2020数値最適化

第6回：単体法・内点法

復習

- 等式標準形にもとづく総当たりによる解法

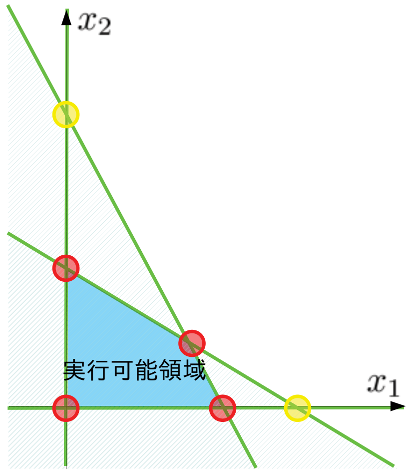
0.等式制約と変数の数に対応して、
　全ての組み合わせの連立方程式を解く

1.変数の非負条件を満たす解について目的関数を求める

2.最小（最大）の目的関数値を与える解が最適解となる。

- 利点(素朴な総当たり法に比べて)
  - 制約条件が非負条件に替り、方程式を解くだけで実行可能性を知ることができる。
- 問題点(それでも解決していない)
  - 連立方程式の組み合わせ数が爆発的に増加する
  - 不必要な連立方程式も解く必要がある

等式標準形の総当たり解法の問題点

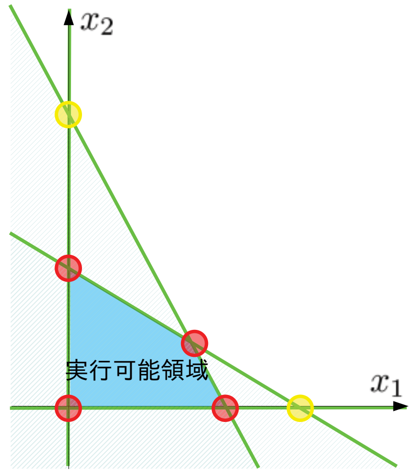


- 連立方程式の組合せ数が爆発的に増加する
  n 変数、N 制約式なら

$$ {}_nC_N = \frac{n!}{(n+1-N)!N!} $$

- 不必要な連立方程式も解く必要がある
  - 最適解の可能性がある
  - 最適解ではない

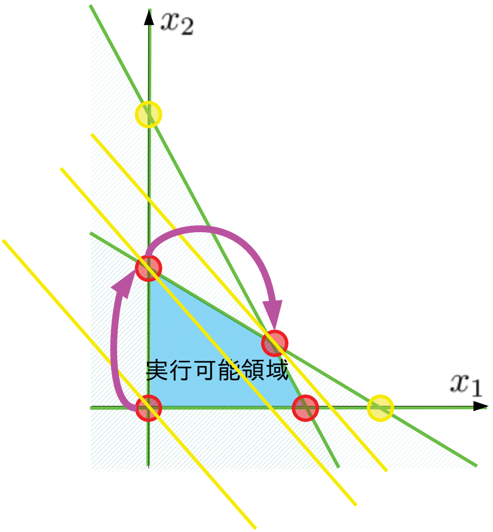
等式標準形の総当たり解法の問題点



- 全ての交点を求める際に不必要な連立方程式も解く必要がある
- 最適解は実行可能領域の端点に存在する
- 実行可能領域の端点だけを求めれば十分

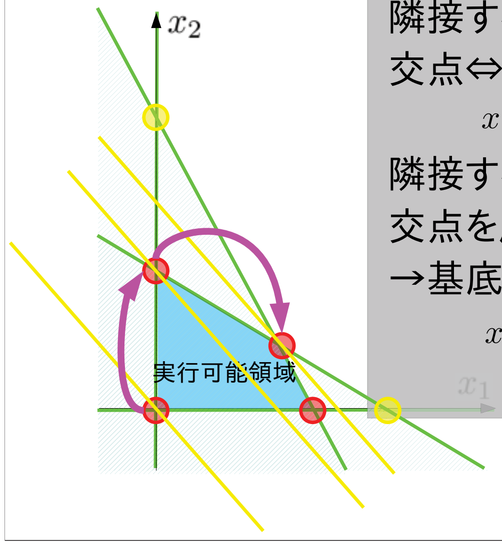
※実行可能解の端点だけを調べて最適解を探す方法→**単体法**

単体法の基本的なアイディア



- 実行可能領域の端点のうち、一つがあらかじめ分かっているものとし、これを最初の交点とする
- 隣接する端点のうち、目的関数を改善するものを選び、交点を更新する
- 最適点に辿りつくまで更新を繰り返す

単体法の基本的なアイディア



隣接する端点を求める

交点⇔基底/非基底変数の選択

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3, x_4$$

隣接する交点＝

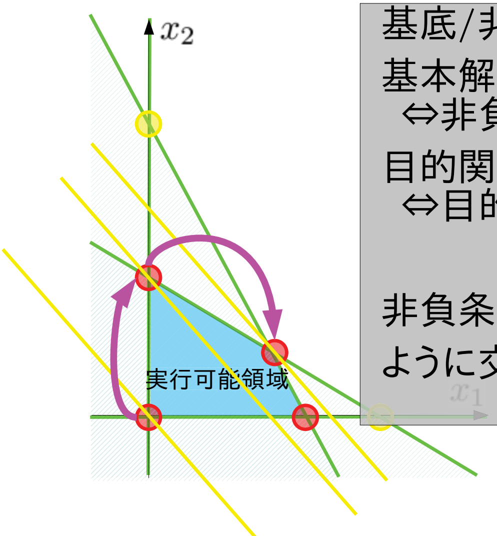
交点を成す直線が1つだけ異なる

→基底/非基底変数を1組替える

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3, x_4$$

$$\Longrightarrow x_1 = 0, x_2, x_3, x_4 = 0$$

単体法の基本的なアイディア



基底/非基底変数の交替候補

基本解が実行可能領域の端点
⇔非負条件を満たす

目的関数が改善する
⇔目的関数が減少する

非負条件を満し、目的関数が減るように交替させる変数を選ぶ

単体法

1. 目的関数を z として変数と見做し、制約式を追加
2. 基底変数に z を含み、基本解が非負条件を満たすように変数を選ぶ
3. 次の条件で基底/非基底変数の交替候補を選ぶ
   a.交替後も非負条件を満す
   b.交替により目的関数が改善する
4. 条件を満す候補がなくなるまで交替を繰り返す

minimize z
subject to

$$\begin{aligned}
z + 600x_1 + 500x_2 &= 0 \\
3x_1 + 1x_2 + 1x_3 \qquad &= 45000 \\
1x_1 + 2x_2 \qquad + 1x_4 &= 40000 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

非基底変数：$x_1 = 0, x_2 = 0$

基本解：

$$(z, x_3, x_4) = (0, 45000, 40000)$$

(例)

