数値最適化

第7回：（線形計画問題の）
双対定理・相補性定理

線形計画問題の行列表現と単体法

線形計画問題の行列表現(等式標準形)

minimize
$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m$
subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

定義：ベクトルの不等式
$\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{q} \Leftrightarrow p_j \leq q_j,\ j = 1, \ldots,$

$\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{q} \Leftrightarrow p_j \geq q_j,\ j = 1, \ldots,$

線形計画問題の行列表現(不等式標準形)

minimize
$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m$
subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \geq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \geq b_n$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$$

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

線形計画問題の行列表現(単体法)

minimize
$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$
subject to
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_m &\geq 0 \end{aligned}$$

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

基底変数: $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}\} \subset \{x_1, \ldots, x_m\} \quad (n \leq m)$
非基底変数: $\{x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m}\} = \{x_1, \ldots, x_m\} \setminus \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}\}$

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}) \qquad \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} = (x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m})$

$\{c_{j_1}, \ldots, c_{j_m}\} = \{c_1, \ldots, c_m\} \quad \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} = (c_{j_1}, \ldots, c_{j_n}) \quad \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} = (c_{j_{n+1}}, \ldots, c_{j_m})$

$\{a_{kj_1}, \ldots, a_{kj_m}\} = \{a_{k1}, \ldots, a_{km}\} \qquad k = 1, \ldots, n$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & \cdots & a_{nj_n} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} a_{1j_{n+1}} & \cdots & a_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nj_{n+1}} & \cdots & a_{nj_m} \end{pmatrix}$$

線形計画問題の行列表現

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

minimize
$$z = \underbrace{c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}} + \underbrace{c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}}$$
subject to
$$\begin{aligned} a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} &+ a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} = b_1 \\ a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} &+ a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} = b_2 \\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} \qquad & \qquad \vdots \qquad \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} \\ a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n} &+ a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} = b_n \end{aligned}$$
$$\underbrace{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}}, \underbrace{x_{j_{n+1}} \ldots, x_{j_m}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}} \geq 0$$

線形計画問題の行列表現

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \geq \boldsymbol{0}$

単体法の各段階での操作は
z が減少するように
$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}$, を更新
するものになる。

minimize
$$z = \underbrace{c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}} + \underbrace{c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}}_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}}$$
subject to
$$\begin{aligned} a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} &+ a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} = b_1 \\ a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} &+ a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} = b_2 \\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} \qquad & \qquad \vdots \qquad \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} \\ a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n} &+ a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} = b_n \end{aligned}$$
$$\underbrace{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}}, \underbrace{x_{j_{n+1}} \ldots, x_{j_m}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}} \geq 0$$

線形計画問題の行列表現(単体法)

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

原点を実行可能領域に
持つ線形計画問題の
不等式標準形を考える。

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \geq \boldsymbol{0}$

スラック変数 $\boldsymbol{x}'^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_n)$
を導入して等式標準形とsimplex
表を得る。

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

線形計画問題の行列表現（単体法）

$$
\begin{aligned}
-\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b}\\
z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= 0
\end{aligned}
$$

最初のsimplex表

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{A}$
基底変数の連立方程式とその解は
$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = -\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = -\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}$
非基底変数はゼロなので、
目的関数値もゼロ
$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b}\\
z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0
\end{aligned}
$$

更新されたsimplex表

単体法の操作により各行列要素が更新されるが$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{I}$と$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{0}$は保たれるので基底解は常に$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{b}$と$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{0}$
終了時の$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{b}$が最適解となる。

※更新される必要があるのは非基底変数の選択時に必要な $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$ と基底変数の選択時に必要な $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}$ と $\boldsymbol{b}$ だけ。

※単体法の操作で繰り返される $\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{I}$ を維持するピボット変換により誤差が蓄積する（誤差を含む係数行列を元に計算が繰り返される。）

線形計画問題の行列表現（改訂単体法）

$$
\begin{aligned}
-\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b}\\
z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= 0
\end{aligned}
$$

最初のsimplex表

単体法の操作では基底部分と非基底部分の分類が変更されるだけと考え、行列のデータはそのまま、変数の基底・非基底の区別だけを更新する。

minimize
$$z = \overbrace{c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n}}^{\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}} + \overbrace{c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}}^{\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}}$$
subject to
$$
\begin{array}{ccccc}
a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_n}x_{j_n} & + & a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} & = & b_1\\
a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_n}x_{j_n} & + & a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} & = & b_2\\
\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}} & & \vdots \quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}} & & \\
a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots + a_{nj_n}x_{j_n} & + & a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} & = & b_n
\end{array}
$$
$$\underbrace{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}}, \underbrace{x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m}}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}} \geq 0$$

