2020数値最適化

学習教育目標と科目との対応について

学習・教育目標(C):

数学、自然科学等の基礎的知識と情報工学に関する専門的な知識を有し、それらを情報社会における諸問題の探求・解決へ自主的・継続的に応用できる人材を育成する。

キーワード: 離散数学および確率・統計を含めた数学的知識

データサイエンスや機械学習への応用において必ず必要になる最適化理論について、その基礎を学びます。この科目では，いわゆる最適化法のうち，連続最適化法に関わるものを扱います。

到達目標：

1. 連続最適化のアルゴリズムとしての勾配法について、知っている
2. 線形計画問題と線形計画法について、説明できる
3. 一般・多次元の場合のラグランジュの未定係数法について、説明できる

参考書

- 田村明久・村松正和「最適化法」共立出版，2002年
  - 1章,2章の線型計画問題部分が丁寧
- 金谷健一「これなら分かる最適化数学」共立出版、2005年、
  - 簡略な部分もあるが、説明が易しい、授業全体には足りない
- S.Boyd・L.Vandenberghe「Convex Optimization」 Cambridge Univ. Press、2004、
  - 授業範囲外も含め色々と載っている
  - 応用（使い方と言うべき？）例が豊富
- 今野浩「カーマーカー特許とソフトウェア：数学は特許になるか」 中央公論社、1995年、
  - 読み物、「何のための勉強か？」を知りたい人のため

数値最適化

第5回：線形計画問題と線形計画法

数理計画法＝数理計画問題−問題+法
線形計画法＝線形計画問題−問題+法

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z = f(x_1, \ldots, x_n) \\ \text{subject to} & g(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in X \end{array}$$

与えられた制約式のもとである関数を最大化する問題

線形計画問題⊂数理計画問題⊂最適化問題

数理モデル作成の例

ミックスジュース5Lあたりの原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題：利益を最大化する2種類のミックスジュースの生産量は？

変数　：生産量　トロピカルミックス　$x_1 \times 5[\mathrm{L}]$
　　　　　　　　フレッシュミックス　$x_2 \times 5[\mathrm{L}]$

制約式　：供給量　マンゴー液　$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3[\mathrm{L}]$
　　　　　　　　　オレンジ液　$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3[\mathrm{L}]$

目的関数：利益　$600x_1 + 500x_2$

負の生産量が無いことに注意

数理計画問題の表現と用語

maximize
$$600x_1 + 500x_2$$
subject to
$$3x_1 + 1x_2 \leq 45$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

最大化(minimize:最小化)
目的関数(objective func.)

制約式(constraints)

最適解(optimal solution)　目的関数の最大値を与える解
　※大域的/局所的最適解：　あとで、
最適値(optimal value)　　最適解をとる目的関数の値
実行可能解(feasible solution)　　制約式を満たす解
実行可能領域(feasible region)　　実行可能解の集合

数理計画問題の表現と分類

- 変数の性質による分類
  - 連続型：(実数)
  - 離散型：(整数)
- 条件(制約式、目的関数)の性質による分類
  線形、非線形、微分可・不可、連続、不連続、区分線形…

授業で扱うのは、
数値最適化問題
＝連続変数による数理計画問題
線形計画問題→非線形計画問題
の順で扱います

線形計画問題と素朴な解法

ミックスジュース5Lあたりの原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題：利益を最大化する2種類のミックスジュースの生産量は？

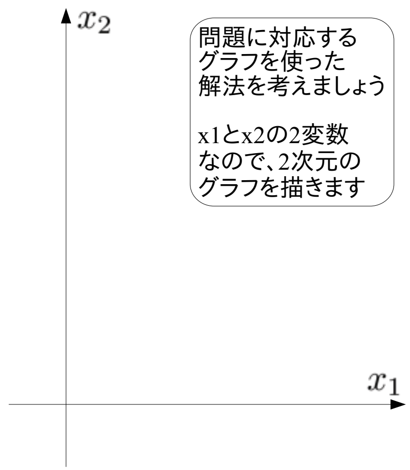
maximize
$$600x_1 + 500x_2$$
subject to
$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

変数：生産量
トロピカルミックス $x_1 (\times 5[\mathrm{L}])$
フレッシュミックス $x_2 (\times 5[\mathrm{L}])$

目的関数も制約式も全て
1次関数であり線形

グラフを利用した解法

maximize
$$600x_1 + 500x_2$$
subject to
$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$



問題に対応するグラフを使った解法を考えましょう

x1とx2の2変数なので、2次元のグラフを描きます

グラフを利用した解法

maximize

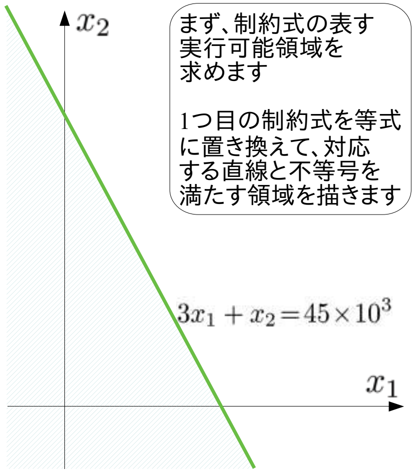
$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$\boxed{3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3}$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$$



まず、制約式の表す実行可能領域を求めます

1つ目の制約式を等式に置き換えて、対応する直線と不等号を満たす領域を描きます

グラフを利用した解法

maximize

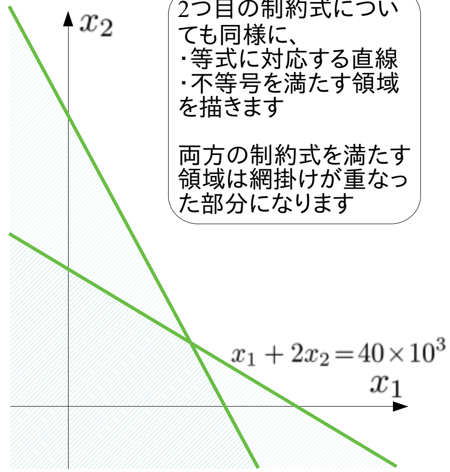
$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$\boxed{x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3}$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$$