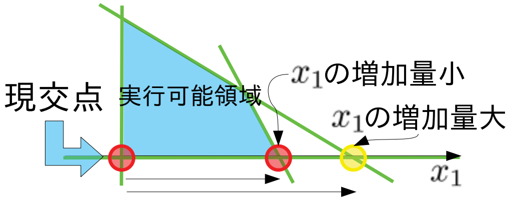
単体法

- x_1 とx_2が非基底変数

$$
\begin{array}{llllll}
 & z+600x_1 & +500x_2 & & & =0 \\
① & 3x_1 & +1x_2 & +x_3 & & =45000 \\
② & 1x_1 & +2x_2 & & +x_4 & =40000
\end{array}
$$

残り部分が連立方程式

- 交替候補を非基底変数から探す
  x_1, x_2のどちらかが正になる、どちらでも z は減少
- x_1の最大増加量は
  ①で15000,②で40000
  x_2の最大増加量は
  ①で45000,②で20000
- 基底変数になる変数の値は増加する(0→非負)
- 非基底変数になる変数は次交点を成す直線(2次元の場合)に対応する
- 新しい基底変数の大小関係は下図の状況に対応する



シンプレックス表

- 交点の更新を表の上の操作で行う
  等式標準形からシンプレックス表を作る

例：

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize } z \\
\text{subject to} \\
\quad 3x_1+1x_2+1x_3 \qquad = 45000 \\
\quad 1x_1+2x_2 \qquad +1x_4 = 40000 \\
\qquad\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ \geq 0 \\
z+600x_1+500x_2=0
\end{array}
$$

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	
0	1	2	0	1	40000	
1	600	500	0	0	0	

全ての等式の係数と右辺の定数を記入する

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	
0	1	2	0	1	40000	
1	600	500	0	0	0	

非基底変数
値は 0 (零)

基本解

全ての非負変数が非負(非基底変数はゼロ)なので、
基本解は実行可能解

- 基底変数/非基底変数の交替候補を探す
- 目的関数を含む等式(最下段)において、係数が正の非基底変数が基底変数になれば、目的関数は減少する
- 非基底変数の係数が大きいほど、目的関数は速く減少するものと考えて

ここでは xを次の基底変数の候補とする

- 基底変数/非基底変数の交替候補を探す
- 目的関数を含む等式(最下段)において、係数が正の非基底変数が基底変数になれば、目的関数は減少する
- 非基底変数の係数が大きいほど、目的関数は速く減少するものと考えて

ここでは xを次の基底変数の候補とする

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量	
0	3	1	1	0	45000	15000	$=45000/3$
0	1	2	0	1	40000	40000	$=40000/1$
1	600	500	0	0	0		

- 各制約式の定数を x_1 の係数で割って最大増加量を求める
- 最小の最大増加量を与える制約式の基底変数を次の非基底変数の候補とする

ここでは xを次の非基底変数の候補とする

ここでは xを次の基底変数の候補とする

ここでは xを次の基底変数の候補とする

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	3	1	1	0	45000	
0	1	2	0	1	40000	
1	600	500	0	0	0	

$\times 1/3$

新しい基底変数に関して連立方程式を解く

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	1	2	0	1	40000	
1	600	500	0	0	0	

$-\times 1$　　$-\times 600$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	5/3	-1/3	1	25000	
1	0	300	-200	0	-9E6	

新しい基底変数に関して連立方程式を解く

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	基本解 定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	5/3	-1/3	1	25000	
1	0	300	-200	0	-9E6	

全ての非負変数が非負なので、基本解は実行可能解

目的関数の式に正の係数を持つ非基底変数は唯一つ

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	45000 $= 15000/(1/3)$
0	0	5/3	-1/3	1	25000	15000 $= 25000/(5/3)$
1	0	300	-200	0	-9E6	

新しい基底変数に関して連立方程式を解く

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	5/3	-1/3	1	25000	
1	0	300	-200	0	-9E6	

$\times 3/5$

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	1/3	1/3	0	15000	
0	0	1	-1/5	3/5	15000	
1	0	300	-200	0	-9E6	

$-\times 1/3$
$-\times 300$

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	定数	最大増加量
0	1	0	2/5	-1/5	10000	
0	0	1	-1/5	3/5	15000	
1	0	0	-140	-180	-135E5	

シンプレックス表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	基本解 定数	最大増加量
0	1	0	2/5	-1/5	10000	
0	0	1	-1/5	3/5	15000	
1	0	0	-140	-180	-135E5	

全ての非負変数が非負なので、基本解は実行可能解

目的関数の式に正の係数を持つ非基底変数は無いので、これ以上の改善はできない。

この時点で最適解が基本解として得られている

$$x_1 = 10000$$
$$x_2 = 15000$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 0$$
$$z = -13,500,000$$

単体法(simplex method)
最も基本的な単体法の手順

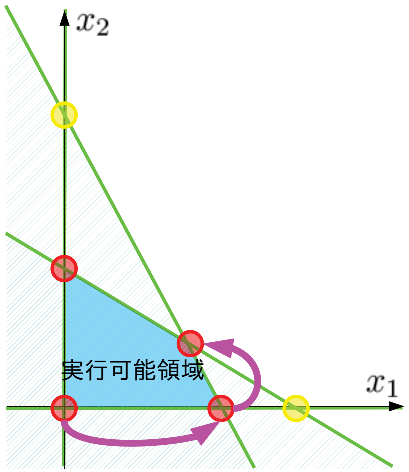
1. 目的関数を変数として含む制約式を構成する
2. 基本解が実行可能解となる基底/非基底変数を選ぶ
3. 目的関数を減少する新しい基底変数を選ぶ
4. 基底変数の最大増加量を小さくする非基底変数を選ぶ、
5. 基底変数・非基底変数の交換で得た連立方程式を解く
6. 目的関数を増加できる限り変数の交換を繰り返す
7. 目的関数を改善できなくなったら最適解が求まっている

問題点
　最初の基本解撰択法、改善の停止と最適性の対応

単体法と内点法

単体法の2段解法
(初期基本解の決定方法)

復習：単体法

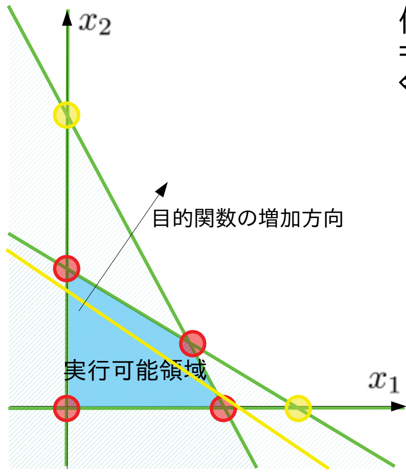


z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4	定数
0	3	1	1	0	45×10^3
0	1	2	0	1	40×10^3
1	600	500	0	0	0

z	x_1	x_2 非	x_3 非	x_4	定数
0	1	1/3	1/3	0	15000
0	0	5/3	-1/3	1	25000
1	0	300	-200	0	-9000000

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4 非	定数
0	1	0	2/5	-1/5	10000
0	0	1	-1/5	3/5	15000
1	0	0	-140	-180	-13500000

