単体法適用例（原点から出発できる場合）

コーヒードリンク生産に必要な原材料と利益

原材料	珈琲飲料(100g	珈琲牛乳(100g	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

問題：利益を最大化する珈琲飲料・珈琲牛乳の1日当り生産量は？

上記の最適化問題について、
課題1: 単体法を用いて最適解を求めなさい

課題2：グラフを描き、課題1で辿った端点を示しなさい

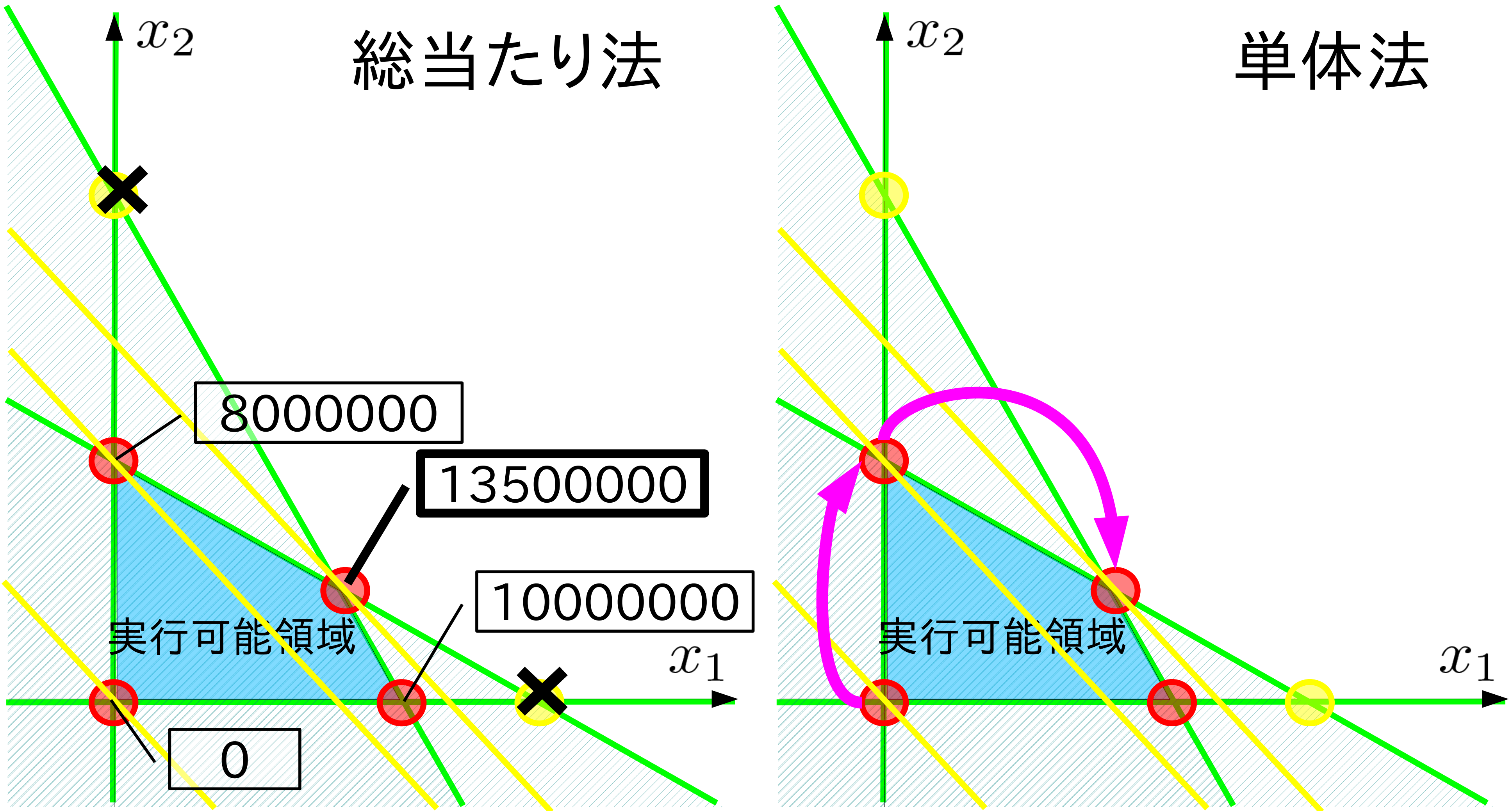
等式標準形
minimize z
subjecto to

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650000 \\ 10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400000 \\ 9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800000 \\ z + 5x_1 + \ \ 4x_2 \qquad &= 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

simplex 表

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺
0	15	11	1	0	0	1650000
0	10	14	0	1	0	1400000
0	9	20	0	0	1	1800000
1	5	4	0	0	0	0

復習:単体法


総当たり法
x_2
x_1
8000000
13500000
10000000
0
実行可能領域
単体法
x_2
x_1
実行可能領域

コーヒードリンクの生産に必要な原料とその利益

原材料	珈琲飲料(100g中)	珈琲牛乳(100g中)	最大供給量
珈琲原液	15g	11g	1650kg/日
ミルク	10g	14g	1400kg/日
ガムシロップ	9g	20g	1800kg/日
利益	5円	4円	

変数の定義を決める

$x_1 \times 100[\mathrm{g}]$ $x_2 \times 100[\mathrm{g}]$ 珈琲飲料、珈琲牛乳の生産量

問題に対応する標準形を書き出す

線形計画問題

maximize

$$5x_1 + 4x_2$$

subjecto to

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 &\leq 1650000 \\ 10x_1 + 14x_2 &\leq 1400000 \\ 9x_1 + 20x_2 &\leq 1800000 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

等式標準形

minimize

$$z = -5x_1 - 4x_2$$

subjecto to

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650000 \\ 10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400000 \\ 9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800000 \\ z + 5x_1 + 4x_2 &= 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

等式標準形

minimize

$$z = -5x_1 - 4x_2$$

subjecto to

$$\begin{aligned} 15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650000 \\ 10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400000 \\ 9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800000 \\ z + 5x_1 + \ \ 4x_2 \qquad &= 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

等式標準形をもとにして、最初の simplex 表を作る

Z	X1	X2	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

simplex表の操作により単体法を実行する。

Z	X1	X2	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

係数が1になっている変数のうち、目的関数と合せて制約条件と同数の変数を基底変数とする。今回の例では、
後から追加した x_3, x_4, x_5

simplex表の操作により単体法を実行する。

基底変数 基底変数 基底変数 基底変数

Z	X1	X2	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

係数が1になっている変数のうち、目的関数と合せて制約条件と同数の変数を基底変数とする。今回の例では、
後から追加した x_3, x_4, x_5

simplex表の操作により単体法を実行する。

非基底変数 非基底変数

Z	X1	X2	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

基底変数ではない変数が
非基底変数になる、
今回の例では、
元々の変数 x_1, x_2

simplex表の操作により単体法を実行する。

基底変数　非基底変数　非基底変数　基底変数　基底変数　基底変数

Z	X1	X2	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

基底変数ではない変数が
非基底変数になる、
今回の例では、
元々の変数 x_1, x_2

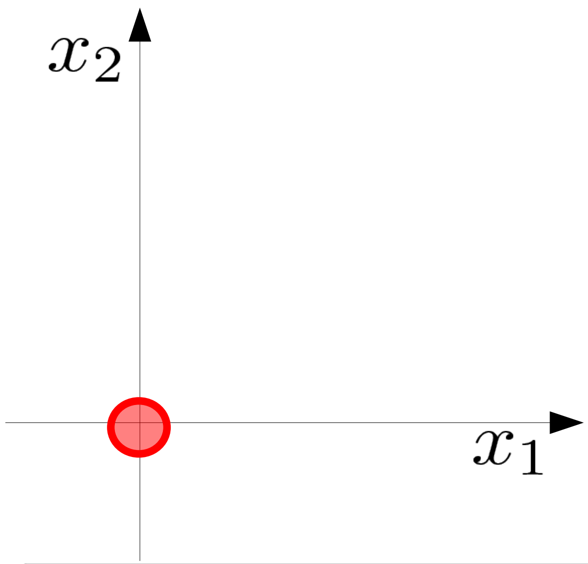
simplex表の操作により単体法を実行する。

Z　基	X1　非	X2　非	X3　基	X4　基	X5　基	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

