化問題にLagrangeの未定係数法を適用し計算過程とともに最小解を示せ。

$$\min.\quad f(x_1,\ x_2) = ax_1 + bx_2 + c,\ \text{s.t.}\ \ g(x_1,\ x_2) = {x_1}^2 + {x_2}^2 = 1.$$

ヒントと注意：

例題の制約式と目的関数を入れ替えた問題です。例題の図から最適解は明らかでしょう。

停留点が複数あることに注意してください。

演習問題4

次の最小化問題のKKT条件を示し、最適解を求めよ。

$$\text{min.}\quad f(x_1,\ x_2) = {x_1}^2 + {x_2}^2,\ \text{s.t.}\ h(x_1,\ x_2) \geqq ax_1 + bx_2 + c.$$

ヒントと注意:

これも例題の変形です。

a,b,c の値による影響も考慮してください。

煩雑であれば、$a=b=c=1$ の場合だけを考えても良いです。