線形計画問題の行列表現（改訂単体法）

$$
\begin{aligned}
-\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b}\\
z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= 0
\end{aligned}
$$

最初のsimplex表

単体法の操作では基底部分と非基底部分の分類が変更されるだけと考え、行列のデータはそのまま、変数の基底・非基底の区別だけを更新する。

minimize
$$z = c_{j_1}x_{j_1} + \cdots + c_{j_n}x_{j_n} + c_{j_{n+1}}x_{j_{n+1}} + \cdots + c_{j_m}x_{j_m}$$
subject to
$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots & + & a_{1j_n}x_{j_n} & + & a_{1j_{n+1}}x_{j_{n+1}} & + & \cdots + a_{1j_m}x_{j_m} & = & b_1\\
a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots & + & a_{2j_n}x_{j_n} & + & a_{2j_{n+1}}x_{j_{n+1}} & + & \cdots + a_{2j_m}x_{j_m} & = & b_2\\
 & & & & \vdots & & & & \\
a_{nj_1}x_{j_1} + \cdots & + & a_{nj_n}x_{j_n} & + & a_{nj_{n+1}}x_{j_{n+1}} & + & \cdots + a_{nj_m}x_{j_m} & = & b_n
\end{array}
$$
$$x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}, x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m} \geq 0$$

線形計画問題の行列表現（改訂単体法）

$$
\begin{aligned}
-\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b}\\
z - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= 0
\end{aligned}
$$

最初のsimplex表

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{A}$
基底変数の連立方程式とその解は
$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}=-\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}=-\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{b}$
非基底変数はゼロなので、
目的関数値もゼロ
$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{0} \Rightarrow z=\boldsymbol{0}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= \boldsymbol{b}\\
z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} &= 0
\end{aligned}
$$

更新されたsimplex表

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}$が正則なら変数の交換に必要な情報は計算で求まる。
$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$
$z=\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}})+\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$
（必要なのは$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$の係数：
$-\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}+\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$）

※基底・非基底変数の分類（と$\boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}^{-1}$）だけを更新する改訂単体法が考えられる。

単体法

単体法は次の行列表現に対応するsimplex表の更新により最適解を得る。

$\boldsymbol{A}_\mathrm{B}\boldsymbol{x}_\mathrm{B}+\boldsymbol{A}_\mathrm{N}\boldsymbol{x}_\mathrm{N}=\boldsymbol{b}$

$z-\boldsymbol{c}_\mathrm{B}{}^\mathrm{T}\boldsymbol{x}_\mathrm{B}-\boldsymbol{c}_\mathrm{N}{}^\mathrm{T}\boldsymbol{x}_\mathrm{N}=0$

simplex 表の更新は基底変数と非基底変数一つずつの交換に対応しzが減少するように交換する変数が選ばれる。
また、その過程で必要となる $\boldsymbol{x}_\mathrm{B}$ の値や $\boldsymbol{x}_\mathrm{N}$ の係数 $\boldsymbol{A}_\mathrm{N}$ を求めるために $\boldsymbol{A}_\mathrm{B}=\boldsymbol{I}$ を保つピボット変換が実施される。

改訂単体法

改訂単体法は行列やベクトルの値は更新せず、代りに基底・非基底変数

$\boldsymbol{A}_\mathrm{B}\boldsymbol{x}_\mathrm{B}+\boldsymbol{A}_\mathrm{N}\boldsymbol{x}_\mathrm{N}=\boldsymbol{b}$

$z-\boldsymbol{c}_\mathrm{B}{}^\mathrm{T}\boldsymbol{x}_\mathrm{B}-\boldsymbol{c}_\mathrm{N}{}^\mathrm{T}\boldsymbol{x}_\mathrm{N}=0$

の分類を記憶し$\boldsymbol{A}_\mathrm{B}$や$\boldsymbol{A}_\mathrm{N}$は変数の分類を元に制約式全体の係数行列から求める。その過程で$\boldsymbol{A}_\mathrm{B}$が正則であれば変数の交換に必要な情報は