基底変数・非基底変数の区別を判り易く示す。
どちらか片方だけでも十分。

simplex表の操作により単体法を実行する。

Z　基	X1　非	X2　非	X3　基	X4　基	X5　基	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	



$$
\begin{aligned}
15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650000 \\
10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400000 \\
9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800000 \\
z + 5x_1 + 4x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 16500000, 1400000, 1800000)
$$

非基底変数はゼロ、残りの変数は非負でなければならない。今回はOK

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 非	X2 非	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

非基底変数にだけシルシを付ける。
実際の作業では、これが最初の段階になる。
以降、基底変数⇔非基底変数の交換を進める。

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 非	X2 非	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

1.交換により目的関数が改善（減少）する。

$$z = 0 \rightarrow z + 5x_1 = 0 \text{ or } z + 4x_2 = 0$$

- 係数が正ならば目的関数は改善(減少)する。

まず、非基底変数の中から基底変数に換えるものを決める。
入れ換えで目的関数が改善するものを選ばなくてはならない、
例では x_1, x_2 を基底変数とした場合の目的関数値を考える。
目的関数の定義式より係数が正の変数を選べば良い。

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

1.交換により目的関数が改善（減少）する。

$$z = 0 \longrightarrow z + 5x_1 = 0 \text{ or } z + 4x_2 = 0$$

- 係数が正ならば目的関数は改善(減少)する。

今回は x_1, x_2 のいずれとも係数が正なので、どちらでもOK。
とりあえず、目的関数が速く減るように大きい方を選ぶこと
にして、x_1 の方を非基底変数→基底変数とする。

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

1. 交換により目的関数が改善（減少）する

次に、x_1 との交換の相手を基底変数の x_3, x_4, x_5 から見つける。
交換後に全ての変数が非負条件を満たすものを選ぶ。
例えば、x_3 が非基底変数になると現れる等式を考える。

2.交換後も非負条件を満たす。

$$x_3 = 1650000 \longrightarrow 15x_1 = 1650000$$

- 定数項を係数で割り最大増加量を求める。
- 最小の最大増加量を与える非基底変数を選ぶ。

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
	10	14		1		1400000	$/10 = 140000$
	9	20			1	1800000	$/9 = 200000$
1	5	4				0	

1.交換により目的関数が改善(減少)する

同様に x_3, x_4, x_5 非基底変数となった場合を考え、x_1の増加量を比較して、最小の増加量を与える交換を採用する。

2.交換後も非負条件を満たす。

$$x_3 = 1650000 \longrightarrow 15x_1 = 1650000$$

- 定数項を係数で割り最大増加量を求める。
- 最小の最大増加量を与える非基底変数を選ぶ。

基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	$/15 = \boxed{110000}$
	10	14		1		1400000	$/10 = 140000$
	9	20			1	1800000	$/9 = 200000$
1	5	4				0	

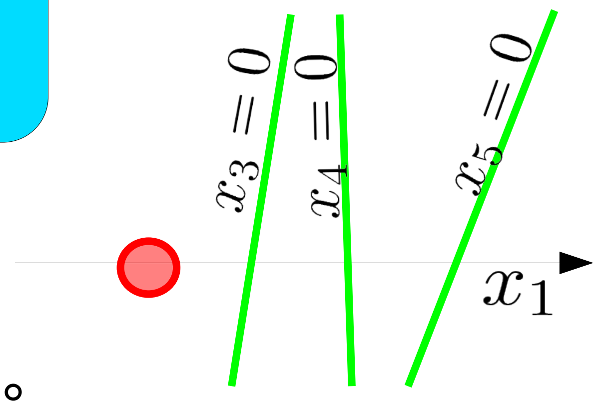
1.交換により目的関数が改善(減少)する

最小の増加量を与える交換により、新しい
交点が実行可能領域外に出ないようにする

2.交換後も非負条件を満たす。

$$x_3 = 1650000 \to 15x_1 = 1650000$$

- 定数項を係数で割り最大増加量を求める。
- 最小の最大増加量を与える非基底変数を選ぶ。



基底変数と非基底変数の交換候補を決める

Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	15	11	1			1650000	$/15 = 110000$
	10	14		1		1400000	$/10 = 140000$
	9	20			1	1800000	$/9 = 200000$
1	5	4				0	

ここまでの作業でsimplex表は上のようになる。
この状態に対応する連立方程式は

$$
\begin{aligned}
15x_1 + 11x_2 + x_3 &= 1650000 \\
10x_1 + 14x_2 + x_4 &= 1400000 \\
9x_1 + 20x_2 + x_5 &= 1800000 \\
z + 5x_1 + 4x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

なので、これを解く必要がある。

交換後の連立方程式を解く

Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
$\times \frac{1}{15}$	~~15~~ 1	~~11~~ 11/15	~~1~~ 1/15			~~1650000~~ 110000	/15 = 110000
	10	14		1		1400000	
	9	20			1	1800000	
1	5	4				0	

基底変数に関する連立方程式を解き基本解を得る

$$
\begin{aligned}
\boxed{x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad = 110000} \\
\cancel{15x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad = 1650000} \\
10x_1 \qquad\qquad + x_4 &= 1400000 \\
9x_1 \qquad\qquad + x_5 &= 1800000 \\
z + 5x_1 \qquad\qquad\qquad &= 0
\end{aligned}
$$

新たに基底変数となり、ゼロから正に値の変わる x_1 の値を求めるために、x_1 の係数で両辺を割る
simplex表では、対応する段の係数を全て割る

交換後の連立方程式を解く

	Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
$\times\frac{1}{15}$		~~15~~ 1	~~11~~ 11/15	~~1~~ 1/15			~~1650000~~ 110000	/15 = 110000
$-\times 10$		~~10~~ 0	~~14~~ 20/3	−2/3	1		~~1400000~~ 300000	/10 = 140000
$-\times 9$		~~9~~ 0	~~20~~ 67/5	−3/5		1	~~1800000~~ 810000	/9 = 200000
$-\times 5$	1	~~5~~ 0	~~4~~ 1/3	−1/3			~~0~~ −550000	

基底変数に関する連立方程式を解き基本解を得る

$$\boxed{\begin{aligned} x_4 &= 300000 \\ x_5 &= 810000 \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad &= 110000 \\
\cancel{10x_1 + x_4} &\cancel{= 1400000} \\
\cancel{9x_1 + x_5} &\cancel{= 1800000} \\
z + 5x_1 \qquad &= 0 \\
\boxed{z} \qquad\qquad &\boxed{= -550000}
\end{aligned}$$