2つ目の制約式についても同様に、
・等式に対応する直線
・不等号を満たす領域
を描きます

両方の制約式を満たす領域は網掛けが重なった部分になります

グラフを利用した解法

maximize

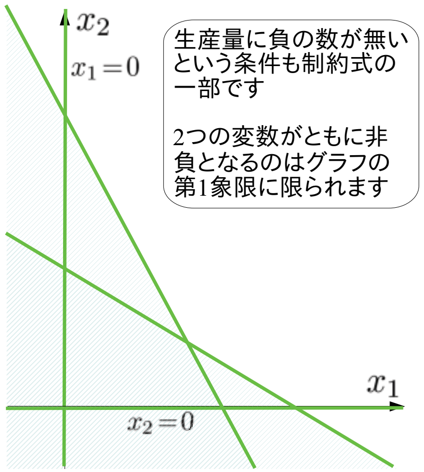
$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$\boxed{\begin{array}{c} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array}}$$

制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$



生産量に負の数が無いという条件も制約式の一部です

2つの変数がともに非負となるのはグラフの第1象限に限られます

グラフを利用した解法

maximize

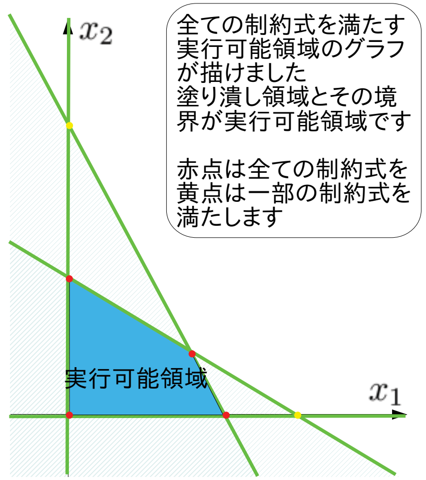
$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

制約式に対応する方程式

$$3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$



全ての制約式を満たす実行可能領域のグラフが描けました
塗り潰し領域とその境界が実行可能領域です

赤点は全ての制約式を
黄点は一部の制約式を
満たします

グラフを利用した解法

maximize

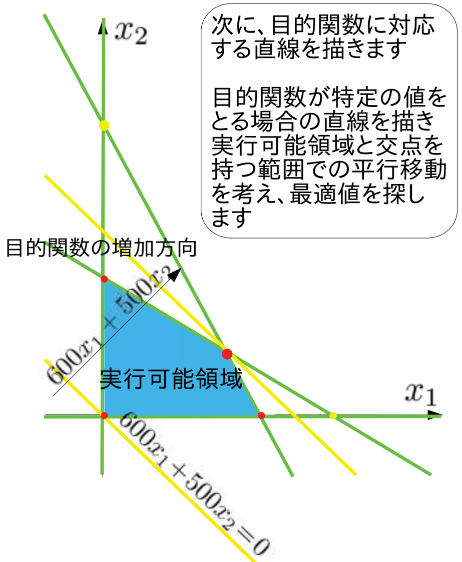
$$\boxed{600x_1 + 500x_2}$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &\le 45 \times 10^3 \\ x_1 + 2x_2 &\le 40 \times 10^3 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

制約式に対応する方程式

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45 \times 10^3 \\ x_1 + 2x_2 &= 40 \times 10^3 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$



次に、目的関数に対応する直線を描きます

目的関数が特定の値をとる場合の直線を描き実行可能領域と交点を持つ範囲での平行移動を考え、最適値を探します

グラフを利用した解法

maximize

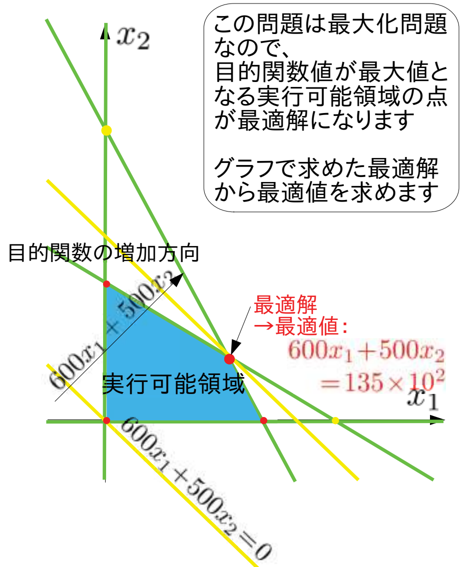
$$\boxed{600x_1 + 500x_2}$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &\le 45 \times 10^3 \\ x_1 + 2x_2 &\le 40 \times 10^3 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

制約式に対応する方程式

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45 \times 10^3 \\ x_1 + 2x_2 &= 40 \times 10^3 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$



この問題は最大化問題なので、目的関数値が最大値となる実行可能領域の点が最適解になります

グラフで求めた最適解から最適値を求めます

グラフを利用した解法

maximize

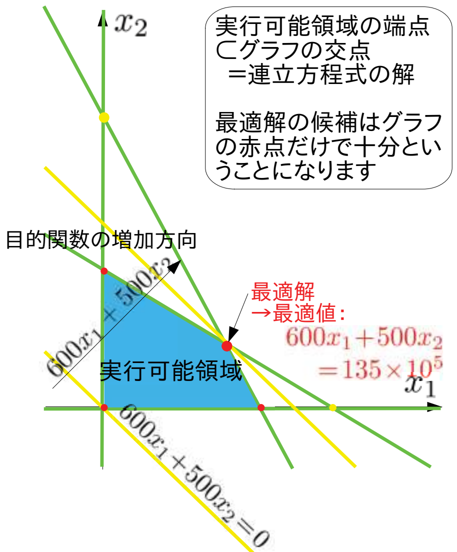
$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &\le 45 \times 10^3 \\ x_1 + 2x_2 &\le 40 \times 10^3 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

制約式に対応する方程式

$$\boxed{\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45 \times 10^3 \\ x_1 + 2x_2 &= 40 \times 10^3 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}}$$



実行可能領域の端点
⊂グラフの交点
　＝連立方程式の解

最適解の候補はグラフの赤点だけで十分ということになります

グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &\le 45 \times 10^3 \\ x_1 + 2x_2 &\le 40 \times 10^3 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

制約式に対応する方程式

$$\boxed{\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45 \times 10^3 \\ x_1 + 2x_2 &= 40 \times 10^3 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}}$$

最適解が必ずグラフの交点に含まれるなら、

グラフの交点
　＝連立方程式の解

だけを調べれば十分だということになります

グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$600x_1$ …

subject to

$3x_1 + 1x$ …

$x_1 + 2x$ …

全ての交点を調べるために方程式に番号を振って交点を求める組合せを書き出します

2変数/4制約式なので2つずつ組合せて4C2=6通りの組合せ=交点となります

方程式				
①②				
①③				
①④				
②③				
②④				
③④				

制約式に対応する方程式

① $3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$

② $x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$

③ $x_1 = 0$

④ $x_2 = 0$

グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

方程式	x_1 $(\times 10^3)$	x_2		実行可能?
①②	10	15		○
①③	0	45		×
①④	15	0		○
②③	0	20		○
②④	40	0		×
③④	0	0		○