$\boldsymbol{x}_\mathrm{B}=\boldsymbol{A}_\mathrm{B}{}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}_\mathrm{B}{}^{-1}\boldsymbol{A}_\mathrm{N}\boldsymbol{x}_\mathrm{N}$

$z=\boldsymbol{c}_\mathrm{B}{}^\mathrm{T}\boldsymbol{A}_\mathrm{B}{}^{-1}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{c}_\mathrm{N}{}^\mathrm{T}-\boldsymbol{c}_\mathrm{B}{}^\mathrm{T}\boldsymbol{A}_\mathrm{B}{}^{-1}\boldsymbol{A}_\mathrm{N})\boldsymbol{x}_\mathrm{N}$

の式から求まる。

双対問題

minimize
$z=\boldsymbol{c}^\mathrm{T}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}$

主問題

maximize
$w=\boldsymbol{b}^\mathrm{T}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^\mathrm{T}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}$

双対問題

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}^\mathrm{T}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

双対問題

minimize
$z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m$
subject to
$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m &\geq b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m &\geq b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m &\geq b_n \end{aligned}$$
$x_1,x_2,\ldots,x_m\geq 0$

主問題

maximize
$w=b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_ny_n$
subject to
$$\begin{aligned} a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{n1}y_n &\leq c_1 \\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{n2}y_n &\leq c_2 \\ &\vdots \\ a_{1m}y_1+a_{2m}y_2+\cdots+a_{nm}y_n &\leq c_m \end{aligned}$$
$y_1,y_2,\ldots,y_n\geq 0$

双対問題

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

n 行 m 列の係数行列と m 個の変数、n 通りの制約式からなる主問題

m 行 n 列の係数行列と n 個の変数、m 通りの制約式からなる双対問題

双対問題

minimize
$z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m$
subject to
$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m &\geq b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m &\geq b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m &\geq b_n \end{aligned}$$
$x_1,x_2,\ldots,x_m\geq 0$

主問題

maximize
$w=b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_ny_n$
subject to
$$\begin{aligned} a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{n1}y_n &\leq c_1 \\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{n2}y_n &\leq c_2 \\ &\vdots \\ a_{1m}y_1+a_{2m}y_2+\cdots+a_{nm}y_n &\leq c_m \end{aligned}$$
$y_1,y_2,\ldots,y_n\geq 0$

双対問題

minimize
$z=4x_1+4x_2+x_3$
subject to
$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +2x_2 & -4x_3 & \geq & 2 \\ 2x_1 & & +2x_3 & \geq & 1 \\ -x_1 & +4x_2 & -x_3 & \geq & 1 \end{array}$$
$x_1,x_2,x_3\geq 0$

maximize
$w=2y_1+y_2+y_3$
subject to
$$\begin{array}{rrrcl} 2y_1 & +2y_2 & -y_3 & \leq & 4 \\ 2y_1 & & +4y_3 & \leq & 4 \\ -4y_1 & +2y_2 & -y_3 & \leq & 1 \end{array}$$
$y_1,y_2,y_3\geq 0$

双対問題

maximize
$z=-4x_1-4x_2-x_3$
subject to
$$\begin{array}{rrrcr} -2x_1 & -2x_2 & +4x_3 & \le & -2 \\ -2x_1 & & -2x_3 & \le & -1 \\ x_1 & -4x_2 & +x_3 & \le & -1 \\ & & x_1,x_2,x_3 \ge 0 & & \end{array}$$

minimize
$w=-2y_1-y_2-y_3$
subject to
$$\begin{array}{rrrcr} -2y_1 & -2y_2 & +y_3 & \ge & -4 \\ -2y_1 & & -4y_3 & \ge & -4 \\ 4y_1 & -2y_2 & +y_3 & \ge & -1 \\ & & y_1,y_2,y_3 \ge 0 & & \end{array}$$

↑と同等の問題=→の双対問題
主問題

↑と同等の問題
双対問題

minimize
$z=4x_1+4x_2+x_3$
subject to
$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +2x_2 & -4x_3 & \ge & 2 \\ 2x_1 & & +2x_3 & \ge & 1 \\ -x_1 & +4x_2 & -x_3 & \ge & 1 \\ & & x_1,x_2,x_3 \ge 0 & & \end{array}$$

maximize
$w=2y_1+y_2+y_3$
subject to
$$\begin{array}{rrrcr} 2y_1 & +2y_2 & -y_3 & \le & 4 \\ 2y_1 & & +4y_3 & \le & 4 \\ -4y_1 & +2y_2 & -y_3 & \le & 1 \\ & & y_1,y_2,y_3 \ge 0 & & \end{array}$$