前段で得た関係式
$x_1+(11/15)x_2+(11/15)x_3=110000$
を使って他の方程式から x_1 を消去する

交換後の連立方程式を解く

	Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
$\times\frac{1}{15}$		~~15~~ 1	~~11~~ 11/15	~~1~~ 1/15			~~1650000~~ 110000	/15 = 110000
$-\times 10$		~~10~~ 0	~~14~~ 20/3	−2/3	1		~~1400000~~ 300000	/10 = 140000
$-\times 9$		~~9~~ 0	~~20~~ 67/5	−3/5		1	~~1800000~~ 810000	/9 = 200000
$-\times 5$	1	~~5~~ 0	~~4~~ 1/3	−1/3			~~0~~ −550000	

基底変数に関する連立方程式を解き基本解を得る

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad + 11x_2 + x_3 &= 110000 \\
+ 14x_2 \quad x_4 &= 300000 \\
+ 20x_2 \quad x_5 &= 810000 \\
z \quad + 4x_2 &= -550000
\end{aligned}
$$

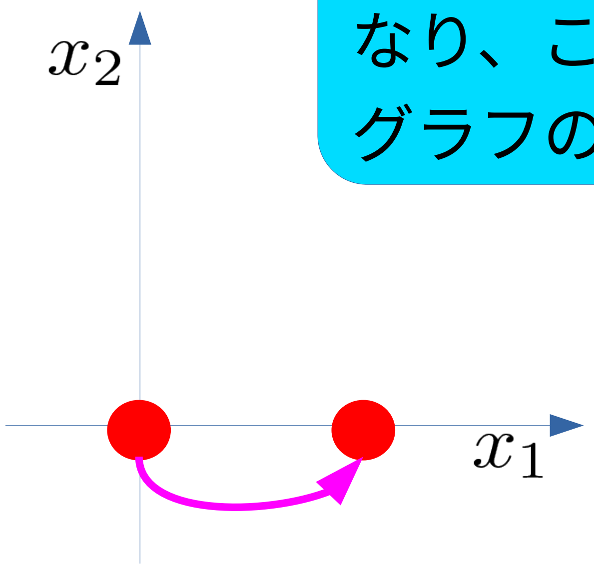
$$(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-550000, 110000, 0, 0, 300000, 810000)$$

simplex表の定数欄に現れた基本解は非負条件を満たす

交換後の連立方程式を解く

	Z	X1 ~~非~~	X2 非	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
$\times \frac{1}{15}$		~~15~~ 1	~~11~~ 11/15	~~1~~ 1/15			~~1650000~~ 110000	/15 = 110000
$-\times 10$		~~10~~ 0	~~14~~ 20/3	−2/3	1		~~1400000~~ 300000	/10 = 140000
$-\times 9$		~~9~~ 0	~~20~~ 67/5	−3/5		1	~~1800000~~ 810000	/9 = 200000
$-\times 5$	1	~~5~~ 0	~~4~~ 1/3	−1/3			~~0~~ −550000	

ここまでの作業で、simplex表は上のようになり、このときまでの基本解の移動は左下のグラフの通り



$$(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$
$$= (-550000, 110000, 0, 0, 300000, 810000)$$

表を更新する

	Z	X1 ~~非~~	非X2	非X3	X4	X5	定数	最大増加量
$\times\frac{1}{15}$		~~15~~ 1	~~11~~ 11/15	~~1~~ 1/15			~~1650000~~ 110000	$/15=$ 110000
$-\times 10$		~~10~~ 0	~~14~~ 20/3	$-2/3$	1		~~1400000~~ 300000	$/10=$ 140000
$-\times 9$		~~9~~ 0	~~20~~ 67/5	$-3/5$		1	~~1800000~~ 810000	$/9=$ 200000
$-\times 5$	1	~~5~~ 0	~~4~~ 1/3	$-1/3$			~~0~~ -550000	

新しい表に書き写して作業を進める。そのまま上書きでも可。

Z	X1	非X2	非X3	X4	X5	定数	最大増加量
	1	11/15	1/15			110000	
		20/3	-2/3	1		300000	
		67/5	-3/5		1	810000	
1		1/3	-1/3			-550000	

新しい表で基底変数･非基底変数の交換を続ける

Z	X1	X2 ~~非~~	X3 非	X4	X5	定数	最大増加量
	1	11/15	1/15			110000	$/(11/15) = 150000$
		20/3	-2/3	1		300000	$/(20/3) = 45000$
		67/5	-3/5		1	810000	$/(67/5) = 60447.\cdots$
1		1/3	-1/3			-550000	

非基底変数のうち、目的関数の定義式で係数が正のものを選び、基底変数に換える
今回の例では、x_2

目的関数の定義式以外の定数項をその式でのx_2 の係数で割り、結果を最大増加量の欄に記す。

新しい表で基底変数･非基底変数の交換を続ける

Z	X1	X2 ~~非~~	X3 非	X4 非	X5	定数	最大増加量
	1	11/15	1/15			110000	$/(11/15) = 150000$
		20/3	-2/3	1		300000	$/(20/3) = 45000$
		67/5	-3/5		1	810000	$/(67/5) = 60447.\cdots$
1		1/3	-1/3			-550000	

最小の増加量 45000 を与える交換を選ぶと、
非基底変数になるのは x_4 となる

新しい表で基底変数･非基底変数の交換を続ける

Z	X1	X2 ~~非~~	X3 非	X4 非	X5	定数	最大増加量
	1	11/15	1/15			110000	
		~~20/3~~ 1	~~2/3~~ $-1/10$	~~1~~ $3/20$		~~300000~~ 45000	
		67/5	-3/5		1	810000	
1		1/3	-1/3			-550000	

$\times \frac{3}{20}$

x_2 と x_4 の交換で現われた連立方程式を解く。新しい基底変数の値を定めるために2段目の式を x_2 の係数(20/3)で割る。

新しい表で基底変数･非基底変数の交換を続ける

Z	X1	X2 ~~非~~	X3 非	X4 非	X5	定数	最大増加量
		1 ~~11/15~~ 0	~~1/15~~ 7/50	$-\frac{11}{100}$		~~110000~~ 77000	
		~~20/3~~ 1	~~2/3~~ $-1/10$	~~1~~ 3/20		~~300000~~ 45000	
		~~67/5~~ 0	~~-3/5~~ $-37/50$	$-\frac{201}{100}$	1	~~810000~~ 207000	
1		~~1/3~~ 0	~~-1/3~~ $-9/30$	$-\frac{1}{20}$		~~-550000~~ -565000	