組合せた方程式をそれぞれ解いて全ての交点を求めます

交点の値を制約式に代入して全ての制約式を満たすかどうかを交点毎に調べます

制約式に対応する方程式

① $3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$

② $x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$

③ $x_1 = 0$

④ $x_2 = 0$

グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

方程式	x_1 $(\times 10^3)$	x_2	目的関数値	実行可能?
①②	10	15	13500000	○
①③	0	45		×
①④	15	0	9000000	○
②③	0	20	10000000	○
②④	40	0		×
③④	0	0	0	○

全ての制約式を満たす交点だけを調べれば良いので実行可能な交点の目的関数値を求めます
グラフを使う方法の赤点だけを調べることになります

目的関数値を比較して最適解・最適値を見つけます

制約式に対応する方程式

① $3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$

② $x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$

③ $x_1 = 0$

④ $x_2 = 0$

グラフの交点を総当たりする解法

maximize

$$600x_1 + 500x_2$$

subject to

$$3x_1 + 1x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

方程式	x_1 $(\times 10^3)$	x_2	目的関数値	実行可能?
①②	10	15	13500000	○
①③	0	45		×
①④	15	0	9000000	○
②③	0	20	10000000	○
②④	40	0		×
③④	0	0	0	○

1. 制約式に対応する方程式と交点を定める方程式の組合せを全て書き出す
2. 交点を求め実行可能領域にあることを確認する
3. 実行可能な交点で目的関数値を求めたなかから最適値を探す

制約式に対応する方程式

① $3x_1 + 1x_2 = 45 \times 10^3$

② $x_1 + 2x_2 = 40 \times 10^3$

③ $x_1 = 0$

④ $x_2 = 0$

線形計画問題の素朴な解法

グラフを用いた解法

- 2〜3変数までの問題に適用可能
  - 3変数の問題ではグラフは3次元
  - 実行可能領域は多面体
  - 現実社会の問題は数十〜数百万変数
- 計算機アルゴリズムとして構成し難い

交点を総当たりする解法

- 多変数の問題に適用可能
  - n変数の問題でn元連立方程式を問いて交点を求める
  - 機械的に交点を計算するアルゴリズムが考えられる
- 交点の実行可能性を調べる手間がある
- 変数が増えると無駄な交点計算が増える

演習問題1

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

上記の最適化問題について、

課題1： maximize ... subject to ... の形式で
線形計画問題を表現しなさい。

課題2：グラフを用いる解法・交点を総当たりする解法
で最適解を求めなさい。

演習問題1

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

まず変数を定義、
問題の表現と自然
に対応し、誤り難い
選択をする
「求められている値
＝生産量」

珈琲飲料の1日当り生産量を $x_1 \times 100[\mathrm{g}]$ とする

珈琲牛乳の1日当り生産量を $x_2 \times 100[\mathrm{g}]$ とする

演習問題1

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

次に制約式を導出、
問題に示された制
限を定義した変数
で表現する
例：「珈琲原液の
最大供給量制限」

珈琲飲料の1日当り生産量を $x_1 \times 100[\mathrm{g}]$ とする

珈琲牛乳の1日当り生産量を $x_2 \times 100[\mathrm{g}]$ とする

↑の生産に要する珈琲原液の1日当り消費量

$$= x_1 \times 15[\mathrm{g}] + x_2 \times 11[\mathrm{g}]$$

∴制約式は、

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$

同様にして

$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$
$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

演習問題1

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

問題に明示されない制限に注意する

例：「負の生産量はありえない」

珈琲飲料の1日当り生産量を $x_1 \times 100[\mathrm{g}]$ とする
珈琲牛乳の1日当り生産量を $x_2 \times 100[\mathrm{g}]$ とする

原材料供給制限にもとづく制約式

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$
$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$
$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

生産量は正なので $x_1, x_2 \geq 0$

演習問題1

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

最適化(最大化 or 最小化)する関数を定義する

最大/最小化の別や関数値の単位を明確にする

珈琲飲料の1日当り生産量を $x_1 \times 100[\mathrm{g}]$ とする
珈琲牛乳の1日当り生産量を $x_2 \times 100[\mathrm{g}]$ とする

原材料供給制限にもとづく制約式

$$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$$
$$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$$
$$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$$

生産量は正なので $x_1, x_2 \geq 0$

目的関数=利益 $5x_1 + 4x_2$ [円] を最大化する

数理計画問題の自然な表現が得られた

演習問題1

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

表現の形式を整える

maximize/minimize subject to の表現を使う

珈琲飲料の1日当り生産量を $x_1 \times 100[\mathrm{g}]$ とする
珈琲牛乳の1日当り生産量を $x_2 \times 100[\mathrm{g}]$ とする

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{maximize} & 5x_1 + 4x_2 \\ \text{subject to} & 15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3 \\ & 10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3 \\ & 9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}}$$

数理計画問題の自然な表現が得られた

課題1解答例

珈琲飲料の1日当り生産量を $x_1 \times 100[\mathrm{g}]$ とする
珈琲牛乳の1日当り生産量を $x_2 \times 100[\mathrm{g}]$ とする

変数の定義は残しておく

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 5x_1 + 4x_2 \\ \text{subject to} & 15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3 \\ & 10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3 \\ & 9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

演習問題1

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

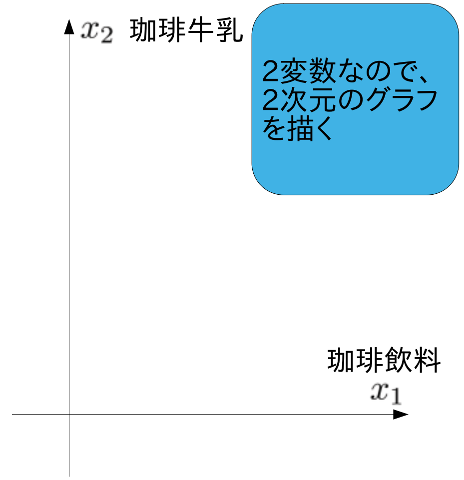
問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

上記の最適化問題について、
課題1： maximize ... subject to ... の形式で
　線形計画問題を表現しなさい。

課題2：グラフを用いる解法・交点を総当たりする解法
　で最適解を求めなさい。

課題2 グラフを利用した解法

maximize
$5x_1 + 4x_2$
subject to
$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$
$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$
$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$