双対問題

maximize
$-z=-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\le-\boldsymbol{b}$
$x\ge 0$

双対問題

minimize
$-w=-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\ge-\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y}\ge\boldsymbol{0}$

主問題

同等の問題

同等の問題

minimize
$z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$Ax\ge b$
$x\ge 0$

主問題

maximize
$w=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\le\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y}\ge\boldsymbol{0}$

双対問題

双対定理

線形計画問題とその双対問題が右のように与えられ、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}=(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_m)$, $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}=(\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_n)$ 実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、最適解である。

minimize
$z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\ge\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x}\ge\boldsymbol{0}$

主問題

maximize
$w=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\le\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y}\ge\boldsymbol{0}$

双対問題

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}},\exists\tilde{\boldsymbol{y}}\ge\boldsymbol{0}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\ge\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\le\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$
$$\Longrightarrow\forall\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{y}\ge\boldsymbol{0},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}\le\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\ge\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

また、一方に最適解が存在すれば、もう一方にも最適解が存在し、最適解が与える双方の目的関数値は等しい。

演習問題7

次の線形計画問題の双対問題を求め、単体法等を用いてこれを解き、最適解の与える両者の目的関数値が等しいことを確認してください。

maximize
$z=x_1+x_2$
subject to
$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +2x_2 & \le & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & \le & 2 \\ & x_1,x_2\ge 0 & & \end{array}$$

演習問題7

次の線形計画問題の双対問題を求め、単体法等を用いて
これらの最適解の与える両目的関数値が等しいこと
を確認してください。

maximize

$$z = [1\ 1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

subject to

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

minimize

$$w = [2\ 2]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

subject to

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

maximize
$z = x_1 + x_2$
subject to

$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +2x_2 & \le & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & \le & 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 & & \end{array}$$

演習問題7

次の線形計画問題の双対問題を求め、単体法等を用いて
これらの最適解の与える両目的関数値が等しいこと
を確認してください。

maximize

$$z = [1\ 1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

subject to

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

minimize

$$w = [2\ 2]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

subject to

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

maximize
$z = x_1 + x_2$
subject to

$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +2x_2 & \le & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & \le & 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 & & \end{array}$$

minimize
$w = 2y_1 + 2y_2$
subject to

$$\begin{array}{rrcl} y_1 & +2y_2 & \ge & 1 \\ 2y_1 & +y_2 & \ge & 1 \\ & y_1, y_2 \ge 0 & & \end{array}$$

maximize
$z = x_1 + x_2$
subject to

$$\begin{array}{rrcl} x_1 & +2x_2 & \le & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & \le & 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 & & \end{array}$$

minimize
$\tilde{z}(= -z = -x_1 - x_2)$
subject to

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ \tilde{z} + x_1 + x_2 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array}$$

~~非~~ 非 非

z	x1	x2	x3	x4	定数	
	1	2	1		2	/1=2
	2	1		1	2	/2=1
1	1	1			0	

~~非~~ 非 非

z	x1	x2	x3	x4	定数	
	~~1~~ 0	~~2~~ 3/2	1	-1/2	~~2~~ 1	/1=2
	~~2~~ 1	~~1~~ 1/2		~~1~~ 1/2	~~2~~ 1	/2=1
1	~~1~~ 0	~~1~~ 1/2		-1/2	~~0~~ -1	

~~非~~ 非 非

z	x1	x2	x3	x4	定数	
		3/2	1	-1/2	1	/(3/2)=2/3
	1	1/2		1/2	1	/(1/2)=2
1		1/2		-1/2	-1	

~~非~~ 非 非

z	x1	x2	x3	x4	定数	
		~~3/2~~ 1	~~1~~ 2/3	~~-1/2~~ -1/3	~~1~~ 2/3	/(3/2)=2/3
	1	~~1/2~~ 0	-1/3	~~1/2~~ 2/3	~~1~~ 2/3	/(1/2)=2
1		~~1/2~~ 0	-1/3	~~-1/2~~ 1/3	~~1~~ -4/3	

$$x_1 = x_2 = 2/3, \tilde{z} = -4/3 \Rightarrow z = 4/3$$

minimize
$w = 2y_1 + 2y_2$
subject to

$$\begin{array}{rrcl} y_1 & +2y_2 & \ge & 1 \\ 2y_1 & +y_2 & \ge & 1 \\ & y_1, y_2 \ge 0 & & \end{array}$$