$-\times\frac{11}{15}$

$\times\frac{3}{20}$

$-\times\frac{67}{5}$

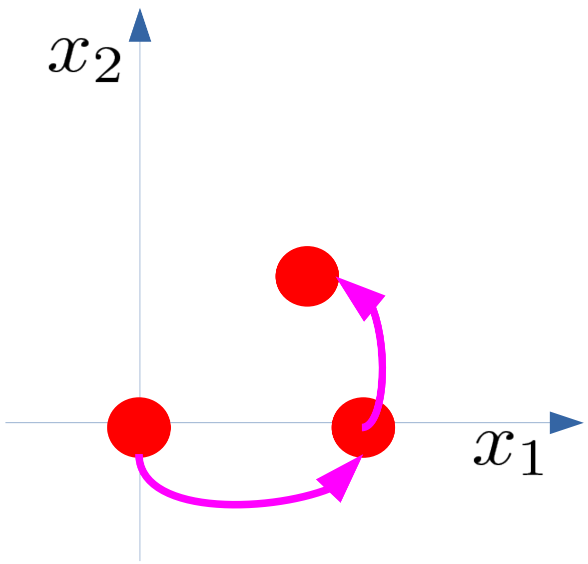
$-\times\frac{1}{3}$

x_2 について得た関係式を使って、他の段から x_2 を消去すると、連立方程式の解が定数欄に現れる。

新しい表で基底変数･非基底変数の交換を続ける

	Z	X1	X2 ~~非~~	X3 非	X4 非	X5	定数	最大増加量
$-\times\frac{11}{15}$		1	~~11/15~~ 0	~~1/15~~ $7/50$	$-\frac{11}{100}$		~~110000~~ 77000	$/(11/15) = 150000$
$\times\frac{3}{20}$			~~20/3~~ 1	~~2/3~~ $-1/10$	~~1~~ $3/20$		~~300000~~ 45000	$/(20/3) = 45000$
$-\times\frac{67}{5}$			~~67/5~~ 0	~~-3/5~~ $-37/50$	$-\frac{201}{100}$	1	~~810000~~ 207000	$/(67/5) = 60447.\cdots$
$-\times\frac{1}{3}$	1		~~1/3~~ 0	~~-1/3~~ $-9/30$	$-\frac{1}{20}$		~~-550000~~ -565000	

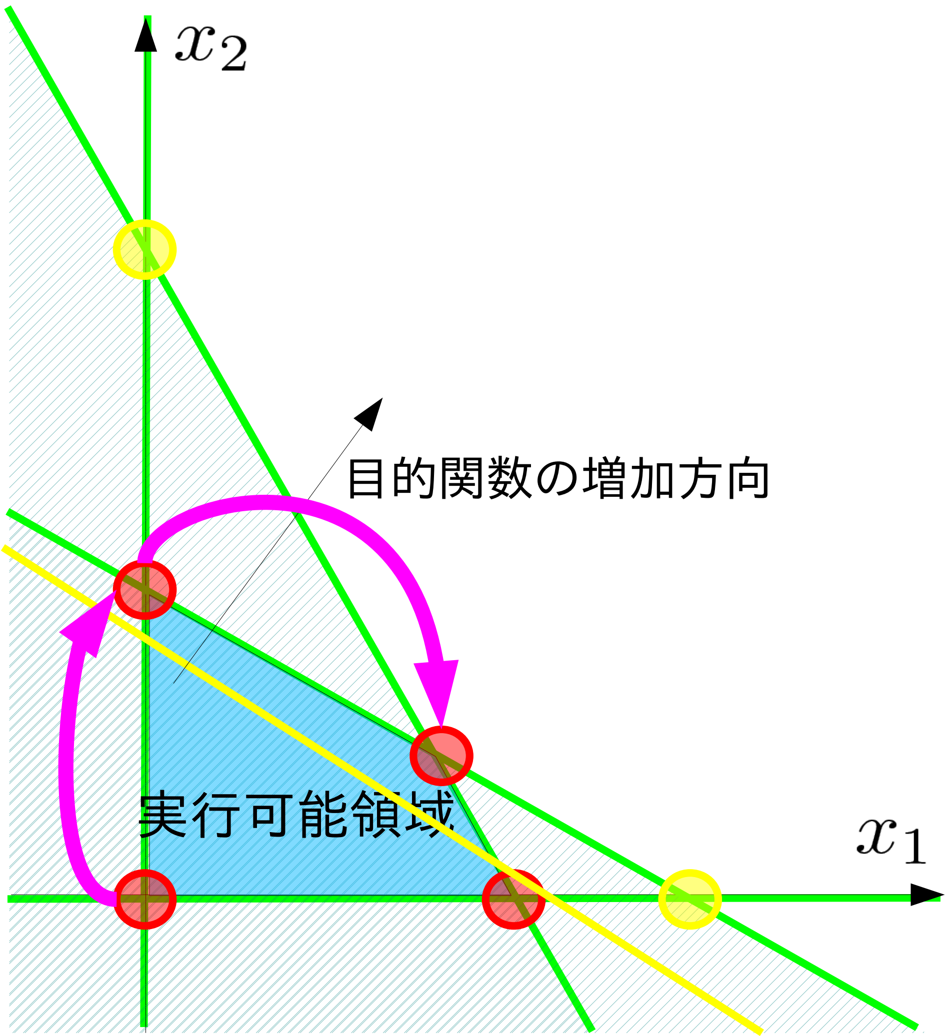
ここまでの作業でsimplex表は上のようになり、目的関数の定義式に現われる非基底変数の係数は全て負になる。



$$(z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$
$$= (-565000, 77000, 45000, 0, 0, 207000)$$

これ以上改善できないので、この時の基本解が最適解になる。

単体法の2段解法による初期基本解の決定



原点が実行可能領域に有る場合

maximize
$600x_1 + 500x_2$
subject to
$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$
$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$
$x_1, x_2 \geq 0$

全変数がゼロ⇒制約式を満たす

⇕

原点が実行可能領域にある

※別の言い方をすれば、
連立不等式に自明解＝ゼロがある

単体法の2段解法による初期基本解の決定

制約式だけを見ると、

不等式制約では

maximize
$$600x_1 + 500x_2$$
subject to
$$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

「全変数がゼロ」で制約式を満たすことが判り易い

⇕

連立不等式に自明解＝ゼロがあることを判断できる

等式標準形にすると、

minimize
$$-600x_1 - 500x_2$$
subject to
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

ゼロにする変数は x_3, x_4 以外

x_3, x_4;追加した変数？

※各式に1つだけの変数

元から等式だったら?

⇕

連立不等式の解が容易に求まるように撰択している

単体法の2段解法による初期基本解の決定

等式制約が与えられた場合、

```
minimize
```
$$-600x_1 - 500x_2$$
```
subject to
```
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