初期基本解の決定法

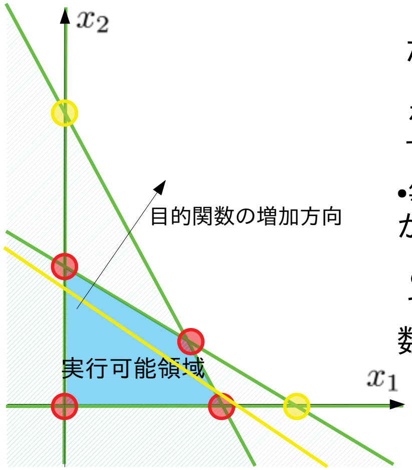


ここまでの例では原点から出発する単体法が使えた
⇒原点が実行可能領域に有る
⇔全ての変数がゼロでも制約を満たす
（不等式制約の場合）

maximize
$600x_1 + 500x_2$
subject to
$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$
$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$
$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1 = x_2 = 0$ でも制約式は満たされる
⇔原点は実行可能解

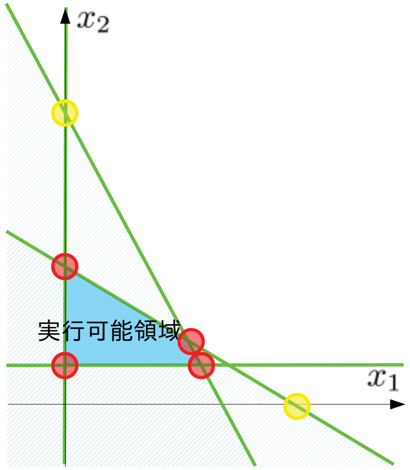
初期基本解の決定法



- 不等式標準形において、
　原点が実行可能領域中にある
  ためには、不等式制約
  $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots \geqq b$
  を $x_1 = x_2 = \ldots = 0$ で満たす必要がある
  すなわち、定数は負になる。
- 等式標準形では、座標軸となる変数が全てゼロで制約を満たす必要がある
  $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + cy = b$
  であれば、座標軸でない変数 y の係数 c と定数 b の符号が一致する。

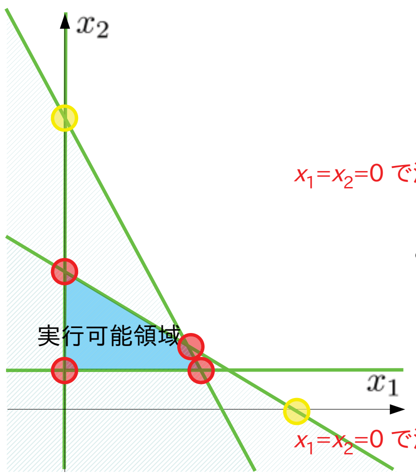
初期基本解の決定法

- 原点が実行可能領域に無い



maximize
$600x_1 + 500x_2$
subject to
$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$
$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$
$x_2 \geq 10 \times 10^3$
$x_1, x_2 \geq 0$

初期基本解の決定法



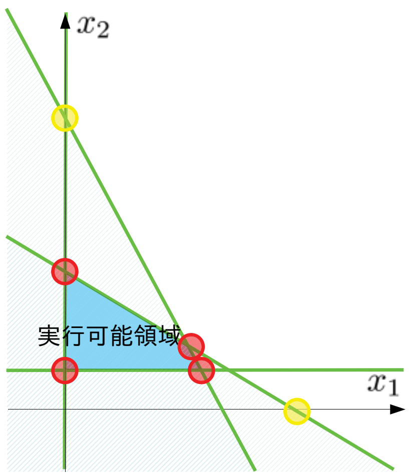
- 不等式標準形

minimize $-600x_1 - 500x_2$
subject to
$-3x_1 - x_2 \geq -45 \times 10^3$
$-x_1 - 2x_2 \geq -40 \times 10^3$
$x_2 \boxed{\geq} 10 \times 10^3$ 　$x_1=x_2=0$ で満たせない式
$x_1, x_2 \geq 0$

- 等式標準形

minimize $-600x_1 - 500x_2$
subject to
$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$
$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$
$x_2 \boxed{-} x_5 = \boxed{1}0 \times 10^3$ 　$x_1=x_2=0$ で満たせない式
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

初期基本解の決定法

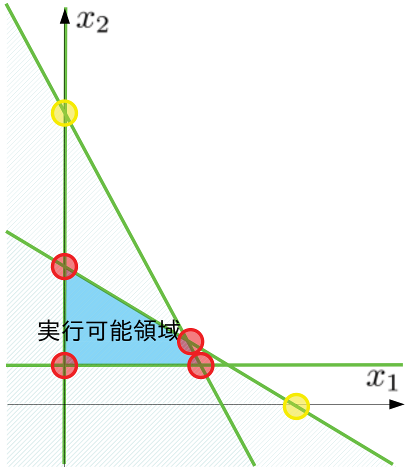


- 原点が実行可能領域に無い
  ⇒全ての変数がゼロでは満たされない制約がある

  左図の例では
  $$x_2 \geq 10 \times 10^3$$
- 不等式標準形において、定数が正の制約式
- 等式標準形において、グラフの座標軸とならない変数(slack変数、surplus変数)の係数と定数の符号が異なる制約式

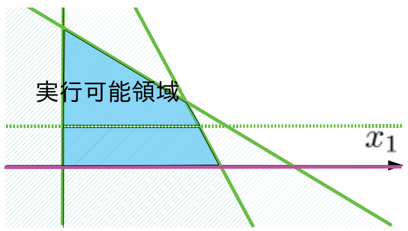
$$x_2 - x_5 = 10 \times 10^3$$

初期基本解の決定法



2段階単体法のアイディア

- 原点が実行可能解でなくなる原因となる制約式に変数を加え実行可能領域を広げる
- 元の実行可能領域の端で最小となる目的関数を定め、単体法で端点を求める



2段階単体法

原点を実行可能領域に含む人工線形計画問題を作り
人工問題の最適解から元の問題の初期解を得る。

等式標準形

minimize

$$z = -6x_1 + 6x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

人工問題の等式標準形

minimize

$$z = x_5 + x_6$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 \qquad + x_5 &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

人工問題は z, x_3, x_5, x_6 を基底変数、x_1, x_2, x_4 を非基底変数とした基本解を
実行可能領域に含む。→ (x_1, x_2) の原点から単体法を実行できる。
人工問題の最適解が $z = 0 \Rightarrow x_5 = x_6 = 0$ であれば、その基本解は元の問題で
実行可能領域に含まれる。

2段階単体法

原点を実行可能領域に含む人工線形計画問題を作り
人工問題の最適解から元の問題の初期解を得る。

1段目の単体法

人工問題の等式標準形

minimize

$$z = x_5 + x_6$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 \qquad + x_5 &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 &= 3 \\ z - x_5 - x_6 &= 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