minimize
w^*, then w
subject to

$$\begin{array}{l} y_1 + 2y_2 - y_3 + y_5 = 1 \\ 2y_1 + y_2 - y_4 + y_6 = 1 \\ w - 2y_1 - 2y_2 = 0 \\ w^* + 3y_1 + 3y_2 - y_3 - y_4 = 2 \\ x_1, x_2, x3, x4, y_5, y_6 \ge 0 \end{array}$$

	w,w*	~~y1 非~~	y2 非	y3 非	y4 非	y5	y6 非	定数	
-×1		1 (-1)	2 (-1/2)	-1	(1/2)	1	(-1/2)	1 (-1/2)	/1
×1/2		~~2~~ (1)	~~1~~ (1/2)		~~-1~~ (-1/2)		~~1~~ (1/2)	~~1~~ (1/2)	/2
+×2	1	-2 (2)	-2 (1)		(-1)		(1)	0 (1)	
-×3	1	3 (-3)	3 (-3/2)	-1	-1 (3/2)		(-3/2)	2 (-3/2)	

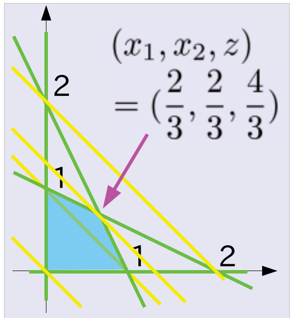
	w,w*	y1	~~y2 非~~	y3 非	y4 非	y5 非	y6 非	定数	
×2/3		~~0~~	~~3/2~~ (1)	~~-1~~ (-2/3)	~~1/2~~ (1/3)	~~1~~ (2/3)	~~-1/2~~ (-1/3)	~~1/2~~ (1/3)	/(3/2)=1/3
-×1/2		1	1/2 (-1/2)	(1/3)	-1/2 (-1/6)	(-1/3)	1/2 (1/6)	1/2 (-1/6)	/(1/2)=1
+×1	1	0	-1 (1)	(-2/3)	-1 (1/3)	(2/3)	1 (-1/3)	1 (1/3)	
-×3/2	1	0	3/2 (-3/2)	-1 (1)	1/2 (-1/2)	(-1)	-3/2 (1/2)	1/2 (-1/2)	

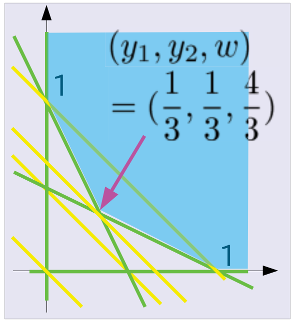
w,w*	y1	y2	y3 非	y4 非	y5 非	y6 非	定数
		1	-2/3	1/3	2/3	-1/3	1/3
	1	0	1/3	-2/3	-1/3	2/3	1/3
1		0	-2/3	-2/3	2/3	2/3	4/3
1		0	0	0	-1	-1	0

w,w*	y1	y2	y3 非	y4 非	y5 非	y6 非	定数
		1	-2/3	1/3	2/3	-1/3	1/3
	1		1/3	-2/3	-1/3	2/3	1/3
1			-2/3	-2/3	2/3	2/3	4/3
1			0	0	-1	-1	0

演習問題7

次の線形計画問題の双対問題を求め、単体法等を用いてこれを解き、最適解の与える両者の目的関数値が等しいことを確認してください。





双対問題と双対定理・相補性定理

双対定理

線形計画問題とその双対問題が右のように与えられ、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_m)$, $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}=(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n)$ 実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、最適解である。

主問題	双対問題
minimize $z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}$	maximize $w=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}$

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}},\exists\tilde{\boldsymbol{y}}\geq\boldsymbol{0}\text{ s.t. }\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\leq\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$

$$\Longrightarrow\forall\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}\text{ s.t. }\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c},\text{ then }\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}\leq\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\geq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

また、一方に最適解が存在すれば、もう一方にも最適解が存在し、最適解が与える双方の目的関数値は等しい。

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{0}\text{ s.t. }\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}},\text{ for }\forall\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}\text{ s.t. }\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}$$

$$\Longrightarrow\exists\tilde{\boldsymbol{y}}\geq\boldsymbol{0}\text{ s.t. }\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\leq\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}},$$

$$\text{for }\forall\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}\text{ s.t. }\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$