各式に1つだけの変数 x_3, x_4 以外を除いた連立方程式

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$

の解が非負条件を満たすなら

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

単体法の初期基本解となる

非負条件さえ満たせば良いが

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$

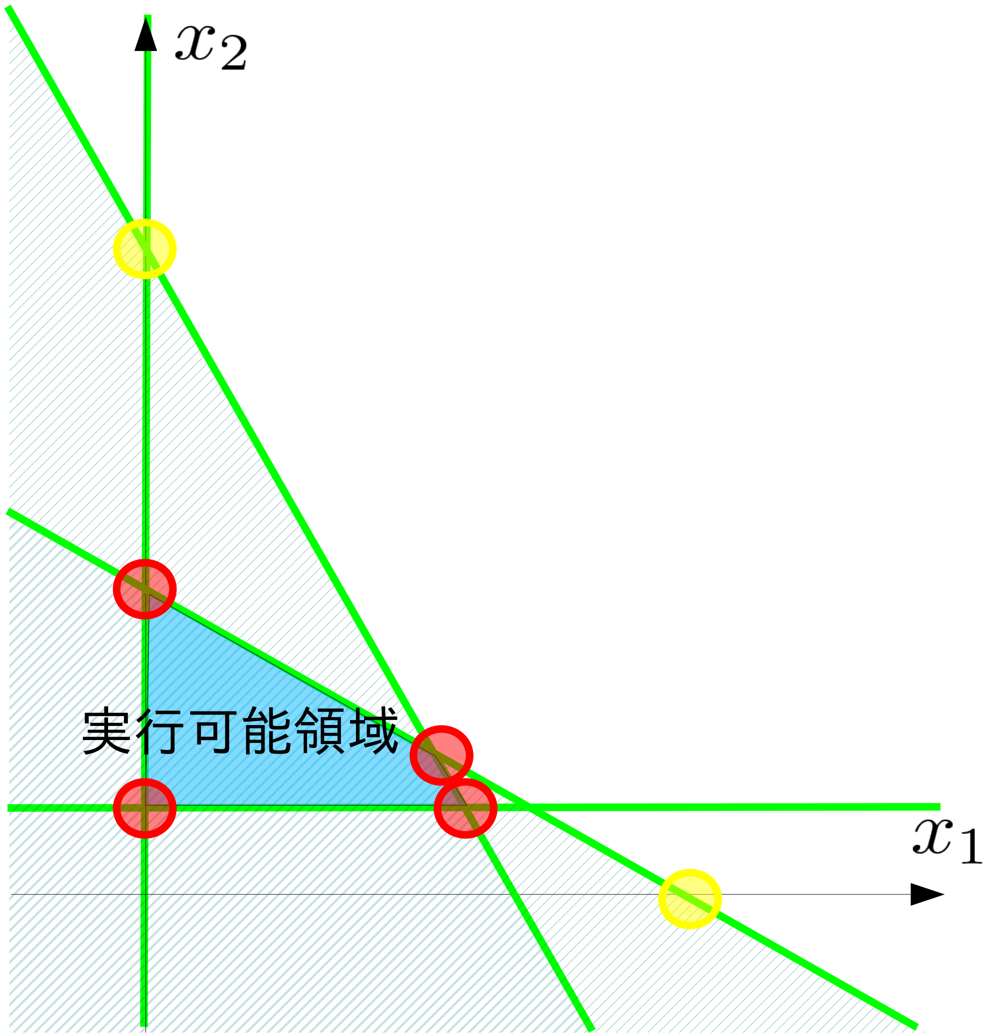
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$

連立方程式を解かずに済むもの（⇒原点）を選ぶ

単体法の2段解法による初期基本解の決定



左図の制約式を考える

```
minimize
```
$$-600x_1 - 500x_2$$
```
subject to
```
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$
$$x_2 - x_5 = 20 \times 10^3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

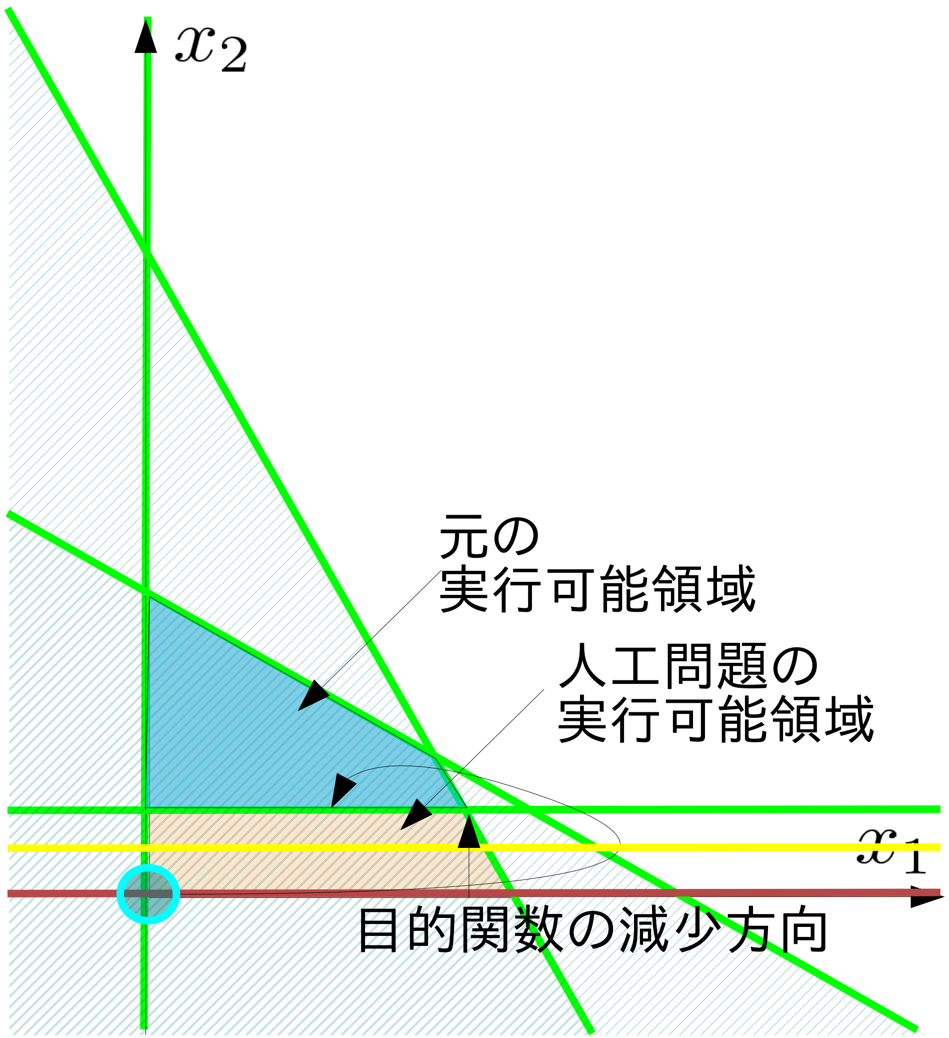
各式1つだけの変数：x_3, x_4, x_5

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 45 \times 10^3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \times 10^3$$
$$x_2 - x_5 = 20 \times 10^3$$