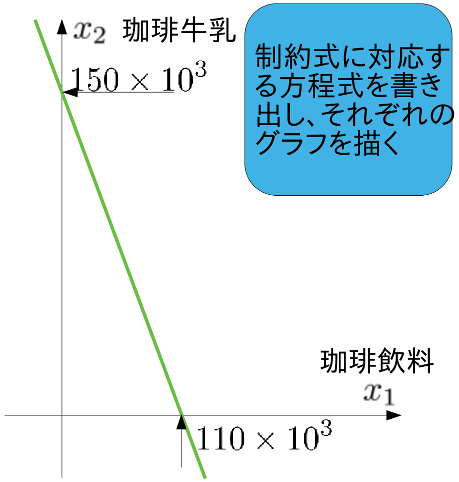
2変数なので、2次元のグラフを描く

課題2 グラフを利用した解法

maximize
$5x_1 + 4x_2$
subject to
$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$
$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$
$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$

グラフを与える方程式

①$15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$
②$10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$
③ $9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$
④ $x_1 = 0$
⑤ $x_2 = 0$



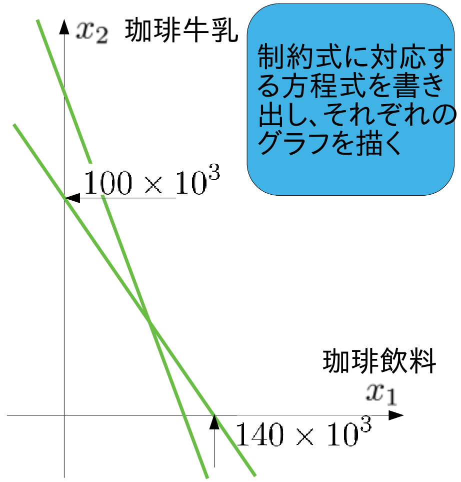
制約式に対応する方程式を書き出し、それぞれのグラフを描く

課題2 グラフを利用した解法

maximize
$5x_1 + 4x_2$
subject to
$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$
$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$
$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$

グラフを与える方程式

①$15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$
②$10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$
③ $9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$
④ $x_1 = 0$
⑤ $x_2 = 0$



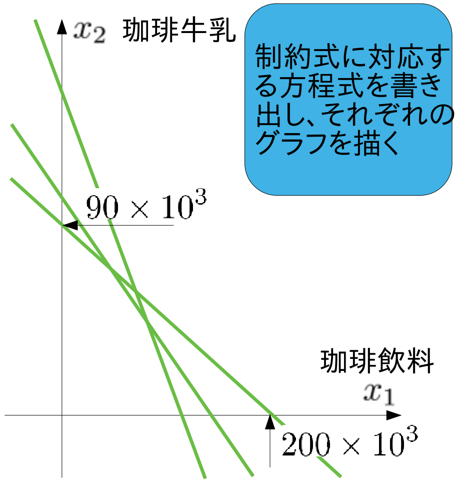
制約式に対応する方程式を書き出し、それぞれのグラフを描く

課題2 グラフを利用した解法

maximize
$$5x_1 + 4x_2$$
subject to
$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\le 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 &\le 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 &\le 1800 \times 10^3 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

グラフを与える方程式

①$15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$
②$10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$
③ $9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$
④ $x_1 = 0$
⑤ $x_2 = 0$



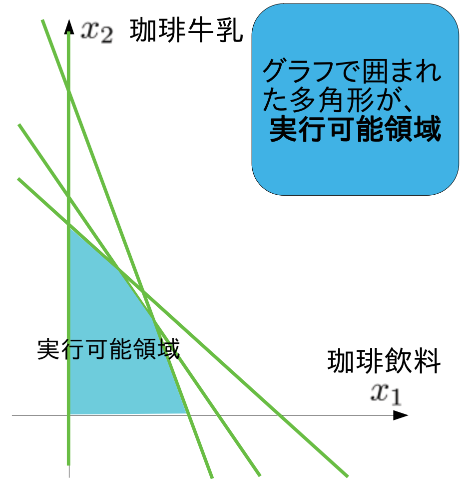
制約式に対応する方程式を書き出し、それぞれのグラフを描く

課題2 グラフを利用した解法

maximize
$$5x_1 + 4x_2$$
subject to
$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\le 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 &\le 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 &\le 1800 \times 10^3 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

グラフを与える方程式

①$15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$
②$10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$
③ $9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$
④ $x_1 = 0$
⑤ $x_2 = 0$



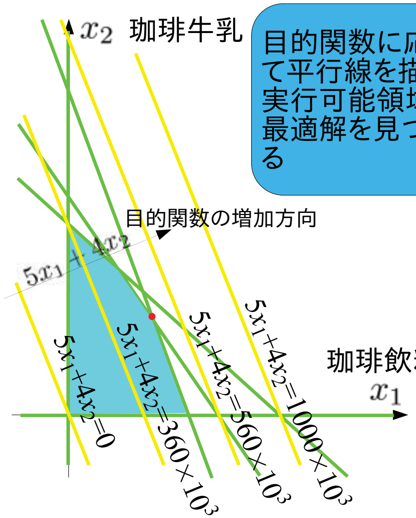
グラフで囲まれた多角形が、**実行可能領域**

課題2 グラフを利用した解法

maximize
$$5x_1 + 4x_2$$
subject to
$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\le 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 &\le 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 &\le 1800 \times 10^3 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

グラフを与える方程式

①$15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$
②$10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$
③ $9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$
④ $x_1 = 0$
⑤ $x_2 = 0$



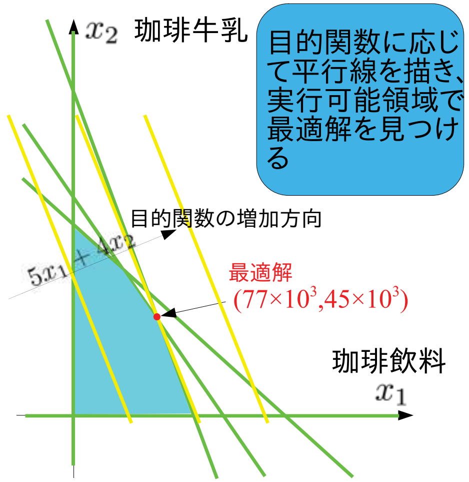
目的関数に応じて平行線を描き、実行可能領域で最適解を見つける

課題2 グラフを利用した解法

maximize
$$5x_1 + 4x_2$$
subject to
$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\le 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 &\le 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 &\le 1800 \times 10^3 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