双対定理

線形計画問題とその双対問題が右のように与えられ、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_m)$, $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}=(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n)$ 実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、最適解である。

主問題	双対問題
minimize $z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ subject to $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}$	maximize $w=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ subject to $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}$

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}},\exists\tilde{\boldsymbol{y}}\geq\boldsymbol{0}\text{ s.t. }\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\leq\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$

$$\Longrightarrow\forall\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}\leq\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}\geq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

証明：
$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$をそれぞれの問題の任意の実行可能解とする。
$z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ の各項を不等式 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leqq\boldsymbol{c}$ で評価すれば次の関係式が得られる。

$$z=c_1x_1+\cdots+c_mx_m\geq(a_{11}y_1+\cdots+a_{n1}y_n)x_1+\cdots+(a_{1m}y_1+\cdots+a_{nm}y_n)x_m$$

同様に$w=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{b}$ から次の関係式が得られる。

$$w=b_1y_1+\cdots+b_ny_n\leq(a_{11}x_1+\cdots+a_{1m}x_m)y_1+\cdots+(a_{n1}x_1+\cdots+a_{nm}x_m)y_n$$

両式の右辺を比較すれば、一般に $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ の成立することが分かる。
$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$であれば任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対して次式が成立し定理が証明される。

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}\geq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}$$

双対定理

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}}, \exists\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$
$$\Longrightarrow \forall\boldsymbol{x}, \forall\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

証明:
$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ をそれぞれの問題の任意の実行可能解とする。
制約式より $\boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$ すなわち

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m \geq b_1, \qquad a_{11}y_1 + \cdots + a_{n1}y_n \leq c_1,$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

それぞれ両辺に$y_1,\ldots,y_n$, $x_1,\ldots,x_m \geq 0$ をかけても不等号はそのまま

$$a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m \geq b_n, \qquad a_{1m}y_1 + \cdots + a_{nm}y_n \leq c_m.$$
$$y_1(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m) \geq y_1b_1, \quad x_1(a_{11}y_1 + \cdots + a_{n1}y_n) \leq x_1c_1,$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

左右それぞれを加えて行列で表現すれば $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}$
$(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$ より $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$.

$$y_n(a_{n1}x_1! + \ldots + a_{nm}x_m) \geq y_nb_n, \; x_m(a_{1m}y_1 + \ldots + a_{nm}y_n) \leq x_mc_m.$$

双対定理

$$\exists\tilde{\boldsymbol{x}}, \exists\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$
$$\Longrightarrow \forall\boldsymbol{x}, \forall\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

証明つづき:
任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ について $\boldsymbol{x}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{y}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{c}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{y}$ なので
ある $\tilde{\boldsymbol{x}}$, $\tilde{\boldsymbol{y}}$, についても $\boldsymbol{c}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{c}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{y}$
このとき、$\boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{c}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}$ なら $\boldsymbol{c}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{c}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{c}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{y}$
したがって、定理の通り

ある実行可能解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$, $\tilde{\boldsymbol{y}}$, について $\boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{c}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}$ なら、
任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ について $\boldsymbol{c}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{c}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{y}$

すなわち $\tilde{\boldsymbol{x}}$, $\tilde{\boldsymbol{y}}$, はそれぞれ最適解

主問題と双対問題の関係

maximize
$z = 2x_1 + x_2 + x_3$
subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & \leq & 4 \\ 2x_1 & & 4x_3 & \leq & 4 \\ -4x_1 & +3x_2 & -x_3 & \leq & 1 \end{array}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

最大化問題

minimize
$w = 4y_1 + 4y_2 + y_3$
subject to

$$2y_1 + 2y_2 - 4y_3 \geq 2$$
$$2y_1 + 3y_3 \geq 1$$
$$-y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 1$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

最小化問題

$$\text{maximize} \quad z = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
$$\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\text{minimize} \quad w = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$
$$\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

主問題と双対問題の関係

maximize
$z = 2x_1 + x_2 + x_3$
subject to

$$\begin{array}{rrrcrl} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & \leq & 4 & ① \\ 2x_1 & & 4x_3 & \leq & 4 & ② \\ -4x_1 & +3x_2 & -x_3 & \leq & 1 & ③ \end{array}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