この問題から直接simplex表を作るとうまくいかない。
$\because x_5$ とx_6 が 目的関数の式に含まれるので、連立方程式が解けていない
そこで、制約式から得られる関係式

$$x_5 = 5x_1 - 9x_2 + 15$$
$$x_6 = 6x_1 - 3x_2 + x_4 + 3$$

を使い目的関数からx_5 とx_6 を消去する

人工問題は z, x_3, x_5, x_6 を基底変数、x_1, x_2, x_4 を非基底変数とした基本解を
実行可能領域に含む。→ (x_1, x_2) の原点から単体法を実行できる。
人工問題の最適解が $z = 0 \Rightarrow x_5 = x_6 = 0$ であれば、その基本解は元の問題で
実行可能領域に含まれる。

2段階単体法

原点を実行可能領域に含む人工線形計画問題を作り
人工問題の最適解から元の問題の初期解を得る。

1段目の単体法

人工問題の等式標準形

minimize

$$z (= x_5 + x_6)$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 \; + 3x_2 + x_3 \qquad &= 6 \\ -5x_1 \; + 9x_2 \qquad + x_5 &= 15 \\ -6x_1 \; + 3x_2 - x_4 + x_6 &= 3 \\ z - 11x_1 + 12x_2 - x_4 \qquad &= 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow x_5 = 5x_1 - 9x_2 + 15$$
$$\rightarrow x_6 = 6x_1 - 3x_2 + x_4 + 3$$
$$z - x_5 - x_6 =$$
$$z - (11x_1 - 12x_2 + x_4 + 18)$$

人工問題は z, x_3, x_5, x_6 を基底変数、x_1, x_2, x_4 を非基底変数とした基本解を
実行可能領域に含む。→ (x_1, x_2) の原点から単体法を実行できる。
人工問題の最適解が $z = 0 \Rightarrow x_5 = x_6 = 0$ であれば、その基本解は元の問題で
実行可能領域に含まれる。

初期のsimplex表

基底変数	非基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	定数
0	2	3	1	0	0	0	6
0	-5	9	0	0	1	0	15
0	-6	3	0	-1	0	1	3
1	-11	12	0	-1	0	0	18

終了時のsimplex表

基底変数	基底変数	基底変数	非基底変数	基底変数	非基底変数	非基底変数	
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	定数
0	1	0	3/11	0	-1/11	0	3/11
0	0	0	-13/11	1	8/11	-1	9/11
0	0	1	5/33	0	2/33	0	20/11
1	0	0	0	0	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	0

こうして得た人工問題の基本解は元の問題の実行可能領域の端点になっている。さらに目的関数を元に戻して、simplex 法を実行することで、元の問題の最適解を得ることができる。

- 最初のsimplex表

z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	x_6	定数	最大増加量
0	2	3	1	0	0	0	6	
0	-5	9	0	0	1	0	15	
0	-6	3	0	-1	0	1	3	
1	-11	12	0	-1	0	0	18	

- 最初の基本解
  非基底変数: $(x_1, x_2, x_4) = (0, 0, 0)$
  基底変数: $(z, x_3, x_5, x_6) = (18, 6, 15, 3)$
- 制約式を満たす＝非負条件を満たす

z	x_1 非	x_2 ~~非~~	x_3	x_4 非	x_5	x_6 非	定数	最大増加量
0	2	3	1	0	0	0	6	$/3 = 2$
0	-5	9	0	0	1	0	15	$/9 = 5/3$
0	-6	3	0	-1	0	1	3	$/3 = 1$
1	-11	12	0	-1	0	0	18	

- 連立方程式を解く

	z	x_1 非	x_2	x_3	x_4 非	x_5	x_6 非	定数	最大増加量
	0	2	3	1	0	0	0	6	
	0	-5	9	0	0	1	0	15	
$\times 1/3$	0	-6	3	0	-1	0	1	3	
	1	-11	12	0	-1	0	0	18	

	z	x_1 非	x_2	x_3	x_4 非	x_5	x_6 非	定数	最大増加量
$-\times 3$	0	2	3	1	0	0	0	6	
$-\times 9$	0	-5	9	0	0	1	0	15	
	0	-2	1	0	-1/3	0	1/3	1	
$-\times 12$	1	-11	12	0	-1	0	0	18	

z	x_1 非	x_2	x_3	x_4 非	x_5	x_6 非	定数	最大増加量
0	8	0	1	1	0	-1	3	
0	13	0	0	3	1	-3	6	
0	-2	1	0	-1/3	0	1/3	1	
1	13	0	0	3	0	-4	6	

- 制約式を満たす＝非負条件を満たす

- 変数の交換

z	x_1 ~~非~~	x_2	x_3 非	x_4 非	x_5	x_6 非	定数	最大増加量
0	8	0	1	1	0	-1	3	$/8 = 3/8$
0	13	0	0	3	1	-3	6	$/13 = 6/13$
0	-2	1	0	-1/3	0	1/3	1	$/-2 = -1/2$
1	13	0	0	3	0	-4	6	

	z	x_1	x_2	x_3 非	x_4 非	x_5	x_6 非	定数	最大増加量
$\times 1/8$	0	8	0	1	1	0	-1	3	
	0	13	0	0	3	1	-3	6	
	0	-2	1	0	-1/3	0	1/3	1	
	1	13	0	0	3	0	-4	6	

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4 非	x_5	x_6 非	定数	最大増加量
0	1	0	1/8	1/8	0	-1/8	3/8	
0	0	0	-13/8	11/8	1	-11/8	9/8	
0	0	1	1/4	-1/12	0	1/12	7/4	
1	0	0	-13/8	11/8	0	-19/8	9/8	

- 制約式を満たす＝非負条件を満たす

- 変数の交換

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4 ~~非~~	x_5 非	x_6 非	定数	最大増加量
0	1	0	1/8	1/8	0	-1/8	3/8	$\times 8 = 3$
0	0	0	-13/8	11/8	1	-11/8	9/8	$/\frac{11}{8} = 9/11$
0	0	1	1/4	-1/12	0	1/12	7/4	
1	0	0	-13/8	11/8	0	-19/8	9/8	

$\times 8/11$

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4	x_5 非	x_6 非	定数	最大増加量
0	1	0	1/8	1/8	0	-1/8	3/8	
0	0	0	-13/11	1	8/11	-1	9/11	
0	0	1	1/4	-1/12	0	1/12	7/4	
1	0	0	-13/8	11/8	0	-19/8	9/8	

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4	x_5 非	x_6 非	定数	最大増加量
0	1	0	3/11	0	-1/11	0	3/11	
0	0	0	-13/11	1	8/11	-1	9/11	
0	0	1	5/33	0	2/33	0	20/11	
1	0	0	0	0	-1	-1	0	

- 制約式を満たす＝非負条件を満たす

- 1段目の単体法が完了し、人工問題の最適解が求まる

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4	x_5 非	x_6 非	定数	最大増加量
0	1	0	3/11	0	-1/11	0	3/11	
0	0	0	-13/11	1	8/11	-1	9/11	
0	0	1	5/33	0	2/33	0	20/11	
1	0	0	0	0	-1	-1	0	