x_5 が非負条件を満たさない

↑「係数と定数の符号が異なる」

単体法の2段解法による初期基本解の決定

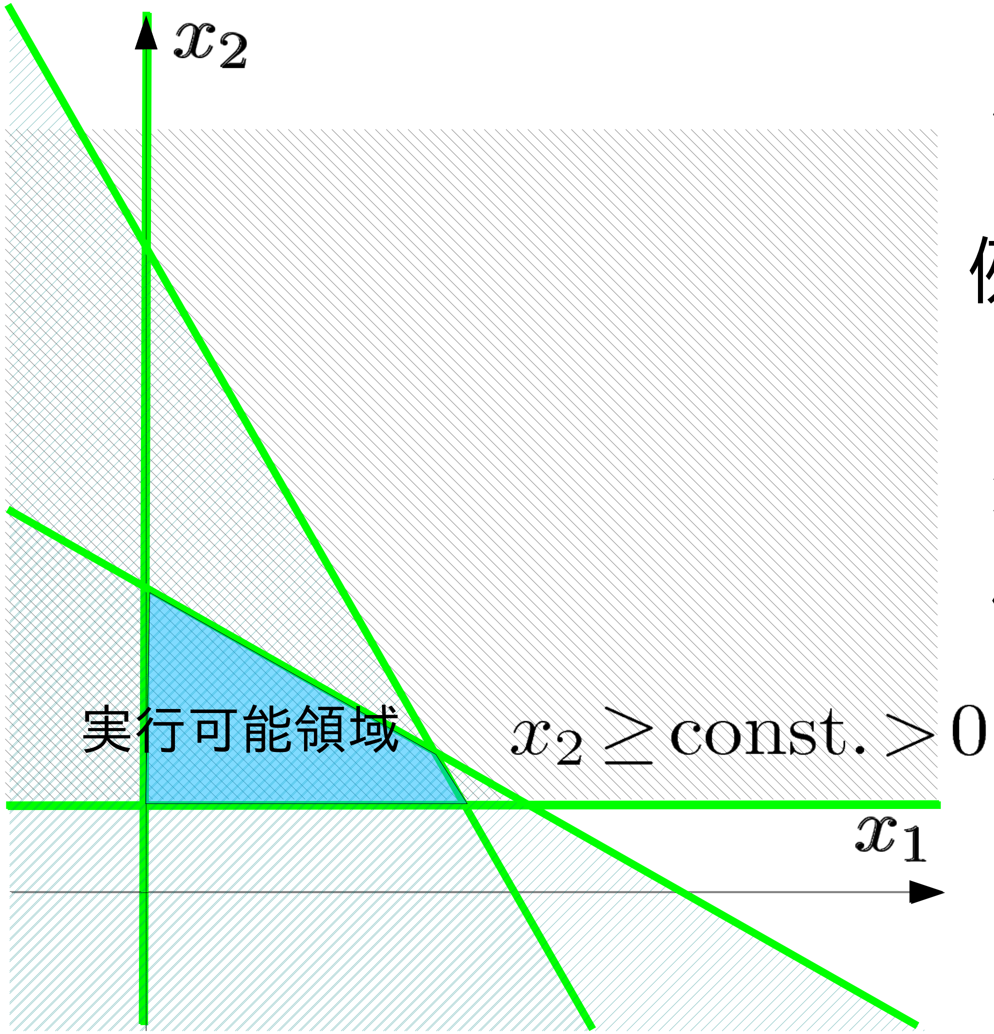


2段階法のアイディア

maximize
$600x_1 + 500x_2$
subject to
$3x_1 + x_2 \leq 45 \times 10^3$
$x_1 + 2x_2 \leq 40 \times 10^3$
$x_2 \geq 10 \times 10^3$
$x_1, x_2 \geq 0$

1. 制約式を変形し、原点が実行可能領域に含まれるようにする
2. 元の実行可能領域で最小化される目的関数を定める
3. 1と2で作った人工問題を解き、元の問題の端点を求める

単体法の2段解法による初期基本解の決定



原点を実行可能領域外にする制約
　＝変数が負orゼロ

例：$x_2 - x_\mathrm{s} = t > 0$

$x_2 = 0 \rightarrow x_\mathrm{s} = -t < 0$

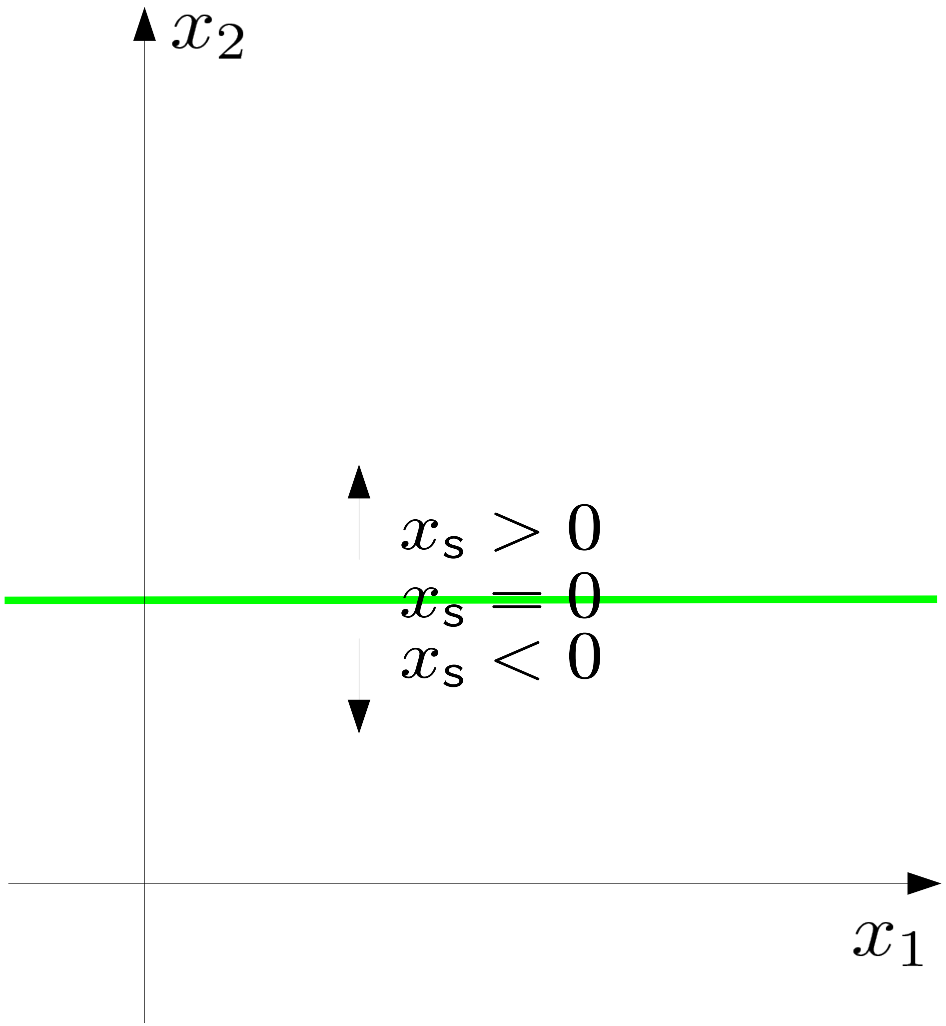
変数を追加して非負条件を満たす

例：$x_2 - x_\mathrm{s} + x_\mathrm{a} = t > 0$

$x_2 = 0 \rightarrow x_\mathrm{s} = x_\mathrm{a} - t$

$\therefore x_\mathrm{a} > t > 0 \Rightarrow x_\mathrm{s} = x_\mathrm{a} - t > 0$