グラフを与える方程式

①$15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$
②$10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$
③ $9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$
④ $x_1 = 0$
⑤ $x_2 = 0$



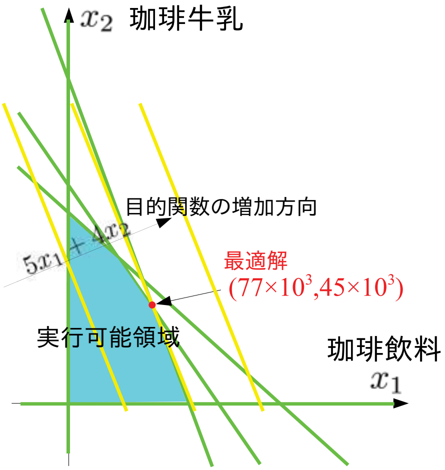
目的関数に応じて平行線を描き、実行可能領域で最適解を見つける

課題2 グラフを利用した解法

maximize
$5x_1 + 4x_2$
subject to
$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$
$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$
$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$

グラフを与える方程式

①$15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$
②$10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$
③ $9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$
④ $x_1 = 0$
⑤ $x_2 = 0$



最適解：コーヒ飲料　77kg
コーヒー牛乳 45kg
最適値：565千円

課題2 グラフの交点を総当たりする解法

maximize
$5x_1 + 4x_2$
subject to
$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$
$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$
$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$

グラフを与える方程式

①$15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$
②$10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$
③ $9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$
④ $x_1 = 0$
⑤ $x_2 = 0$

方程式			実行可能?	目的関数値
①②				
①③				
①④				
①⑤				
②③				
②④				
②⑤				
③④				
③⑤				
④⑤				

制約式に対応する方程式を書き出し、
交点を与える組合せを全て求める

課題2 グラフの交点を総当たりする解法

maximize
$5x_1 + 4x_2$
subject to
$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$
$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$
$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$

グラフを与える方程式

①$15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$
②$10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$
③ $9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$
④ $x_1 = 0$
⑤ $x_2 = 0$

方程式	x_1	x_2	実行可能?	目的関数値
①②	77×10^3	45×10^3		
①③	65.6×10^3	60.4×10^3		
①④	0	150×10^3		
①⑤	110×10^3	0		
②③	37.8×10^3	73.0×10^3		
②④	0	100×10^3		
②⑤	140×10^3	0		
③④	0	90×10^3		
③⑤	200×10^3	0		
④⑤	0	0		

連立方程式を解き、全ての交点を
求める

課題2 グラフの交点を総当たりする解法

maximize
$5x_1 + 4x_2$
subject to
$15x_1 + 11x_2 \leq 1650 \times 10^3$
$10x_1 + 14x_2 \leq 1400 \times 10^3$
$9x_1 + 20x_2 \leq 1800 \times 10^3$
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$

グラフを与える方程式

①$15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$
②$10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$
③ $9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$
④ $x_1 = 0$
⑤ $x_2 = 0$

方程式	x_1	x_2	実行可能?	目的関数値
①②	77×10^3	45×10^3	○	
①③	65.6×10^3	60.4×10^3	×	
①④	0	150×10^3	×	
①⑤	110×10^3	0	○	
②③	37.8×10^3	73.0×10^3	○	
②④	0	100×10^3	×	
②⑤	140×10^3	0	×	
③④	0	90×10^3	○	
③⑤	200×10^3	0	×	
④⑤	0	0	○	

交点を制約式に代入し、全ての交点の
実行可能性を調べる

課題2 グラフの交点を総当たりする解法

maximize
$$5x_1 + 4x_2$$
subject to
$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\leq 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 &\leq 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 &\leq 1800 \times 10^3 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

グラフを与える方程式

①$15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$
②$10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$
③ $9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$
④ $x_1 = 0$
⑤ $x_2 = 0$

方程式	x_1	x_2	実行可能?	目的関数値
①②	77×10^3	45×10^3	○	565×10^3
①③	65.6×10^3	60.4×10^3	×	
①④	0	150×10^3	×	
①⑤	110×10^3	0	○	550×10^3
②③	37.8×10^3	73.0×10^3	○	481×10^3
②④	0	100×10^3	×	
②⑤	140×10^3	0	×	
③④	0	90×10^3	○	360×10^3
③⑤	200×10^3	0	×	
④⑤	0	0	○	0

実行可能な交点における目的関数値を求める

課題2 グラフの交点を総当たりする解法

maximize
$$5x_1 + 4x_2$$
subject to
$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\leq 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 &\leq 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 &\leq 1800 \times 10^3 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

グラフを与える方程式

①$15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$
②$10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$
③ $9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$
④ $x_1 = 0$
⑤ $x_2 = 0$

方程式	x_1	x_2	実行可能?	目的関数値
①②	77×10^3	45×10^3	○	565×10^3
①③	65.6×10^3	60.4×10^3	×	
①④	0	150×10^3	×	
①⑤	110×10^3	0	○	550×10^3
②③	37.8×10^3	73.0×10^3	○	481×10^3
②④	0	100×10^3	×	
②⑤	140×10^3	0	×	
③④	0	90×10^3	○	360×10^3
③⑤	200×10^3	0	×	
④⑤	0	0	○	0

目的関数最適化の条件に合う最適解を見つける

課題2 グラフの交点を総当たりする解法

maximize
$$5x_1 + 4x_2$$
subject to
$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\leq 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 &\leq 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 &\leq 1800 \times 10^3 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

グラフを与える方程式

①$15x_1 + 11x_2 = 1650 \times 10^3$
②$10x_1 + 14x_2 = 1400 \times 10^3$
③ $9x_1 + 20x_2 = 1800 \times 10^3$
④ $x_1 = 0$
⑤ $x_2 = 0$

方程式	x_1	x_2	実行可能?	目的関数値
①②	77×10^3	45×10^3	○	565×10^3
①③	65.6×10^3	60.4×10^3	×	
①④	0	150×10^3	×	
①⑤	110×10^3	0	○	550×10^3
②③	37.8×10^3	73.0×10^3	○	481×10^3
②④	0	100×10^3	×	
②⑤	140×10^3	0	×	
③④	0	90×10^3	○	360×10^3
③⑤	200×10^3	0	×	
④⑤	0	0	○	0