- 最適解は元の問題の端点を成す

人工問題の等式標準形
minimize
z
subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 \quad + x_5 &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 &= 3 \\ z - 11x_1 + 12x_2 - x_4 \quad &= 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

等式標準形
minimize
$z = -6x_1 + 6x_2$
subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

単体法の2段階解法（2段目）

単体法の2段解法、適用の条件

等式標準形
minimize
$z = -6x_1 + 6x_2$
subject to

$$\begin{aligned} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ ① \quad & -5x_1 + 9x_2 = 15 \\ ② \quad & -6x_1 + 3x_2 - x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

人工問題の等式標準形
minimize
z
subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 \quad + x_5 &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 &= 3 \\ z - 11x_1 + 12x_2 - x_4 \quad &= 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

① 係数が1の変数がなく定数項がゼロでない

② x4の係数と定数項で符号が異なる

→「x3,x4を基底変数、それ以外を非基底変数」とすると、
非負条件を満たせない。→2段解法を利用する

単体法の2段解法、2段目

- 初期のsimplex表

z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	x_6	定数	最大増加量
0	2	3	1	0	0	0	6	
0	-5	9	0	0	1	0	15	
0	-6	3	0	-1	0	1	3	
1	-11	12	0	-1	0	0	18	

- 1段目終了時のsimplex表

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4	x_5 非	x_6 非	定数	最大増加量
0	1	0	3/11	0	-1/11	0	3/11	
0	0	0	-13/11	1	8/11	-1	9/11	
0	0	1	5/33	0	0	0	20/11	
1	0	0	0	0	-1	-1	0	

- 人工問題の最適解
  $(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 3/11, 20/11, 0, 9/11, 0, 0)$
- 1段目終了後の解法はどう進めるのか?

単体法の2段解法、2段目

- 人工問題の最適解から人工変数を除けば、
  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3/11, 20/11, 0, 9/11)$
  基底変数: x_1, x_2, x_4　　非基底変数: x_3

等式標準形
minimize
$$z = -6x_1 + 6x_2$$
subject to
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

基底変数の連立方程式
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 6 \\ -5x_1 + 9x_2 &= 15 \\ -6x_1 + 3x_2 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$
の解は、人工問題の最適解
$$x_1 = 3/11$$
$$x_2 = 20/11$$
$$x_4 = 9/11$$

- 基底変数を x_1, x_2, x_4 非基底変数を x_3 として、単体法の手順を開始すれば良い

単体法の2段解法、2段目

- 基底変数: x_1, x_2, x_4 非基底変数: x_3
  元の等式標準形からsimplex表を作る

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4	定数	最大増加量
0	2	3	1	0	6	
0	-5	9	0	0	15	
0	-6	3	0	-1	3	
1	6	-6	0	0	0	

- 一度連立方程式を解いて、基本解を得る

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4	定数
0	1	0	3/11	0	3/11
0	0	1	5/33	0	20/11
0	0	0	-13/11	1	9/11
1	0	0	-8/11	0	102/11

- (この例では)非基底変数の係数が全て負なので最適解

単体法の2段解法、2段目

- 元の標準形まで戻らなくても、
  人工問題の最終段階の simplex 表を削って

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4	x_5	x_6	定数	最大増加量
0	1	0	3/11	0	-1/11	0	3/11	
0	0	0	-13/11	1	8/11	-1	9/11	
0	0	1	5/33	0	0	0	20/11	
1	0	0	0	0	-1	-1	0	

- 基本解を得ることができる

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4	定数
0	1	0	3/11	0	3/11
0	0	0	-13/11	1	9/11
0	0	1	5/33	0	20/11

- z の行は?

単体法の2段解法、2段目

- 元の標準形まで戻らなくても、
  人工問題の最終段階の simplex 表を削って

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4	定数
0	1	0	3/11	0	3/11
0	0	0	-13/11	1	9/11
0	0	1	5/33	0	20/11

- 目的関数値の段は、定義より計算

$$z = -6x_1 + 6x_2 = -6(-\frac{3}{11}x_3 + \frac{3}{11}) + 6(-\frac{5}{33}x_3 + \frac{20}{11})$$
$$= \frac{8}{11}x_3 + \frac{102}{11}$$

z	x_1	x_2	x_3 非	x_4	定数
1	0	0	-8/11	0	102/11

- 非基底変数の係数が全て負なので最適解

2段階単体法(2stage simplex method)

第1段階：初期基底解を求めるための線形計画問題を解く

・元の問題の等式標準形に以下の操作を施し人工問題を作る。
(1)基底変数候補の係数が正でない制約式に人工変数を加える
(2)人工変数の総和から成る人工目的関数を定める

・人工問題の最適解を単体法を用いて求める

※初期基底変数はsimplex表の目的関数から消去しておく
※最適値が 0 ならば元の問題の初期基本解として利用できる

第2段階：元の問題と同等の線形計画問題を解く

・最終段階のsimplex表から人工変数を取り除き、元の目的関数の定義と併せて元の問題のsimplex表を作り単体法を適用する

※初期基底変数はsimplex表の目的関数から消去しておく
※補助問題のsimplex表に目的関数の行を加えて利用する

例題（単体法の2段解法）

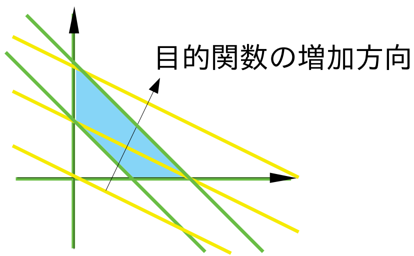
- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

$$\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad z = x_1 + 2x_2 \\
&\text{subject to} \\
&x_1 + x_2 \le 2 \\
&x_1 + x_2 \ge 1 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

例題（単体法の2段解法）

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

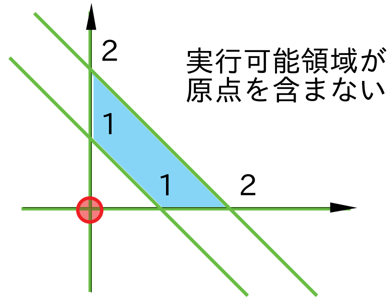
$$\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad z = x_1 + 2x_2 \\
&\text{subject to} \\
&x_1 + x_2 \le 2 \\
&x_1 + x_2 \ge 1 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$



例題（単体法の2段解法）

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

$$\begin{aligned}&\text{maximize} \quad z = x_1 + 2x_2\\&\text{subject to}\\&x_1 + x_2 \le 2\\&x_1 + x_2 \ge 1\\&x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$



例題（単体法の2段解法）

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

$$\begin{aligned}&\text{maximize} \quad z = x_1 + 2x_2\\&\text{subject to}\\&x_1 + x_2 \le 2\\&x_1 + x_2 \ge 1\\&x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad z = -x_1 - 2x_2\\&\text{subject to}\\&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 2\\&\quad x_1 + x_2 - x_4 = 1\\&\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0\end{aligned}$$