単体法の2段解法による初期基本解の決定



原点を実行可能領域外にする制約
＝変数が負orゼロ

例: $x_2 - x_\mathrm{s} = t > 0$

$x_2 = 0 \rightarrow x_\mathrm{s} = -t < 0$

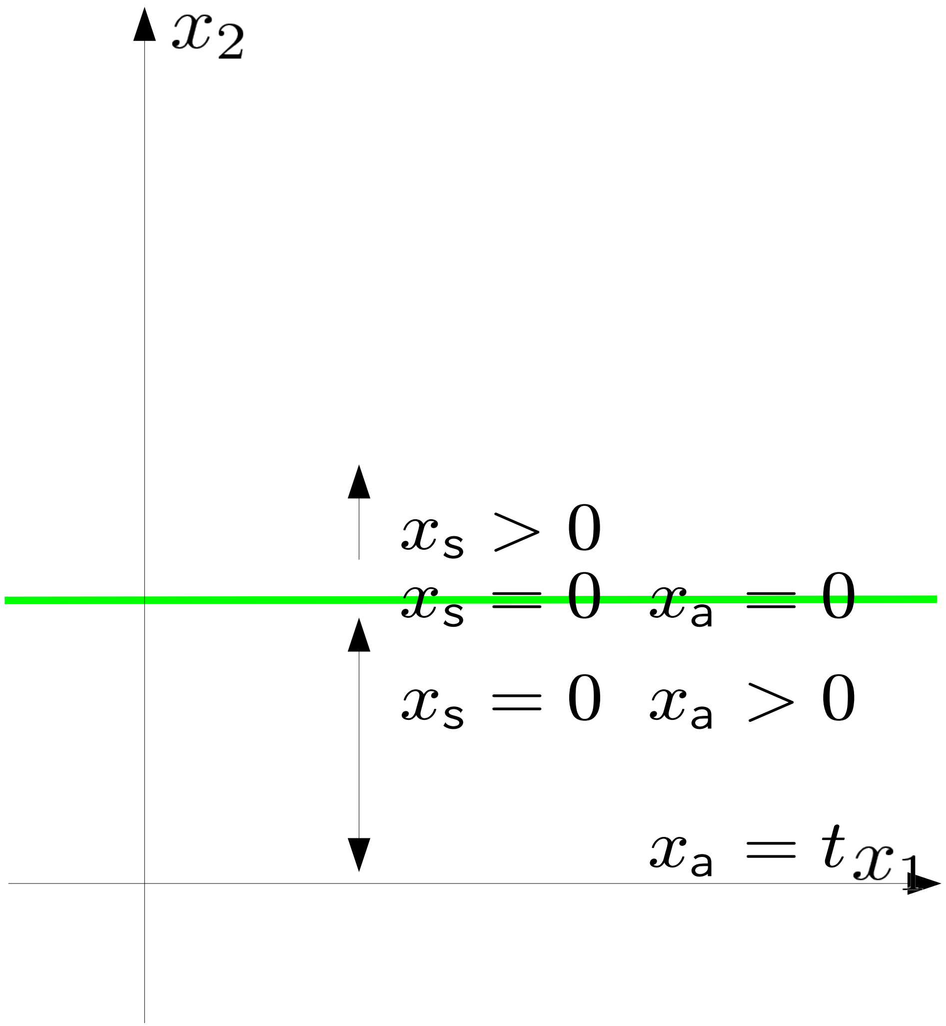
変数を追加して非負条件を満たす

例: $x_2 - x_\mathrm{s} + x_\mathrm{a} = t > 0$

$x_2 = 0 \rightarrow x_\mathrm{s} = x_\mathrm{a} - t$

$\therefore x_\mathrm{a} > t > 0 \Rightarrow x_\mathrm{s} = x_\mathrm{a} - t > 0$

単体法の2段解法による初期基本解の決定



原点を実行可能領域外にする制約
　＝変数が負orゼロ

例:$x_2 - x_\mathrm{s} = t > 0$

$x_2 = 0 \rightarrow x_\mathrm{s} = -t < 0$

変数を追加して非負条件を満たす

例:$x_2 - x_\mathrm{s} + x_\mathrm{a} = t > 0$

$x_2 = 0 \rightarrow x_\mathrm{s} = x_\mathrm{a} - t$

$\therefore x_\mathrm{a} > t > 0 \Rightarrow x_\mathrm{s} = x_\mathrm{a} - t > 0$

単体法の2段解法による初期基本解の決定

minimize $\quad z$

subject to

$$
\begin{aligned}
3x_1 \quad + x_2 + x_3 &= 45 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 &= 40 \\
x_2 - x_5 &= 10 \\
z + 6x_1 + 5x_2 \qquad &= 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

1. **基底変数の候補の係数が定数項と異なる符号を持つ**制約式を見つける
2. 1 の式に人工変数を加え新しい制約式を作る
3. 人工変数の総和を目的関数とする最小化問題を単体法を用いて解く
4. 3 で得た最適値が0であれば、最適解を元の問題の初期解として採用する

単体法の2段解法による初期基本解の決定

minimize z

subject to

$$
\begin{aligned}
3x_1 \quad +x_2+x_3 &= 45 \\
x_1+2x_2+x_4 &= 40 \\
\boxed{x_2-x_5 = 10} \\
z+6x_1+5x_2 \qquad &= 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

1. **基底変数の候補の係数が定数項と異なる符号を持つ**制約式を見つける
2. 1 の式に人工変数を加え新しい制約式を作る
3. 人工変数の総和を目的関数とする最小化問題を単体法を用いて解く
4. 3 で得た最適値が0であれば、最適解を元の問題の初期解として採用する

単体法の2段解法による初期基本解の決定

minimize z

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 \quad + x_2 + x_3 &= 45 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 40 \\ \boxed{x_2 - x_5 + x_6 = 10} & \\ z + 6x_1 + 5x_2 \qquad &= 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. **基底変数の候補の係数が定数項と異なる符号を持つ**制約式を見つける
2. 1 の式に人工変数を加え新しい制約式を作る
3. 人工変数の総和を目的関数とする最小化問題を単体法を用いて解く
4. 3 で得た最適値が0であれば、最適解を元の問題の初期解として採用する

単体法の2段解法による初期基本解の決定

minimize $\boxed{x_6}$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 45 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 40 \\ \boxed{x_2 - x_5 + x_6 = 10} \\ z + 6x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}$$

1. **<u>基底変数の候補の係数が定数項と異なる符号を持つ</u>**制約式を見つける
2. 1 の式に人工変数を加え新しい制約式を作る
3. 人工変数の総和を目的関数とする最小化問題を単体法を用いて解く
4. 3 で得た最適値が0であれば、最適解を元の問題の初期解として採用する

単体法の2段解法による初期基本解の決定

minimize $\boxed{x_6}$

subject to

$$
\begin{aligned}
3x_1 \quad + x_2 + x_3 &= 45 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 &= 40 \\
\boxed{x_2 - x_5 + x_6 = 10} \\
z + 6x_1 + 5x_2 \qquad &= 0 \\
\boxed{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{aligned}
$$

1. **<u>基底変数の候補の係数が定数項と異なる符号を持つ</u>**制約式を見つける
2. 1 の式に人工変数を加え新しい制約式を作る
3. 人工変数の総和を目的関数とする最小化問題を単体法を用いて解く
4. 3 で得た最適値が0であれば、最適解を元の問題の初期解として採用する

2段階単体法適用例

minimize $z = x_1 + 2x_2$

subject to
$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 &\geq -1 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

課題1: グラフを描き、原点が実行可能領域ではないことを確認してください。

課題2: 2段階 simplex 法の第1段階を用いて実行可能領域の端点を見つけてください。

hint　2段階 simplex 法の第1段階では、
1. 等式標準形を導く
2. 正の係数の slack 変数を持たない制約式に人工変数を追加する
3. 人工変数に負の係数をつけて加えた人工目的関数の最大化問題を解く
という手順が必要です。