最適解：コーヒ飲料　77kg
　　　　コーヒー牛乳　45kg
最適値：565千円

線形計画問題と線形計画法

線形計画問題の標準形

「素朴な解法」の問題点と解決法

- グラフを用いた解法
  - 2〜3変数までの問題に適用可能
  - 計算機アルゴリズムとして構成し難い
- 交点を総当たりする解法
  - 多変数の問題に適用可能
  - 交点の実行可能性を調べる手間がある
  - 変数が増えると無駄な交点計算が増える
- 単体法（シンプレックス法、Simplex Method）
  G. B. Danzig (1947)
  - 問題を標準化し、規則にしたがって表に変換する。
  - 決められた手順で表を更新して最適解を見つける。

線形計画問題の標準化

- 不等式標準形
  - 目的関数は最小化される
  - 制約式は「左辺に変数と係数≧右辺に定数のみ」
  - 全ての変数は非負
- 等式標準形
  - 目的関数は最小化される
  - 制約式は「左辺に変数と係数＝右辺に定数のみ」
  - 全ての変数は非負
- シンプレックス表

  等式標準形の制約式から左辺の係数、右辺の定数、目的関数から左辺の係数をとり表にしたもの

線形計画問題の不等式標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数≧右辺に定数のみ」
- 全ての変数は非負
- 規則にしたがって問題を書換える

元の問題と正しく対応するように変形すること

maximize
$$5x_1 + 4x_2$$
subject to
$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\le 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 &\le 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 &\le 1800 \times 10^3 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

元の問題(演習1課題1)

minimize
$$-5x_1 - 4x_2$$
subject to
$$\begin{aligned} -15x_1 - 11x_2 &\ge -1650 \times 10^3 \\ -10x_1 - 14x_2 &\ge -1400 \times 10^3 \\ -9x_1 - 20x_2 &\ge -1800 \times 10^3 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

不等式標準形

線形計画問題の不等式標準形

- 目的関数は最小化される

  -1倍して最小化問題に書換える

  $\text{maximize } 5x_1+4x_2 \Rightarrow \text{minimize } -5x_1-4x_2$
- 制約式は「左辺に変数と係数≧右辺に定数のみ」

  両辺を-1倍し不等号の向きを揃える

  $x_1-x_2\le 1 \Rightarrow -x_1+x_2\ge 1$

  1つの等式制約を2つの不等式制約で置換え

  $x_1+x_2=1 \Rightarrow x_1+x_2\ge 1,\ -x_1-x_2\ge -1$
- 全ての変数は非負

  非正変数を-1倍した非負変数で置換える

  $x_1\le 0 \Rightarrow x_2\ge 0 \quad (x_2=-x_1)$

  自由変数を2つの非負変数で置換える

  $x \Rightarrow x_1,\ x_2\ge 0 \quad (x=x_1-x_2)$

全ての線形計画問題を不等式標準形で表すことができる

線形計画問題の**等式**標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数=右辺に定数のみ」
- 全ての変数は非負
- 変数を加えて不等式→等式に書換える
  - **左辺≦右辺→左辺に不足する分を非負変数で補う**
  - 左辺≧右辺→左辺が過剰な分を非負変数で減らす

maximize
$$5x_1 + 4x_2$$
subject to
$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\le 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 &\le 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 &\le 1800 \times 10^3 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

元の問題(演習1課題1)

minimize
$$-5x_1 - 4x_2$$
subject to
$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650 \times 10^3 \\ 10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400 \times 10^3 \\ 9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800 \times 10^3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \\ x_3, x_4, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

等式標準形

線形計画問題の**等式**標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数=右辺に定数のみ」
- 全ての変数は非負
- 変数を加えて不等式→等式に書換える
  - 左辺≦右辺→左辺に不足する分を非負変数で補う
  - **左辺≧右辺→左辺が過剰な分を非負変数で減らす**

minimize
$$-5x_1 - 4x_2$$
subject to
$$\begin{aligned} -15x_1 - 11x_2 &\ge -1650 \times 10^3 \\ -10x_1 - 14x_2 &\ge -1400 \times 10^3 \\ -9x_1 - 20x_2 &\ge -1800 \times 10^3 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

不等式標準形

minimize
$$-5x_1 - 4x_2$$
subject to
$$\begin{aligned} -15x_1 - 11x_2 - x_3 &= -1650 \times 10^3 \\ -10x_1 - 14x_2 - x_4 &= -1400 \times 10^3 \\ -9x_1 - 20x_2 - x_5 &= -1800 \times 10^3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \\ x_3, x_4, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

等式標準形

線形計画問題の**等式**標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係数=右辺に定数のみ」
- 全ての変数は非負
- 不等式標準形で用いた式変形に加え、
- 変数を追加して、不等式を等式と追加変数の非負条件で置換える
  - 左辺≦右辺→左辺に不足する分を非負変数で補う

$$9x_1 + 20x_2 \le 1800 \qquad 9x_1 + 20x_2 + x_3 = 1800$$
$$x_3 \ge 0$$

  - 左辺≧右辺→左辺が過剰な分を非負変数で減らす

$$9x_1 + 20x_2 \ge 1800 \qquad 9x_1 + 20x_2 - x_4 = 1800$$
$$x_4 \ge 0$$

※元の不等式の成否は追加された変数の非負条件に対応する。
※ x_3をslack変数、x_4をsurplus変数と呼ぶこともある。

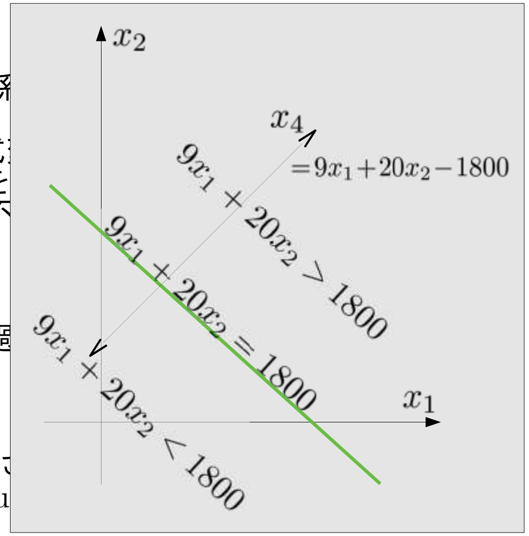
線形計画問題の**等式**標準形

- 目的関数は最小化される
- 制約式は「左辺に変数と係
- 全ての変数は非負
- 不等式標準形で用いた式
- 変数を追加して、不等式を
  - 左辺≦右辺→左辺に不

$$9x_1 + 20x_2 \le 1800$$

  - 左辺≧右辺→左辺が過

$$9x_1 + 20x_2 \ge 1800$$



※元の不等式の成否は追加さ
※ x_3をslack変数、x_4をsurplu

等式標準形のもとでの総当たり解法

等式標準形

minimize
$-5x_1 - 4x_2$
subject to

$$
\begin{aligned}
15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650 \times 10^3 \\
10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400 \times 10^3 \\
9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800 \times 10^3 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \\
x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