等式標準形を導く

例題（単体法の2段解法）

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

等式標準形

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad z\\&\text{subject to}\\&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 2\\&\quad x_1 + x_2 - x_4 = 1\\&z + x_1 + 2x_2 = 0\\&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad z^* = x_5\\&\text{subject to}\\&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 2\\&\quad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1\\&z^* \qquad - x_5 = 0\\&x_1, x_2, x_3, x_4 \quad \ge 0\end{aligned}$$

同じもの

人工問題を導く

例題（単体法の2段解法）

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

等式標準形

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad z\\&\text{subject to}\\&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 2\\&\quad x_1 + x_2 - x_4 = 1\\&z + x_1 + 2x_2 = 0\\&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad z^* = x_5\\&\text{subject to}\\&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 2\\&\quad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1\\&z^* \qquad - x_5 = 0\\&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0\\&z^* + x_1 + x_2 - x_4 = 1\end{aligned}$$

2式を両辺加えて

人工問題を導く

例題（単体法の2段解法）

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

等式標準形

minimize z

subject to

$$
\begin{array}{llll}
x_1 & +x_2+x_3 & & =2 \\
x_1 & +x_2 & -x_4 & =1 \\
z+x_1+2x_2 & & & =0
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

人工問題の等式標準形

minimize z^*

subject to

$$
\begin{array}{lll}
x_1+x_2+x_3 & & =2 \\
x_1+x_2 & -x_4+x_5 & =1 \\
z^*+x_1+x_2 & -x_4 & =1
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

例題（単体法の2段解法）

- 人工問題(or補助問題)の等式標準形に対応して simplex 表を作る
- 単体法を用いて第1段、第2段の線形計画問題を解く

人工問題の等式標準形

minimize z^*

subject to

$$
\begin{array}{lll}
x_1+x_2+x_3 & & =2 \\
x_1+x_2 & -x_4+x_5 & =1 \\
z^*+x_1+x_2 & -x_4 & =1
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

z^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	1	1	0	-1	0	1	

例題（単体法の2段解法）

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く
  6変数3制約なので、基底/非基底変数は 3/3

z^*	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	1	1	0	-1	0	1	

各行に1つずつ係数が1の変数を基底変数に選び、残りを非基底変数とする

連立方程式が解けた状態に対応する

$$
\begin{array}{lll}
x_1+x_2+x_3 & & =2 \\
x_1+x_2 & -x_4+x_5 & =1 \\
z^*+x_1+x_2 & -x_4 & =1
\end{array}
$$

例題（単体法の2段解法）

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く

z^*	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	/1=2
0	1	1	0	-1	1	1	/1=1
1	1	1	0	-1	0	1	

基底変数と非基底変数を交換して現れた連立方程式を解く

$$
\begin{array}{lll}
x_1+x_2+x_3 & & =2 \\
x_1+x_2 & -x_4+x_5 & =1 \\
z^*+x_1+x_2 & -x_4 & =1
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{lll}
x_1+x_2+x_3 & & =2 \\
x_1+x_2 & -x_4+x_5 & =1 \\
z^*+x_1+x_2 & -x_4 & =1
\end{array}
$$

z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0 ~~1~~	0 ~~1~~	1	1 ~~0~~	-1 ~~0~~	1 ~~2~~	-×1
0	1	1	0	-1	1	1	
1	0 ~~1~~	0 ~~1~~	0	0 ~~-1~~	-1 ~~0~~	0 ~~1~~	

例題（単体法の2段解法）

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く

z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0 $\cancel{1}$	0 $\cancel{1}$	1	1 $\cancel{0}$	-1 $\cancel{0}$	1 $\cancel{2}$	-×1
0	1	1	0	-1	1	1	
1	0 $\cancel{1}$	0 $\cancel{1}$	0	0 $\cancel{-1}$	-1 $\cancel{0}$	0 $\cancel{1}$	

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 2 \\ x_1+x_2-x_4+x_5 &= 1 \\ z^*+x_1+x_2-x_4 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_3+x_4+x_5 &= 1 \\ x_1+x_2-x_4+x_5 &= 1 \\ z^*-x_5 &= 0 \end{aligned}$$

連立方程式を解いて得た関係式をもとにシンプレックス表を更新する

z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	0	0	0	0	-1	0	

例題（単体法の2段解法）

- 非基底変数の係数が非正なので終了
  z*=0 となる最適解が求まった→成功

z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
1	0	0	0	0	-1	0	

- 元の線形計画問題: $z=-x_1-2x_2$ の最小化問題を解く

z,z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	0	0	0	0	-1	0	
z 1	1	2	0	0		0	

- 人工問題専用の目的関数・変数を削除して、目的関数 z の定義式をsimplex表に記入すると x_1 に非ゼロ係数がつく

例題（単体法の2段解法）

- 元の線形計画問題: z=-x_1-2x_2 の最小化問題を解く

z,z^*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	0	0	0	0	-1	0	
z 1	1	2	0	0		0	

- 人工問題専用の目的関数・変数を削除して、目的関数 z の定義式をsimplex表に記入すると x_1 に非ゼロ係数がつく
  x_1 は基底変数なので方程式が解けていないことになる
  ⇒非基底変数 x_2, x_4 で置き換える

$$\begin{aligned} x_3+x_4+x_5 &= 1 \\ x_1+x_2-x_4+x_5 &= 1 \\ z^*-x_5 &= 0 \\ z+x_1+2x_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_3+x_4+x_5 &= 1 \\ x_1+x_2-x_4+x_5 &= 1 \\ z^*-x_5 &= 0 \\ z+x_2+x_4-x_5 &= -1 \end{aligned}$$

2段目の式 $x_1+x_2-x_4+x_5=1$ を利用してを x_1 消去

単体法の2段解法、2段目＝元の問題を解く までにすること

- 連立方程式（制約式）に注目すれば、次の通りになる

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 2 \\ x_1+x_2-x_4+x_5 &= 1 \\ z^*+x_1+x_2-x_4 &= 1 \\ z+x_1+2x_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 2 \\ x_1+x_2-x_4+x_5 &= 1 \\ z^*+x_1+x_2-x_4 &= 1 \\ z+x_1+2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

基底変数であるx1,x3の係数を払う

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_3+x_4+x_5 &= 1 \\ x_1+x_2-x_4+x_5 &= 1 \\ z^*-x_5 &= 0 \\ z+x_1+2x_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_3+x_4+x_5 &= 1 \\ x_1+x_2-x_4+x_5 &= 1 \\ z^*-x_5 &= 0 \\ z+x_2+x_4-x_5 &= -1 \end{aligned}$$

基底変数であるx1,x3の係数を払う

- 元の問題を解く前にしていること＝
  人工問題についてしたこと⇒一緒にやってしまえば？

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

- 次の線形計画問題のグラフを描き、原点が実行可能領域でないことを確認のうえ、単体法の2段解法を用いて最適解を求めよ

等式標準形

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z \\
\text{subject to} \\
\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
\qquad x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
z + x_1 + 2x_2 = 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