最大化問題

minimize
$w = 4y_1 + 4y_2 + y_3$
subject to

$$2y_1 + 2y_2 - 4y_3 \geq 2$$
$$2y_1 + 3y_3 \geq 1$$
$$-y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 1$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

最小化問題

最大化問題は、制約式の定める
上界に一番近い実行可能解を探す問題
2つの制約式から分かる上界の例:

$$z \leq (①+②)/2 = 2x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 \leq 4$$

（係数を比較すれば不等式の成立が分かる）

①②③の組み合わせで得られる関係式
y_1×① + y_2×② + y_3×③
を考える。
$y_1, y_2, y_3 \geqq 0$ であれば、各式の両辺を加えて

$$= (2y_1 + 2y_2 - 4y_3)x_1 + (2y_1 + 3y_3)x_2$$
$$+(-y_1 + 4y_2 - y_3)x_3 \leq (4y_1 + 4y_2 + y_3)$$

関係式の係数が目的関数の係数より大きければ、
$z \leq 4y_1 + 4y_2 + y_3$ により
目的関数の上界を得ることができる。

このとき、最も厳しい上界を求める問題、
すなわち $4y_1 + 4y_2 + y_3$ の最小化問題が
z の上限を求める問題に対応する。

主問題と双対問題の関係

maximize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

最大化問題

minimize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

最小化問題

一般化して考えると；

主問題の制約$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}$ と非負条件$\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}$ から
$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$
主問題の制約$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{c}$ と非負条件$\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$ から
$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}$
スカラを転置しても値は変わらないので
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c} \leqq \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = w$

$\boldsymbol{y}$を変化させて最小のwを探す
⇒$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}$ のもとで最も厳しい z の上界を探す
$\boldsymbol{x}$を変化させて最大のzを探す
⇒$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{c}$ のもとで最も厳しい w の下界を探す

双対問題と双対定理のまとめ

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

主問題

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題

双対問題は、
最大化問題の最小上界、
最小化問題の最大下界
を求める数理計画問題である。
行列表現を用いた一般的な表現は
左記の通り

双対定理

上式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$と $\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$ がそれぞれ主問題、双対問題の実行可能解でかつ、双方の目的関数値が等しければ、これは、それぞれの問題の最適解である。

$$\exists \tilde{\boldsymbol{x}}, \exists \tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$$
$$\Longrightarrow \forall \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

また、どちらか一方に最適解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ が存在すれば、もう一方にも最適解 $\tilde{\boldsymbol{y}}$ が存在し、双方の最適解が与える目的関数値は等しい。

主問題と双対問題の等式標準形

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

主問題

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

主問題の主変数： $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$

$\boldsymbol{x}$ の双対変数： $\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_m)$

主問題のスラック変数： $\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_n)$

$\boldsymbol{s}$ の双対変数： $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

双対問題の主変数： $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

$\boldsymbol{y}$ の双対変数： $\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_n)$

双対問題のスラック変数：$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_m)$

$\boldsymbol{t}$ の双対変数： $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$

双対問題と相補性定理

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

主問題

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題

相補性定理

左式のような線形計画問題とその双対問題が与えられているとき、

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m) \quad \tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$$

がそれぞれ、主問題、双対問題の最適解であるならば、次の関係式が成立する。

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n = c_j$$
$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m = b_k$$
$$a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n < c_j \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$
$$a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m > b_k \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

minimize	maximize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$	$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to	subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$
主問題	双対問題

双対定理：
$\tilde{\boldsymbol{x}}$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}$ が実行可能解かつ $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$
$\Longleftrightarrow$ $\tilde{\boldsymbol{x}}$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}$ は最適解

弱双対定理：
$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が実行可能解 $\Longrightarrow \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$

$$\because\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

相補性定理：
$\tilde{\boldsymbol{x}}$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}$ は最適解なので $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}}$ この不等式の等号が成立する。

$$(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0 \qquad (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0$$

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n = c_j$$

$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m = b_k$$

$$a_{1j}\tilde{y}_1 + \cdots + a_{nj}\tilde{y}_n < c_j \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$

$$a_{k1}\tilde{x}_1 + \cdots + a_{km}\tilde{x}_m > b_k \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

等式標準形と相補性定理

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

相補性定理

左式のような線形計画問題とその双対問題の等式標準形が与えられているとき、

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m) \qquad \tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$$
$$\tilde{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n) \qquad \tilde{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{T}} = (\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{s}_m)$$