1.3つの方程式で定まる3変数を選ぶ。
2.連立方程式を解き、変数値を定める。
　例：※ x_1,x_2,x_3,であれば、x_4,x_5を無視して、

$$
\begin{aligned}
15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650 \times 10^3 & x_1 &= 1400 \times 10^3/37 \\
10x_1 + 14x_2 &= 1400 \times 10^3 & x_2 &= 2700 \times 10^3/37 \\
9x_1 + 20x_2 &= 1800 \times 10^3 & x_3 &= 10350 \times 10^3/37
\end{aligned}
$$

3.全ての組合せに対して実行し、最適値・最適解を探す

等式標準形のもとでの総当たり解法

x_1 [×10³]	x_2 [×10³]	x_3 [×10³]	x_4 [×10³]	x_5 [×10³]	条件	目的関数[×10³]
		1650	1400	1800		0
	150		-700	-1200	×	
	100	550		-200	×	
	90	660	140			-360
110			300	810		-550
140		-450		540	×	
200		-1350	-600		×	
77	45			207		-565
4400/67	4050/67		-6900/67		×	
1400/37	2700/37	10350/37				-481.08

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

※元の不等式制約には変数の非負条件が対応するので、
全ての変数が非負の場合だけを考えれば良い

線形計画問題の標準形

等式標準形にもとづく総当たりによる解法

1.等式制約と変数の数に対応して、
　全ての組み合わせの連立方程式を解く
2.変数の非負条件を満たす解について目的関数を求める
3.最小（最大）の目的関数値を与える解が最適解となる。

問題点、

・連立方程式の組み合わせ数が爆発的に増加する
・不必要な連立方程式も解く必要がある

演習問題2

所定の用紙に回答を記入し提出してください。

ミックスジュース5Lの生産に必要な原材料と利益

原材料	トロピカル	フレッシュ	最大供給量
マンゴー液	3L	1L	45キロL
オレンジ液	1L	2L	40キロL
利益	600円	500円	

問題：利益を最大化する2種類のミックス
ジュースの生産量は？

課題1：対応する線形計画問題の不等式標準形を示しなさい。

課題2：不等式標準形を等式標準形に書換えなさい。

課題3：総当たりによる解法を用いて最適解を求めなさい。

演習問題2 解答例

課題1：対応する線形計画問題の不等式標準形を示しなさい。

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to
$$\begin{aligned} -3x_1 - 1x_2 &\geq -45000 \\ -x_1 - 2x_2 &\geq -40000 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

課題2：不等式標準形を等式標準形に書換えなさい。

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 + x_4 &= 40000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

演習問題2 解答例

2つの方程式で定める2つの変数の組合せと式を全て書き出す

課題3：総当たりによる解法を

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to $3x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 45000$, $1x_1 + 2x_2 + 1x_4 = 40000$, $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

①

②

③

④

⑤

⑥

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$$

組合せは6通り

演習問題2 解答例

2つの方程式で定める2つの変数の組合せと式を全て書き出す

課題3：総当たりによる解法を

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to $3x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 45000$, $1x_1 + 2x_2 + 1x_4 = 40000$, $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

①
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \end{aligned}$$

②

③

④

⑤

⑥

演習問題2 解答例

2つの方程式で定める2つの変数の組合せと式を全て書き出す

課題3：総当たりによる解法を

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to $3x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 45000$, $1x_1 + 2x_2 + 1x_4 = 40000$, $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

①
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \end{aligned}$$

②
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

③

④

⑤

⑥

演習問題2 解答例

2つの方程式で定める2つの変数の組合せと式を全て書き出す

課題3：総当たりによる解法を

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \quad\quad &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 \quad\quad + 1x_4 &= 40000 \end{aligned} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

① $$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \end{aligned}$$

② $$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

③ $$\begin{aligned} 3x_1 + 0x_4 &= 45000 \\ 1x_1 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

④

⑤

⑥

演習問題2 解答例

2つの方程式で定める2つの変数の組合せと式を全て書き出す

課題3：総当たりによる解法を

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \quad\quad &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 \quad\quad + 1x_4 &= 40000 \end{aligned} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

① $$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \end{aligned}$$

② $$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

③ $$\begin{aligned} 3x_1 + 0x_4 &= 45000 \\ 1x_1 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

④ $$\begin{aligned} 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 2x_2 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

⑤

⑥

演習問題2 解答例

2つの方程式で定める2つの変数の組合せと式を全て書き出す

課題3：総当たりによる解法を

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \quad\quad &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 \quad\quad + 1x_4 &= 40000 \end{aligned} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

① $$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \end{aligned}$$

② $$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

③ $$\begin{aligned} 3x_1 + 0x_4 &= 45000 \\ 1x_1 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

④ $$\begin{aligned} 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 2x_2 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

⑤ $$\begin{aligned} 1x_2 + 0x_4 &= 45000 \\ 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

⑥

演習問題2 解答例

2つの方程式で定める2つの変数の組合せと式を全て書き出す

課題3：総当たりによる解法を

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \quad\quad &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 \quad\quad + 1x_4 &= 40000 \end{aligned} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

① $$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \end{aligned}$$

② $$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

③ $$\begin{aligned} 3x_1 + 0x_4 &= 45000 \\ 1x_1 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

④ $$\begin{aligned} 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 2x_2 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

⑤ $$\begin{aligned} 1x_2 + 0x_4 &= 45000 \\ 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

⑥ $$\begin{aligned} 1x_3 + 0x_4 &= 45000 \\ 0x_3 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

演習問題2 解答例

2つの方程式で定める2つの変数の組合せと式を全て書き出す

課題3：総当たりによる解法を

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to $3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \qquad = 45000$

$\qquad 1x_1 + 2x_2 \qquad + 1x_4 = 40000 \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

①
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \end{aligned}$$

②
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

③
$$\begin{aligned} 3x_1 + 0x_4 &= 45000 \\ 1x_1 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

④
$$\begin{aligned} 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 2x_2 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

⑤
$$\begin{aligned} 1x_2 + 0x_4 &= 45000 \\ 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