人工問題の等式標準形

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z^* \\
\text{subject to} \\
\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
\qquad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\
z^* + x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
\boxed{(z + x_1 + 2x_2 = 0)} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

- 人工問題(or補助問題)の等式標準形に対応して simplex 表を作る
- 単体法を用いて第1段、第2段の線形計画問題を解く

人工問題の等式標準形

$$
\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad z^* \\
\text{subject to} \\
\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
\qquad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\
z^* + x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
(z + x_1 + 2x_2 = 0) \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

z,z*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	1	1	0	-1	0	1	
z 1	1	2	0	0	0	0	

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く
  6変数3制約なので、基底/非基底変数は 3/3

z,z*	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	1	1	0	-1	0	1	
z 1	1	2	0	0	0	0	

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く
  6変数3制約なので、基底/非基底変数は 3/3

z,z*	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	1	1	0	-1	0	1	
z 1	1	2	0	0	0	0	

目的関数の定義式の行にある非規定変数の係数のうち、正の係数を選ぶ。
係数は正であれば良いが、より大きなものを選ぶ等としておくと良い。
ここでは、大きさも同じ係数があるので、変数の添字が若い○の係数を選ぶことにする。

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く
  6変数3制約なので、基底/非基底変数は 3/3

z,z*	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	1	1	0	-1	0	1	
z 1	1	2	0	0	0	0	

目的関数の定義式の行にある非規定変数の係数のうち、正の係数を選ぶ。
この係

上の例では、〇印の係数を選んだのでx1を非基底変数から基底変数に移すことになる。

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く
  6変数3制約なので、基底/非基底変数は 3/3

z,z*	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	/1=2
0	1	1	0	-1	1	1	/1=1
z* 1	1	1	0	-1	0	1	
z 1	1	2	0	0	0	0	

x_1の代りに非基底変数となる基底変数をz*以外のx_3,x_5から選ぶ。
x_3なら1行目はx_1=2、x_5なら2行目はx_1=1になるので、x_1の値が小さくなるx_5を非基底変数に選ぶ必要がある。

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く
  6変数3制約なので、基底/非基底変数は 3/3

z,z*	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	/1=2
0	1	1	0	-1	1	1	/1=1
z* 1	1	1					
z 1	1	2					

x1→基底変数、x5→非基底変数とすれば次のsimplex表が得られる。

z,z*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	1	1	0	-1	0	1	
z 1	1	2	0	0	0	0	

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

この表は、元の制約式において、x_2=x_4=x_5=0を仮定したことを表す。

他の変数の値はx_2,x_4,x_5を省いた関係式からなる連立方程式の解として得られる

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 1 \\ z^* + x_1 + x_2 - x_4 &= 1 \\ z + x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$x_2, x_4, x_5 = 0$とする

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ x_1 &= 1 \\ z^* + x_1 &= 1 \\ z + x_1 &= 0 \end{aligned}$$

z,z*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	1	1	0	-1	0	1	
z 1	1	2	0	0	0	0	

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

関係式に基本操作を施して変数の値を求めることができる。

同じ操作を元の制約式に施すことで元の制約式と同等で異なる表現の関係式を得ることができる。

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 1 \\ z^* + x_1 + x_2 - x_4 &= 1 \\ z + x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

同じ操作を施す

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ x_1 &= 1 \\ z^* + x_1 &= 1 \\ z + x_1 &= 0 \end{aligned}$$

z,z*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	1	1	0	-1	0	1	
z 1	1	2	0	0	0	0	

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

関係式に基本操作を施して変数の値を求めることができる。

同じ操作を元の制約式に施すことで元の制約式と同等で異なる表現の関係式を得ることができる。

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 1 \\ z^* + x_2 - x_4 &= 1 \\ z + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

同等の関係式が求まる

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 \\ x_1 &= 1 \\ z^* &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

変数の値が求まる

z,z*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	1	1	0	-1	0	1	
z 1	1	2	0	0	0	0	

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

関係式に基本操作を施して変数の値を求めることができる。

同じ操作を元の制約式に施すことで元の制約式と同等で異なる表現の関係式を得ることができる。

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 1 \\ z^* + x_2 - x_4 &= 1 \\ z + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

同等の関係式が求まる

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 \\ x_1 &= 1 \\ z^* &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

変数の値が求まる

この基本操作を表を使って実施する。

z,z*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	1	1	0	-1	0	1	
z 1	1	2	0	0	0	0	

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く
  6変数3制約なので、基底/非

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 1 \\ z^* + x_1 + x_2 - x_4 &= 1 \\ z + x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

z,z*	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4
0	1	1	1	
0	1	1	0	
z* 1	1	1	0	

この基本操作を表を使って実施する。

z,z*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0 $\cancel{1}$	0 $\cancel{1}$	1	1 $\cancel{0}$	-1 $\cancel{0}$	1 $\cancel{2}$ -×1	
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	1	1	0	-1	0	1	
z 1	1	2	0	0	0	0	

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く
  6変数3制約なので、基底/非

$$
\begin{aligned}
x_3+x_4-x_5&=1\\
x_1+x_2-x_4+x_5&=1\\
z^*+x_1+x_2-x_4&=1\\
z+x_1+2x_2&=0
\end{aligned}
$$

z,z*	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4			
0	1	1	1				
0	1	1	0				
z* 1	1	1	0	-1	0	1	
				0	0	0	

この基本操作を表を使って実施する。

z,z*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0 ~~1~~	0 ~~1~~	1	1 ~~0~~	-1 ~~0~~	1 ~~2~~	
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	0 ~~1~~	0 ~~1~~	0	0 ~~-1~~	-1 ~~0~~	0 ~~1~~	-×1
z 1	1	2	0	0	0	0	

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く
  6変数3制約なので、基底/非

$$
\begin{aligned}
x_3+x_4-x_5&=1\\
x_1+x_2-x_4+x_5&=1\\
z^*\qquad\qquad -x_5&=0\\
z+x_1+2x_2&=0
\end{aligned}
$$

z,z*	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4			
0	1	1	1				
0	1	1	0				
z* 1	1	1	0	-1	0	1	
				0	0	0	

この基本操作を表を使って実施する。

z,z*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0 ~~1~~	0 ~~1~~	1	1 ~~0~~	-1 ~~0~~	1 ~~2~~	
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	0 ~~1~~	0 ~~1~~	0	0 ~~-1~~	-1 ~~0~~	0 ~~1~~	
z 1	0 ~~1~~	1 ~~2~~	0	1 ~~0~~	-1 ~~0~~	-1 ~~0~~	-×1

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

- 人工問題(=z* 最小化問題)を解く
  6変数3制約なので、基底/非基底変数は 3/3

z,z*	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	2	/1=2
0	1	1	0	-1	1	1	/1=1
z* 1	1	1	0	-1	0	1	
z 1	1	2	0	0	0	0	

z,z*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0 ~~1~~	0 ~~1~~	1	1 ~~0~~	-1 ~~0~~	1 ~~2~~	
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	0 ~~1~~	0 ~~1~~	0	0 ~~-1~~	-1 ~~0~~	0 ~~1~~	
z 1	0 ~~1~~	1 ~~2~~	0	1 ~~0~~	-1 ~~0~~	-1 ~~0~~	