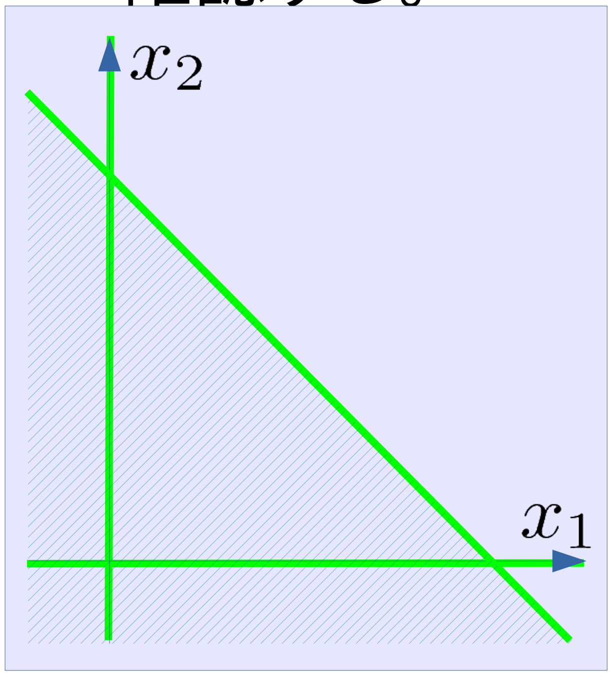
2段階単体法適用例

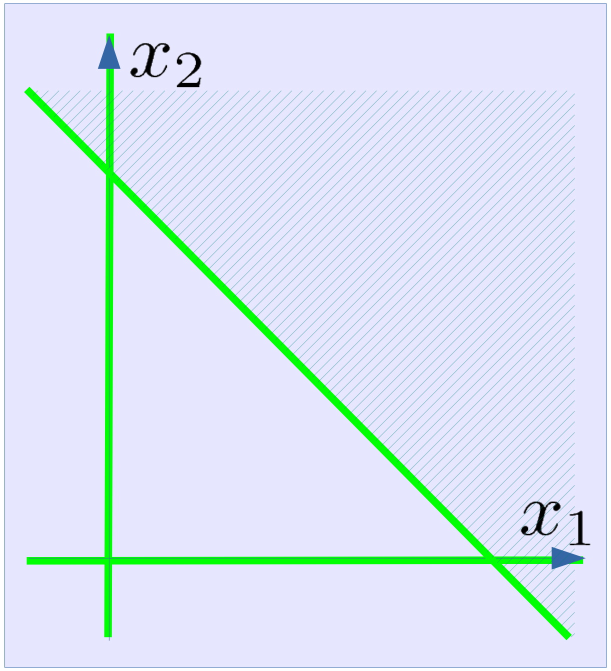
minimize $\quad z = x_1 + 2x_2$

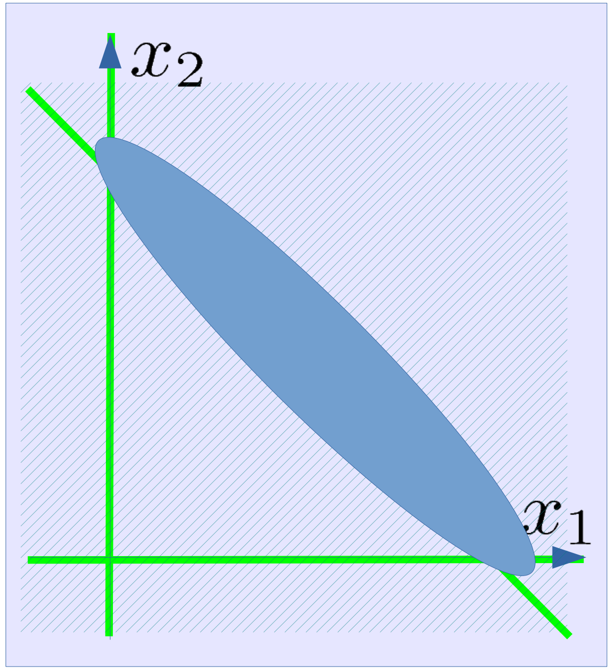
subject to
$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 &\geq -1 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$\boxed{x_1 + x_2 \leq 1}$

課題1：グラフを描き、原点が実行可能領域ではないことを確認する。







2段階単体法適用例

minimize $z = x_1 + 2x_2$

subject to

$$
\begin{aligned}
-x_1 - x_2 &\geq -1 \\
x_1 + x_2 &\geq 1 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

課題2: 2段階 simplex 法の第1段階を用いて実行可能領域の端点を見つける。

等式標準形

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize } z \\
&\text{subject to} \\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
&\quad x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
&z - x_1 - 2x_2 = 0 \\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

人工問題

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize } z (= {\color{red} x_5}) \\
&\text{subject to} \\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
&\quad x_1 + x_2 - x_4 {\color{red} + x_5} = 1 \\
&z \quad {\color{red} - x_5} = 0 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, {\color{red} x_5} \geq 0
\end{aligned}
$$

2段階単体法適用例

人工問題の等式標準形からsimplex 表を準備する

人工問題

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize } z(=x_5) \\
&= -x_1 - x_2 + x_4 + 1 \\
&\text{subject to} \\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
&\quad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\
&z + x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0
\end{aligned}
$$

simplex 表

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数	最大増加量
1	1	1	0	0	1	
1	1	0	−1	1	1	
1	1	0	−1	0	1	

2段階単体法適用例

- 最初のシンプレックス表

z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	−1	1	1	
1	1	1	0	−1	0	1	

- 目的関数の定義式で非基底変数の係数のうち正のものを選ぶ

z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	−1	1	1	
1	1	1	0	−1	0	1	

- 2つの候補のうち、今回はx1の係数を選ぶ

z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	−1	1	1	
1	1	1	0	−1	0	1	

2段階単体法適用例

- x1は非基底変数から基底変数になる

z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	−1	1	1	
1	1	1	0	−1	0	1	

- x1の係数で定数項を割りx1の増加量を計算する

z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	$/1 = 1$
0	1	1	0	−1	1	1	$/1 = 1$
1	1	1	0	−1	0	1	

- 最小の増加量を選び、基底変数→非基底変数の候補を決める

z	x_1 非	x_2 非	x_3	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	$/1 = 1$
0	1	1	0	−1	1	1	$/1 = 1$
1	1	1	0	−1	0	1	

2段階単体法適用例

- x3は基底変数から非基底変数になる

z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	−1	1	1	
1	1	1	0	−1	0	1	

- 基底変数の値を求めるためx1の係数を払う

z	x_1 ~~非~~	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
$-\times 1$ 0	1 -1	1 -1	0 -1	−1	1	1 -1	
$-\times 1$ 1	1 -1	1 -1	0 -1	−1	0	1 -1	

- 目的関数の式で非基底変数の係数が非正になり最適解を得た

z	x_1	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	0	0	−1	−1	1	0	
1	0	0	−1	−1	0	0	

2段階単体法適用例

z	x_1	x_2 非	x_3 非	x_4 非	x_5	定数	最大増加量
0	1	1	1	0	0	1	
0	0	0	−1	−1	1	0	
1	0	0	−1	−1	0	0	

- 最適解を得る
  $z=0, x_1=1, x_2, x_3, x_4, x_5=0$
- 最適値＝0 なので、これを初期解に用いることができる