⑥
$$\begin{aligned} 1x_3 + 0x_4 &= 45000 \\ 0x_3 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

演習問題2 解答例

方程式の解を求め、非負条件を満たさないものを除く

課題3：総当たりによる解法を

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to $3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \qquad = 45000$

$\qquad 1x_1 + 2x_2 \qquad + 1x_4 = 40000 \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

①
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \\ x_1 &= 10000 \\ x_2 &= 15000 \end{aligned}$$

②
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 &= 40000 \\ x_1 &= 40000 \\ \cancel{x_3} &\cancel{= -75000} \end{aligned}$$

③
$$\begin{aligned} 3x_1 + 0x_4 &= 45000 \\ 1x_1 + 1x_4 &= 40000 \\ x_1 &= 15000 \\ x_4 &= 25000 \end{aligned}$$

④
$$\begin{aligned} 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 2x_2 + 0x_3 &= 40000 \\ x_2 &= 20000 \\ x_3 &= 25000 \end{aligned}$$

⑤
$$\begin{aligned} 1x_2 + 0x_4 &= 45000 \\ 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \\ x_2 &= 45000 \\ \cancel{x_4} &\cancel{= -50000} \end{aligned}$$

⑥
$$\begin{aligned} 1x_3 + 0x_4 &= 45000 \\ 0x_3 + 1x_4 &= 40000 \\ x_3 &= 45000 \\ x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

演習問題2 解答例

非負条件を満たすものの目的関数値を求め、最適解を見つける

課題3：総当たりによる解法を

minimize $-600x_1 - 500x_2$

subject to $3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \qquad = 45000$

$\qquad 1x_1 + 2x_2 \qquad + 1x_4 = 40000 \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

①
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 &= 45000 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 40000 \end{aligned}$$

目的関数値 $-13,500,000$ $\quad x_1 = 10000,\ x_2 = 15000$

②
$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_3 &= 45000 \\ 1x_1 + 0x_3 &= 40000 \\ x_1 &= 40000 \\ \cancel{x_3} &\cancel{= -75000} \end{aligned}$$

③
$$\begin{aligned} 3x_1 + 0x_4 &= 45000 \\ 1x_1 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

目的関数値 $-8,000,000$ $\quad x_1 = 15000,\ x_4 = 25000$

④
$$\begin{aligned} 1x_2 + 1x_3 &= 45000 \\ 2x_2 + 0x_3 &= 40000 \end{aligned}$$

目的関数値 $-10,000,000$ $\quad x_2 = 20000,\ x_3 = 25000$

⑤
$$\begin{aligned} 1x_2 + 0x_4 &= 45000 \\ 2x_2 + 1x_4 &= 40000 \\ x_2 &= 45000 \\ \cancel{x_4} &\cancel{= -50000} \end{aligned}$$

⑥
$$\begin{aligned} 1x_3 + 0x_4 &= 45000 \\ 0x_3 + 1x_4 &= 40000 \end{aligned}$$

目的関数値 0 $\quad x_3 = 45000,\ x_4 = 40000$

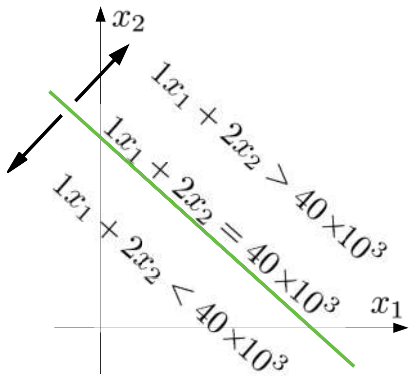
まとめ
標準形への変形

全ての線形計画問題は標準形で表現できる

- 両辺を -1倍して、最大化問題を最小化問題に変形する
- 〃 不等号の向きを揃える
- 一つの等式制約を2つの不等式制約に置き換える
  $x_1 + x_2 = 0 \qquad x_1 + x_2 \geq 0, -x_1 - x_2 \geq 0$
- 一つの自由変数を2つの非負変数に置き換える
  $x = x_1 - x_2 \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$
- 変数を追加して不等式制約を等式制約に置き換える

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1 & \qquad x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \quad x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 & \qquad x_1 + x_2 - x_3 &= 1, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

まとめ
不等式制約と等式制約の関係



$$1x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$

として x_4 を定めれば、

$$x_4 = 40 \times 10^3 - 1x_1 + 2x_2$$

なので、

$$1x_1+2x_2>40\times10^3 \Leftrightarrow x_4<0$$
$$1x_1+2x_2=40\times10^3 \Leftrightarrow x_4=0$$
$$1x_1+2x_2<40\times10^3 \Leftrightarrow x_4>0$$

つまり、

$$1x_1+2x_2\leq 40\times10^3 \Leftrightarrow x_4\geq 0$$

別の見方をすれば

$x_4<0 \Leftrightarrow 1x_1+2x_2=40\times10^3$ の直線より上に (x_1,x_2) の点がある

$x_4=0 \Leftrightarrow 1x_1+2x_2=40\times10^3$ の直線上に (x_1,x_2) の点がある

$x_4>0 \Leftrightarrow 1x_1+2x_2=40\times10^3$ の直線より下に (x_1,x_2) の点がある

まとめ
等式標準形とグラフの交点

等式標準形

minimize

$$-600x_1 - 500x_2$$

subject to

$$3x_1+1x_2+x_3=45\times 10^3$$
$$1x_1+2x_2+x_4=40\times 10^3$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0$$

等式標準形の条件が満たされている
ということは全ての変数が、
等式制約を満たしゼロまたは正の値をとる
ということ、つまり元の変数 (x_1,x_2) は

$x_1=0$ のとき $x_1=0$

$x_2=0$ のとき $x_2=0$

$x_3=0$ のとき $3x_1+x_2=45\times10^3$

$x_4=0$ のとき $x_1+2x_2=40\times10^3$

の直線上にある

$\therefore(x_1,x_2)$が実行可能領域を作る
グラフの交点上にある
⇒2つの変数の値がゼロ

例: $x_1=0, x_2=0$
等式制約
⇒
$$\cancel{3x_1}+\cancel{1x_2}+x_3=45\times 10^3$$
$$\cancel{1x_1}+\cancel{2x_2}+x_4=40\times 10^3$$

例: $x_3=0, x_4=0$
等式制約
⇒
$$3x_1+1x_2+\cancel{x_3}=45\times 10^3$$
$$1x_1+2x_2+\cancel{x_4}=40\times 10^3$$

残った変数は連立方程式を解いて決めることができる