目的関数式の変形を1段目に含む2段解法

- 非基底変数の係数が非正なので終了
  z*=0 となる最適解が求まった→成功

z,z*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	0	0	0	0	-1	0	
z 1	0	1	0	1	-1	-1	

- 元の線形計画問題= z の最小化問題を解く

z,z*	x_1	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5 非	定数	最大増加量
0	0	0	1	1	-1	1	
0	1	1	0	-1	1	1	
z* 1	0	0	0	0	-1	0	
z 1	0	1	0	1	-1	-1	

単体法と内点法

内点法

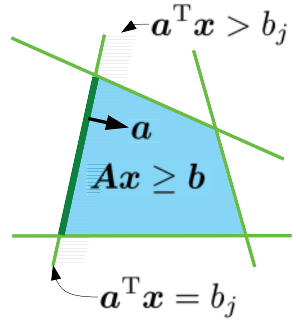
復習+α:線形計画問題と多面体

多面体:
線形計画問題を考えるベクトル空間において、制約等式、不等式の定める領域、全ての制約を満たす多面体=実行可能領域

(超)平面:
(線形)制約等式を満たす点の集合

支持超平面:
多面体を構成する不等式の一つが単独で構成する多面体の境界

面:
多面体とその支持超平面の交わり



$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} \vdots \\ b_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

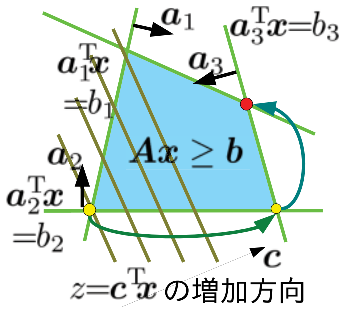
復習+α:線形計画問題と多面体

交点:
複数の(超)平面の交わりのうち、点を成すもの

多面体の頂点:
支持(超)平面の成す交点

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}} \\ \vdots \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

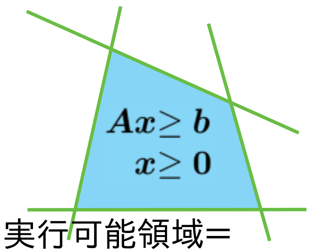
単体法の原理:
目的関数が増加するように多面体の頂点を移動し、最適解を求める方法
出発点となる頂点から頂点を構成する支持超平面を順番に入れ換えて目的関数を増加させる
総当たり法よりも効率が良い?



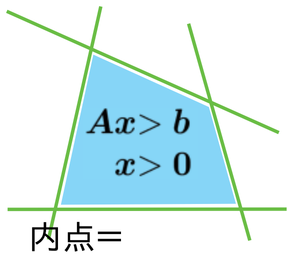
内点法の原理

内点:
不等式標準形の制約式から等号を除いた条件を満たす点を内点と呼ぶ

不等式標準形
minimize
$z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$



実行可能領域=
$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$

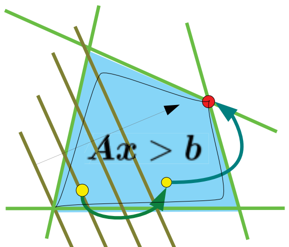


内点=
$\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}\}$

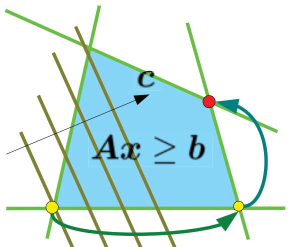
内点法の原理

内点法の原理：
内点領域中に最適解へ向かうベクトル場からなるう軌跡を作り、軌跡に沿って内点領域を通る経路を近似的に求める方法。

不等式標準形
minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$



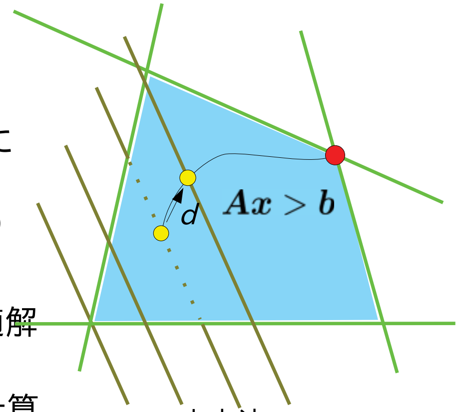
内点法



単体法

内点法の原理

内点法の原理：
ある目的関数値をとる内点
x_k>(ただし $Ax_k > b$)
を目的関数値を改善するように更新して最適解を見つけたい。
$x_{k+1} = x_k + d$(ただし$c^{\mathrm{T}}x_k > c^{\mathrm{T}}x_{k+1}$)
さらに、
$Ax_{k+1} > b$で、かつ最終的に最適解に収束するようにdを定める。
できれば反復回数は少なく、計算も簡単な方が好い。
どうやって？



内点法

自己双対型問題の導出

主問題
minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題
maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

⇩

minimize
$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

制約式を整理して、
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{s} \geq 0$$
$$-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{t} \geq 0$$
より、
$$\begin{bmatrix} & \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c} \end{bmatrix}$$

自己双対型問題の導出

主問題
minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題
maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

⇩

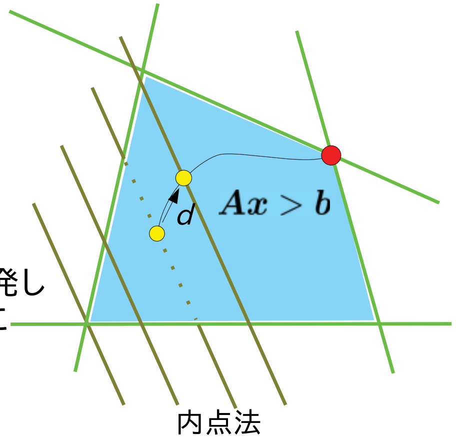
等式標準形
minimize
$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

不等式標準形
minimize
$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}, -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}][\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$
subject to
$$\begin{bmatrix} O & \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c} \end{bmatrix}$$
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

自己双対型内点法

自己双対型線形計画問題:

minimize
$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$
subject to
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$$



初期解x_0(ただし 内点)から出発して目的関数値を改善するように更新して最適解を見つける。

$[x_{k+1}, y_{k+1}] = [x_k, y_k] + [\delta x, \delta y]$

ただし$c^{\mathrm{T}} x_k - b^{\mathrm{T}} y_k > c^{\mathrm{T}} x_{k+1} - b^{\mathrm{T}} y_{k+1}$

となるようにする。

内点法

自己双対型内点法も含め、内点法は基本的に元の線形計画問題に対応する非線形計画問題を解くことになる。

具体的な内点法のアルゴリズムを理解するためには非線形計画問題について知る必要がある。

ということで、一旦内点法については後回しにします。