がそれぞれ、主問題、双対問題の最適解であるとする。

このとき、次の関係式が成立する。

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \qquad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$
$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \qquad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

主問題の等式標準形

maximize
$z = x_1 + 2x_2$
subject to

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & -x_2 & +s_1 & = & 7 \\ 3x_1 & +x_2 & +s_2 & = & 10 \\ -x_1 & +2x_2 & +s_3 & = & 18 \end{array}$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_4 \geq 0$$

双対問題の等式標準形

minimize
$w = 7y_1 + 10y_2 + 18y_3$
subject to

$$\begin{array}{rrrrcr} 2y_1 & +3y_2 & -y_3 & -t_1 & = & 1 \\ -y_1 & +y_2 & +2y_3 & -t_2 & = & 2 \end{array}$$
$$y_1, y_2, y_3, t_1, t_2 \geq 0$$

相補性定理

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \quad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$
$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \quad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

$$\tilde{x}_1 = \frac{2}{7} \qquad \tilde{t}_1 = 0$$
$$\tilde{x}_2 = \frac{64}{7} \qquad \tilde{t}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y_2 - y_3 = 1,\ y_2 + 2y_3 = 2$$
$$\tilde{s}_1 = \frac{109}{7} \qquad \tilde{y}_1 = 0$$
$$\tilde{s}_2 = 0 \qquad \tilde{y}_2 = ? \qquad \tilde{y}_2 = \frac{4}{7}$$
$$\tilde{s}_3 = 0 \qquad \tilde{y}_3 = ? \qquad \tilde{y}_3 = \frac{5}{7}$$
$$\tilde{z} = \frac{130}{7} \qquad \tilde{w} = \frac{130}{7}$$

主問題の最適解から、双対問題の最適解が定まる。（逆も同様）

まとめ「相補性定理と双対変数」

minimize
$z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
subject to
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{I}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}$

主問題の等式標準形

maximize
$w = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
subject to
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題の等式標準形

主変数: $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, \ldots, x_m)$ $\qquad \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \ldots, y_n)$

スラック変数: $\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, \ldots, s_m)$ $\qquad \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, \ldots, t_n)$

双対変数

相補性定理

$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \quad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$
$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \quad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$

演習問題8

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize $z = x_1 + 2x_2$
subject to $x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0,\ x_2 \leq 3,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

課題2：双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

課題3：課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する。

演習問題8

課題1：次の線形計画問題とその双対問題の等式標準形を求める。

minimize
$z = (1, 2)\boldsymbol{x}$
subject to
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$

minimize
$z = (1, 2)\boldsymbol{x}$
subject to
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}, (s_1, s_2, s_3)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$

maximize
$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$
subject to
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$

maximize
$w = (4, 2, -3)\boldsymbol{y}$
subject to
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}, (t_1, t_2)^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}$

演習問題8

課題2：双対問題の最適解を求め、相補性定理を利用して元の問題の最適解を求める。

相補性定理：主・双対問題の最適解に次の関係が成立
$$\tilde{x}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{t}_j = 0 \quad \tilde{t}_j > 0 \Longrightarrow \tilde{x}_j = 0$$
$$\tilde{y}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{s}_k = 0 \quad \tilde{s}_k > 0 \Longrightarrow \tilde{y}_k = 0$$
(主問題の主変数：$\tilde{x}_j$、スラック変数：$\tilde{s}_k$
双対問題の主変数：$\tilde{y}_k$、スラック変数：$\tilde{t}_j$)

双対問題の最適解：
$$w = 6, y_1 = 4/3, y_2 = 1/3, y_3 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$$
↓相補性定理
主問題の最適解： $z = 6, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 > 0, x_1 > 0, x_2 > 0$
制約式より： $x_1 + x_2 = 4, -x_1 + 2x_2 = 2, x_2 + s_3 = 3$
連立方程式を解いて未知の変数を定める
$$x_1 = 2, x_2 = 2, s_3 = 1$$
主問題の最適解： $z = 6, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 1, x_1 = 2, x_2 = 2$

演習問題8

課題3：課題2の解答が正しいことを何らかの方法で確認する

課題2の解答：z はx_1=x_2=2において最大値6を得る

minimize
$z = x_1 + 2x_2$
subject to
① $x_1 + x_2 \geq 4$
② $x_2 - 2x_2 + 2 \leq 0$
③ $x_2 \leq 3$
$x_1, x_2 \geq 0$